九年级备考系列

——期中易错百题

平行线中学教材

2020 秋季

PARALLEL EDUCATION

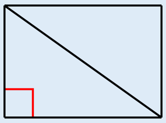
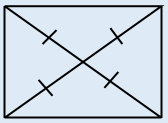
目录

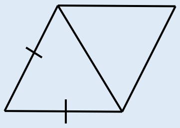
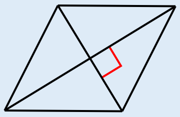
第一篇 特殊平行四边形

考点 1 特殊平行四边形的相关计算

知识小贴士

1．特殊平行四边形中的基本图形：

（1）矩形：①直角三角形： ②等腰三角形：

（2）菱形：①等腰三角形： ②直角三角形：

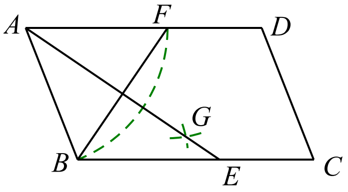
（3）正方形：等腰直角三角形；

2． $S_{菱形}=\frac{1}{2}$对角线乘积的一半$=\frac{1}{2}ah$

推论：对角线互相垂直的四边形的面积等于对角线乘积的一半．

典例 1

1．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，用直尺和圆规作 $\angle BAD$ 的平分线 AG 交 BC 于点 E，以 A 为圆心，AB 长为半径画弧交 AD 于 F，若 $BF=12$，$AB=10$，则 AE 的长为（　　）



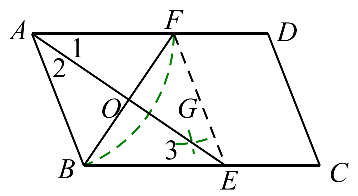
A．16　　B．15　　C．14　　D．13

答案

A

解析

解：连结 EF，AE 与 BF 交于点 O，如图，



$\because AO$ 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AF /\!/ BE$，

$\therefore \angle 1=\angle 3$，

$\therefore \angle 2=\angle 3$，

$\therefore AB=EB$，

$\because AB=AF$

$\therefore AF=BE$，

又 $\because AF /\!/ BE$，

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形，

$\therefore AE\perp BF$，$OB=OF=6$，$OA=OE$，

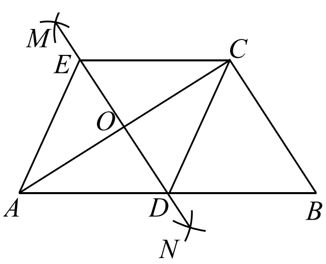
在 Rt$\triangle AOB$ 中，由勾股定理得：$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$\therefore AE=2OA=16$．

故选：A．

2．如图，已知 $\triangle ABC$，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=3$，$AC=4$，小红按如下步骤作图：①分别以 A，C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径在 AC 两边作弧，交于两点 M、N；②连接 MN，分别交 AB、AC 于点 D、O；③过 C 作 $CE /\!/ AB$ 交 MN 于点 E，连接 AE、CD．则四边形 $ADCE$ 的周长为（　　）

A．10　　B．20　　C．12　　D．24



答案

A

解析

解：$\because$ 分别以 A 、 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径在 AC 两边作弧，交于两点 M 、 N ，

$\therefore MN$ 是 AC 的垂直平分线，

$\therefore AD = CD$ ， $AE = CE$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle ACD$ ， $\angle CAE = \angle ACE$ ，

$\because CE // AB$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle ACE$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle CAE$ ，

$\therefore CD // AE$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是菱形；

$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 2$ ， $OD = OE$ ， $AC \perp DE$ ，

$\because \angle ACB = 90°$ ，

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90°$， $\angle CAB + \angle B = 90°$ ，

$\therefore \angle B = \angle BCD$

$\therefore CD = BD$

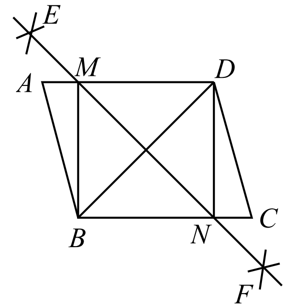
$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5$ ，

$\therefore$ 菱形 $ADCE$ 的周长 $= 4AD = 10$.

故选： A .

小试牛刀

1．如图，BD 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线，按以下步骤作图：①分别以点 B 和点 D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧，两弧相交于 E，F 两点；②作直线 EF，分别交 AD，BC 于点 M，N，连接 BM，DN，若 $BD=8$，$MN=6$，则平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上的高为__________.



典例 2

1．如图 1，点 F 从菱形 $ABCD$ 的顶点 A 出发，沿 $A\to D\to B$ 以 1cm/s 的速度匀速运动到点 B，图 2 是点 F 运动时，$\triangle FBC$ 的面积 $y(\text{cm}^2)$ 随之间 $x(\text{s})$ 变化的关系图像，则 a 的值为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．2　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$\frac{5}{2}$

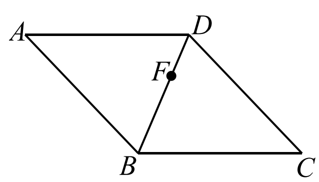


图 1

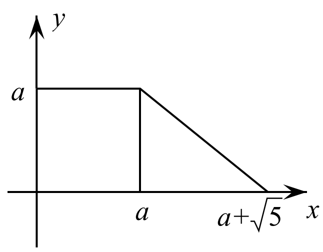


图 2

答案

D

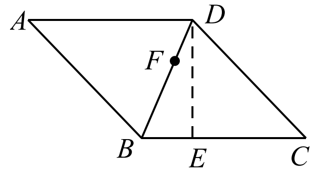
解析

解：过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E

由图象可知，点 F 由点 A 到点 D 用时为 as，$\triangle FBC$ 的面积为 $a\text{cm}^2$.

$\therefore AD=a$

$\therefore \frac{1}{2}DE \bullet AD=a$



$\therefore DE=2$

当点 F 从 D 到 B 时，用 $\sqrt{5}$s

$\therefore BD=\sqrt{5}$

Rt△DBE 中，

$BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$

$\because$四边形$ABCD$是菱形

$\therefore EC=a-1$， $DC=a$

Rt△DEC 中，

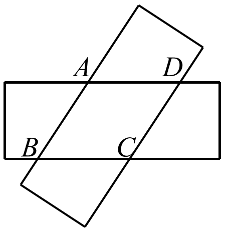
$a^2=2^2+(a-1)^2$

解得 $a=\frac{5}{2}$

故选： D．

2．如图，由两个长为 9，宽为 3 的全等矩形叠合而得到四边形 $ABCD$，则四边形 $ABCD$ 面积的最大值是（　　）

A．15　　B．16　　C．19　　D．20



答案

A

解析

解：如图 1，作 $AE \perp BC$ 于 E， $AF \perp CD$ 于 F，

$\because AD // BC$， $AB // CD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\because$ 两个矩形的宽都是 3，

$\therefore AE = AF = 3$，

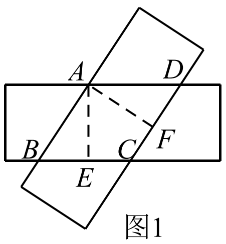


图1

$\because S_{四边形ABCD} = AE \cdot BC = AF \cdot CD$，

$\therefore BC = CD$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

如图 2，当菱形的一条对角线为矩形的对角线时，四边形 $ABCD$ 的面积最大，

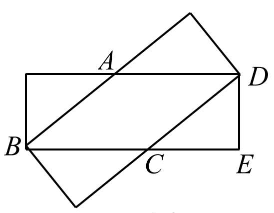


图2

设 $CD = BC = x$， 则 $CE = 9 - x$，

$\because DC^2 = CE^2 + DE^2$，

$\therefore x^2 = (9 - x)^2 + 3^2$，

解得 $x = 5$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最大值是： $5 \times 3 = 15$.

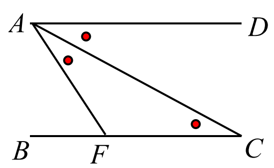
故选： A .

总结

特殊平行四边形的相关计算，除了掌握特殊平行四边形的性质与基本图形以外，还要掌握：

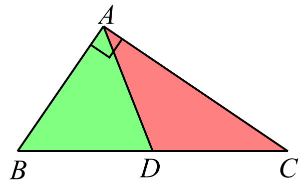
（1）基本结构：

①角平分线+平行线→等腰三角形；



②直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形；

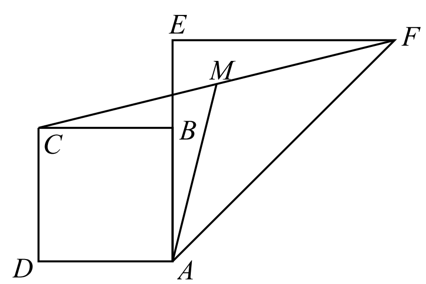


（2）线段长的计算方法：①勾股定理；②等面积法；③相似三角形.

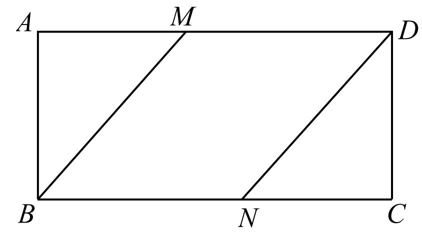
小试牛刀

1．如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，延长 AB 至点 E，使得 $BE=1$，$EF\perp AE$，$EF=AE$，分别连接 AF、CF，M 为 CF 的中点，则 AM 的长为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{26}}{2}$



2．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=2AB$，点 M、N 分别在边 AD、BC 上，连接 BM、DN．若四边形 $MBND$ 是菱形，则 $\frac{AM}{MD}$ 等于（　　）



A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

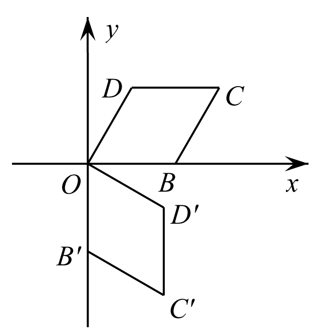
考点 2　规律探究

知识小贴士

规律探究型问题，一般根据题目中的操作方法求几个在特殊情形下的结果，从求解过程中寻找方法的本质或规律．

典例

1．如图，在菱形 $OBCD$ 中，$OB=1$，相邻两内角之比为$1:2$，将菱形 $OBCD$ 绕顶点 O 顺时针旋转 $90°$，得到菱形 $OB'C'D'$ 视为一次旋转，则菱形旋转 45 次后点 C 的坐标为________．

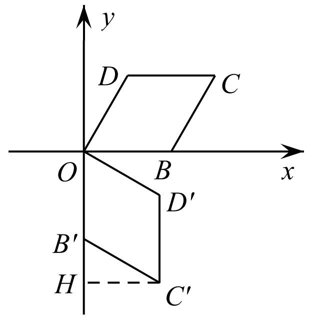


答案

$(\frac{\sqrt{3}}{2}，-\frac{3}{2})$

解析

解：过C'作$C'H\perp y$轴于点H，如图所示：



$\because$四边形$OBCD$是菱形，相邻两内角之比为$1:2$，

$\therefore \angle C=\angle BOD=60^\circ$，$\angle D=\angle OBC=120^\circ$.

根据旋转性质可得$\angle OB'C'=120^\circ$，

$\therefore \angle C'B'H=60^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle C'B'H$中，$B'C'=1$，

$\therefore B'H=\frac{1}{2}B'C=\frac{1}{2}$，$C'H=\sqrt{3}B'H=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore OH=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

$\therefore C'$坐标为$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$，

$\because 360^\circ\div 90^\circ=4$，

$\therefore$菱形4次旋转一周，4次一个循环，

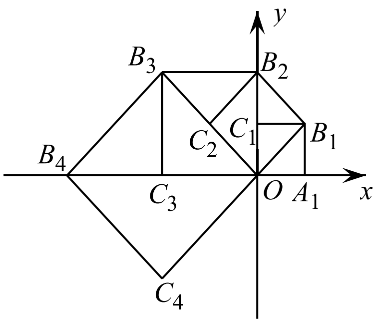
$\because 45\div 4=11\ldots\ldots 1$，

$\therefore$菱形旋转45次后点C与点C'重合，坐标为$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$；

故答案为：$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$.

2．如图，在平面直角坐标系中，边长为1的正方形$OA_1B_1C_1$的两边在坐标轴上，以它的对角线OB_1为边作正方形$OB_1B_2C_2$，再以正方形$OB_1B_2C_2$的对角线OB_2为边作正方形$OB_2B_3C_3$，以此类推…，则正方形$OB_{2017}B_{2018}C_{2018}$的顶点$B_{2018}$的坐标是（　　）

A．$(2^{1009}, 0)$　　B．$(0, 2^{1009})$　　C．$(2^{1008}, 0)$　　D．$(0, 2^{1008})$



答案

B

解析

解：$\because$ 正方形 $OA_1B_1C_1$ 边长为 1，

$\therefore OB_1=\sqrt{2}$，

$\because$ 正方形 $OB_1B_2C_2$ 是正方形 $OA_1B_1C_1$ 的对角线 OB_1 为边，

$\therefore OB_2=2$，

$\therefore B_2$ 点坐标为 $(0,2)$，

同理可知 $OB_3=2\sqrt{2}$，

$\therefore B_3$ 点坐标为 $(-2,2)$，

同理可知 $OB_4=4$， B_4 点坐标为 $(-4,0)$，

B_5 点坐标为 $(-4,-4)$， B_6 点坐标为 $(0,-8)$，

$B_7(8,-8)$， $B_8(16,0)$

$B_9(16,16)$， $B_{10}(0,32)$，

由规律可以发现，每经过 8 次作图后，点的坐标符号与第一次坐标符号相同，每次正方形的边长变为原来的 $\sqrt{2}$ 倍，

$\because 2018\div 8=252\ldots\ldots 2$

$\therefore B_{2018}$ 的纵横坐标符号与点 B_2 的相同，横坐标为 0，纵坐标是正值，

$\therefore B_{2018}$ 的坐标为 $(0,2^{1009})$．

故答案为：B．

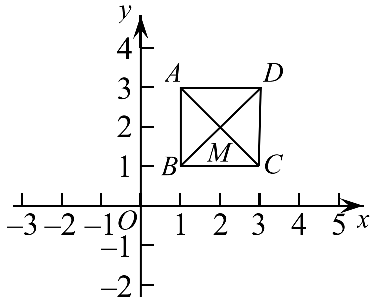
总结

1．数的规律：（1）标序号；（2）对比变化量；（3）写成相同结构，找通项；

2．周期规律：（1）确定周期；（2）确定余数；（3）根据余数确定在周期中的位置．

小试牛刀

1．如图，已知正方形 $ABCD$，顶点 $A(1, 3)$、$B(1, 1)$、$C(3, 1)$．规定“把正方形 $ABCD$ 先沿 x 轴翻折，再向左平移 1 个单位”为一次变换，如此这样，连续经过 2014 次变换后，正方形 $ABCD$ 的对角线交点 M 的坐标变为（　　）



A．$(-2012, 2)$　　B．$(-2012, -2)$　　C．$(-2013, -2)$　　D．$(-2013, 2)$

考点 3 几何综合—多结论类

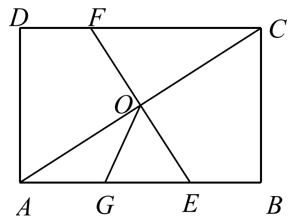
知识小贴士

多结论类题多以特殊平行四边形为背景，结合等腰三角形的性质与判定、直角三角形的性质与判定、全等三角形的性质与判定、三角形的面积等知识进行综合考查．

典例

1．如图，在矩形 $ABCD$ 中，O 为 AC 的中点，EF 过 O 点且 $EF\perp AC$ 分别交 DC 于 F，交 AB 于 E，点 G 是 AE 的中点，且 $\angle AOG=30^\circ$，则下列结论：（1）$DC=3OG$；（2）$OG=\frac{1}{2}BC$；（3）$\triangle OGE$ 是等边三角形；（4）$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{6}S_{四边形ABCD}$．其中正确的个数为（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个



答案

C

解析

解：$\because EF\perp AC$，点 G 是 AE 中点，

$\therefore OG=AG=GE=\frac{1}{2}AE$，

$\because \angle AOG=30^\circ$，

$\therefore \angle OAG=\angle AOG=30^\circ$，

$\angle GOE=90^\circ-\angle AOG=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，

$\therefore \triangle OGE$ 是等边三角形，故（3）正确；

设 $AE=2a$，则 $OE=OG=a$，

由勾股定理得，$AO=\sqrt{AE^2-OE^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$，

$\because O$ 为 AC 中点，

$\therefore AC=2AO=2\sqrt{3}a$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}a=\sqrt{3}a$，

在Rt△ABC中，由勾股定理得，$AB=\sqrt{(2\sqrt{3}a)^2-(\sqrt{3}a)^2}=3a$，

$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore CD=AB=3a$，

$\therefore DC=3OG$，故（1）正确；

$\because OG=a$，$\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$\therefore BC\neq\frac{1}{2}BC$，故（2）错误；

$\because S_{\Delta AOE}=\frac{1}{2}a\bullet\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，

$S_{ABCD}=3a\bullet\sqrt{3}a=3\sqrt{3}a^2$，

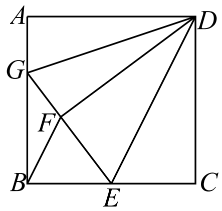
$\therefore S_{\triangle AOE}=\frac{1}{6}S_{四边形ABCD}$，故（4）正确；

综上所述，结论正确是（1）（3）（4）共3个.

故选：C .

2．如图，已知正方形$ABCD$的边长为12，$BE=EC$，将正方形边CD沿DE折叠到DF，延长EF交AB于G，连接DG，现在有如下4个结论：①$\triangle ADG\cong\triangle FDG$；②$GB=2AG$；③$\angle GDE=45°$；④$DG=DE$．在以上4个结论中，正确的有（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4



答案

C

解析

解：由折叠可知，$DF=DC=DA$，$\angle DFE=\angle C=90°$，

$\therefore\angle DFG=\angle A=90°$，

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle FDG$，①正确；

$\because$ 正方形边长是 12，

$\therefore BE = EC = EF = 6$，

设 $AG = FG = x$，则 $EG = x + 6$，$BG = 12 - x$，

由勾股定理得：$EG^2 = BE^2 + BG^2$，

即：$(x+6)^2 = 6^2 + (12-x)^2$，

解得：$x = 4$

$\therefore AG = GF = 4$，$BG = 8$，

$\therefore BG = 2AG$，②正确；

$\because \triangle ADG \cong \triangle FDG$，

$\therefore \angle ADG = \angle FDG$，

由折叠可得，$\angle CDE = \angle FDE$，

$\therefore \angle GDE = \angle GDF + \angle EDF = \dfrac{1}{2}\angle ADC = 45^\circ$，故③正确；

$\because AG = 4$，$AD = 12$，$CE = 6$，$CD = 12$，

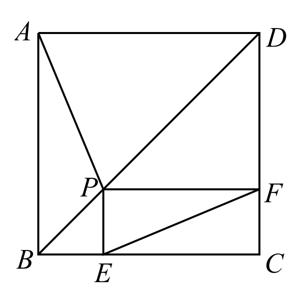
$\therefore DG = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160}$，$DE = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180}$，

$\therefore DG < DE$，故④错误；

故选：C．

小试牛刀

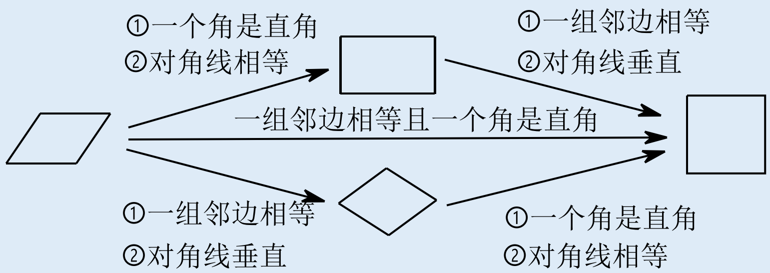
1．如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点（点 P 不与点 B、D 重合），$PE \perp BC$ 于点 E，$PF \perp CD$ 于点 F，连接 EF．给出下列五个结论① $AP = EF$；② $AP \perp EF$；③仅有当 $\angle DAP = 45^\circ$ 或 67.5° 时，$\triangle APD$ 是等腰三角形；④ $\angle PFE = \angle BAP$；⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}PD = EC$，其中有正确的有（　　）



A．2　　B．3　　C．4　　D．5

考点 4 特殊平行四边形的性质与判定

知识小贴士

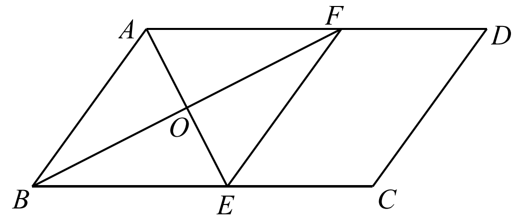


典例

1．已知，如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，BF 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 F，$AE \perp BF$ 于点 O，交 BC 于点 E，连接 EF．

（1）求证：四边形 $ABEF$ 是菱形；

（2）若 $AE = 10$，$BF = 24$，$CE = 7$，求四边形 $ABCD$ 的面积.



解析

（1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AD // BC$

$\therefore \angle CBF = \angle AFB$

$\because BF$平分$\angle ABC$

$\therefore \angle CBF = \angle ABF$

$\therefore \angle ABF = \angle AFB$

$\therefore AB = AF$

$\because BF$平分$\angle ABC$，$AE \perp BF$

可证 $\triangle AOB \cong \triangle EOB$

$\therefore AB = BE$

$\therefore AF = BE$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形

$\because AB = AF$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形

（2）解：作 $FG \perp BC$ 于 G，

$\because$ 四边形 $ABEF$ 是菱形，$AE = 10$，$BF = 24$

$\therefore OE = \frac{1}{2}AE = 5$，$OB = \frac{1}{2}BF = 12$

$\because AE \perp BF$

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEO$ 中，$BE = 13$

$\because S_{菱形} = \frac{1}{2}AE \bullet BF = BE \bullet FG$

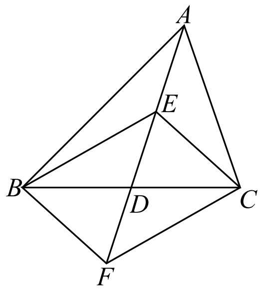
$\therefore FG = \frac{120}{13}$

$\therefore S_{平行四边形ABCD} = BC \cdot FG = \frac{2400}{13}$

2．在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边的中点，E、F 分别在 AD 及其延长线上，$CE /\!/ BF$，连接 BE、CF.

（1）求证：$\triangle BDF \cong \triangle CDE$；

（2）若 $DE = \frac{1}{2}BC$，试判断四边形 $BFCE$ 是怎样的四边形，并证明你的结论.



解析

（1）证明：$\because CE /\!/ BF$

$\therefore \angle DFB = \angle CEF$，$\angle FBD = \angle ECD$

$\because D$ 是 BC 的中点

$\therefore BD = CD$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDE$

（2）四边形 $BFCE$ 是矩形，理由如下：

∵△BDF≌△CDE

∴$DE=DF$

∵$BD=DC$

∴四边形 $BFCE$ 是平行四边形

∵$DE=DF$，$BD=DC$

又∵ $DE=\frac{1}{2}BC$

∴$EF=BC$

∴平行四边形 $BFCE$ 是矩形.

总结

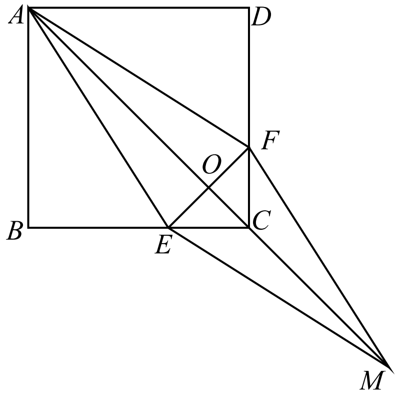
特殊平行四边形的判定，要分析已有条件，再对比判定方法，选择最优的判定方法，证明所缺条件.

小试牛刀

1. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC 和 CD 上，$AE=AF$

（1）求证：$BE=DF$

（2）连接 AC 交于 EF 于点 O，延长 OC 至点 M，使 $OM=OA$，连接 EM、FM. 判断四边形 $AEMF$ 是什么特殊四边形？并证明你的结论.



考点 5　特殊平行四边形存在性一

知识小贴士

1．动点问题的一般思路：

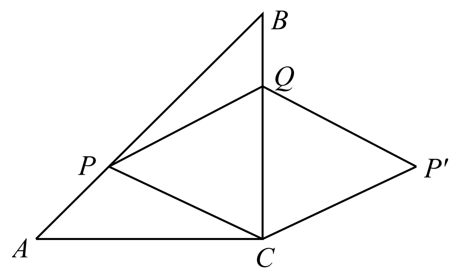
（1）分析运动路径，确定是否分类；

（2）画图，化动为静；

（3）根据 $s=vt$ 表示相关线段

典例

1．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=6\text{cm}$，点 P 从点 A 出发，沿 AB 方向以每秒 $\sqrt{2}\text{cm}$ 的速度向终点 B 运动；同时，动点 Q 从点 B 出发沿 BC 方向以每秒 1cm 的速度向终点 C 运动，将△PQC 沿 BC 翻折，点 P 的对应点为点 P'，设 Q 点运动的时间为 t 秒，若四边形 $QPCP'$ 为菱形，则 t 的值为__________.

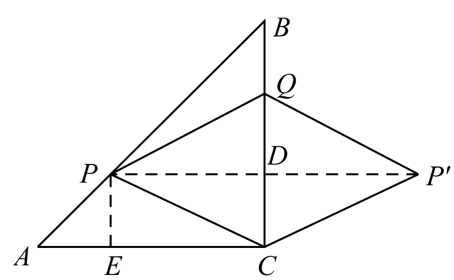


答案

2

解析

解：解：连 PP'交BC 于 D，$PE\perp AC$ 于 E，如图，



∵ 四边形 $PCP'Q$ 是菱形

∴ $PD\perp BC$，$QD=DC$

$AP=\sqrt{2}t$，$BQ=t\text{cm}$，$(0\leqslant t<6)$

∵ $\angle C=90°$，$AC=BC=6\text{cm}$，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，

$\therefore \angle A = \angle B = 45°$，

$\therefore \triangle APE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore PE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AP = t\text{cm}$，

$\because$ 四边形 $PECD$ 为矩形，

$\therefore PE = DC = t$，

$\therefore QD = CD = t$，

$\therefore 3t = 6$，

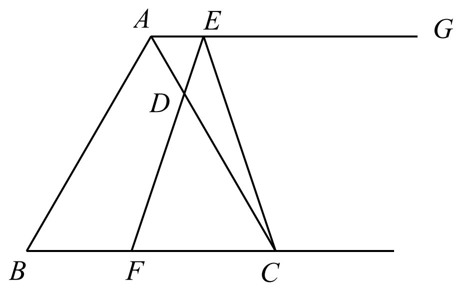
$\therefore t$ 的值为 2．

2．如图所示，在等边三角形 ABC 中，$BC = 8\text{cm}$，射线 $AG /\!/ BC$，点 E 从点 A 出发沿射线 AG 以 1cm/s 的速度运动，同时点 F 从点 B 出发沿射线 BC 以 2cm/s 的速度运动，设运动时间为 $t(\text{s})$．

（1）连接 EF，当 EF 经过 AC 边的中点 D 时，求证：四边形 $AFCE$ 是平行四边形；

（2）填空：①当 t 为__________时，四边形 $ACFE$ 是菱形；

②当 t 为__________时，$\triangle ACE$ 的面积是 $\triangle ACF$ 的面积的两倍．



解析

（1）证明：$\because AG /\!/ BC$，

$\therefore \angle EAD = \angle DCF$，$\angle AED = \angle DFC$，

$\because D$ 为 AC 的中点，

$\therefore AD = CD$，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$\because \begin{cases} \angle EAD = \angle DCF \\ \angle AED = \angle DFC \\ AD = CD \end{cases}$，

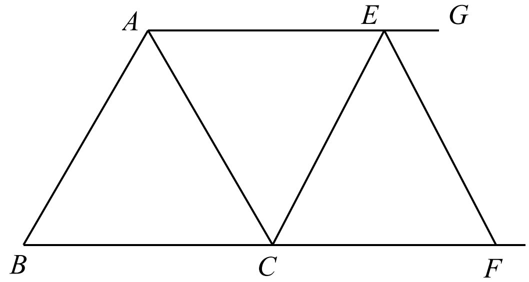
$\therefore$ △ADE≌△CDF（AAS）；

$\therefore$ $DE = DF$

$\therefore$四边形 $AFCE$ 是平行四边形

（2）①8；

分析：把四边形 $ACFE$ 是菱形当作已知条件，由菱形的四边相等可知：$AE = AC$，则 t=8．



②$t = \frac{16}{5}$ 或 $\frac{16}{3}$

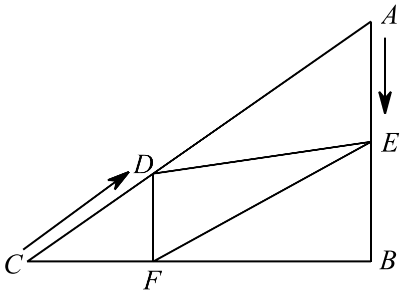
小试牛刀

1．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle B = 90°$，$AC = 60\text{cm}$，$\angle A = 60°$，点 D 从点 C 出发沿 CA 方向以 4cm/秒的速度向点 A 匀速运动，同时点 E 从点 A 出发沿 AB 方向以 2cm/秒的速度向点 B 匀速运动，当其中一个点到达终点时，另一个点也随之停止运动．设点 D、E 运动的时间是 t 秒（$0 < t \leq 15$）．过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F，连接 DE，EF．

（1）求证：$AE=DF$；

（2）四边形 $AEFD$ 能够成为菱形吗？如果能，求出 t 的值，如果不能，说明理由；

（3）在运动过程中，四边形 $BEDF$ 能否为正方形？若能，求出 t 的值；若不能，请说明理由．



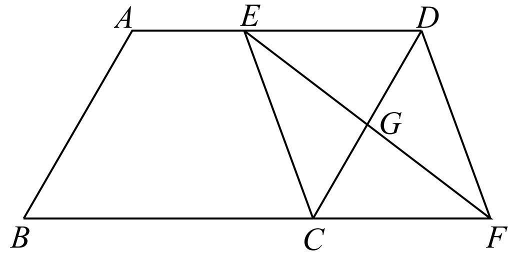
典例 2

1．如图，平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=6\text{cm}$，$BC=8\text{cm}$，$\angle B=60°$，G 是 CD 的中点，E 是边 AD 上的动点，EG 的延长线与 BC 的延长线交于点 F，连接 CE，DF.

（1）求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

（2）①AE=________时，四边形 $CEDF$ 是矩形；

②AE=________时，四边形 $CEDF$ 是菱形.



解析

（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形

∴ $AD /\!/ BC$

∴ $\angle DEF=\angle CFE$，$\angle EDC=\angle FCD$

∵ G 是 CD 的中点

∴ $GD=GC$

∴ $\triangle GED \cong \triangle GFC$

∴ $DE=CF$

又∵ $DE /\!/ CF$

∴四边形 $CEDF$ 是平行四边形

（2）①当 $AE=5$ 时，四边形 $CEDF$ 是矩形.

②当 $AE=2$ 时，四边形 $CEDF$ 是菱形.

总结

特殊平行四边形的存在性一般方法：

方法一：反客为主，把特殊平行四边形作为已知条件，根据特殊平行四边形的性质得到所求；

方法二：分析特殊平行四边形已有条件，把所缺条件作为已知条件.

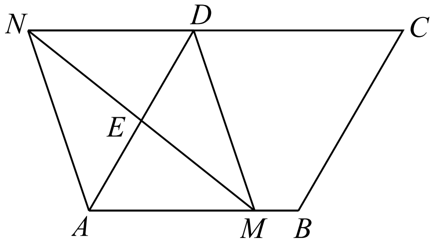
小试牛刀

1．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=20$，$\angle DAB=60°$，点 E 是 AD 边的中点，点 M 是 AB 边上一动点（不与点 A 重合），延长 ME 交射线 CD 于点 N，连接 MD，AN.

（1）求证：四边形 $AMDN$ 是平行四边形；

（2）填空：①当 AM 的值为__________时，四边形 $AMDN$ 是矩形；

②当 AM 的值为__________时，四边形 $AMDN$ 是菱形.

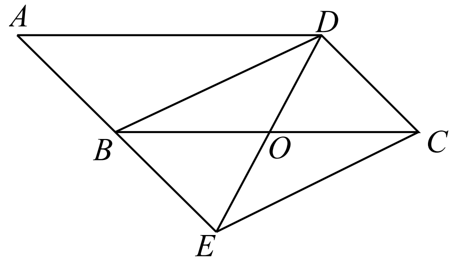


2．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 O 是边 BC 的中点，连接 DO 并延长交 AB 的延长线于点 E，连接 BD，EC.

（1）求证：四边形 $BECD$ 是平行四边形；

（2）当 $\angle BOD=$__________°时，四边形 $BECD$ 是菱形；

（3）若 $\angle A=50°$，则当 $\angle BOD=$__________°时，四边形 $BECD$ 是矩形.



考点 6 特殊平行四边形存在性二

知识小贴士

1．平行四边形存在性问题：

（1）三定一动：

①找点位置：连接定点出现三条定线段．定线段分别作为平行四边形的对角线；

②求点坐标：利用一组对边平行且相等，借助平移确定点坐标．

（2）两定两动：

①找点位置：连接定线段，若定线段作为平行四边形的边，利用一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，考虑通过平移确定点的位置；若定线段作为平行四边形的对角线，利用对角线互相平分的四边形是平行四边形，则绕定线段中点旋转确定点的位置．

②求点坐标：

设：设出要求点坐标；

传：定线段作边，借助一组对边平行且相等传到另一动点坐标；定线段作对角线，借助中点坐标传到另一动点坐标．

代：代入动点所在直线表达式．

2．菱形存在性问题：

（1）可考虑按平行四边形的处理方法，再加上邻边相等或对角线垂直考虑，解决问题；

（2）也可转化为等腰三角形存在性问题来解决．

Tips：选择哪三个点构成等腰三角形的原则：选择定点和有运动轨迹的点．

3．矩形存在性问题：

（1）可考虑按平行四边形的处理方法，再加上内角为90°或对角线相等考虑，解决问题；

（2）也可转化为直角三角形存在性问题来解决．

4．正方形存在性问题：

（1）可考虑结合矩形菱形相关性质考虑，解决问题；

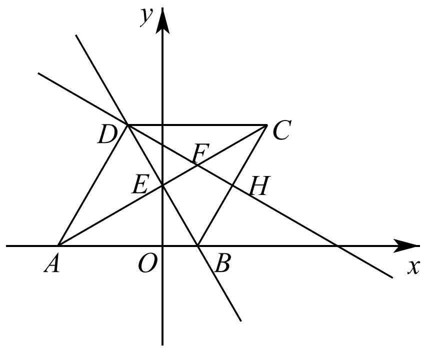
（2）也可转化为等腰直角三角形存在性问题来解决．

典例

1. 菱形 $ABCD$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，对角线 AC 与 BD 的交点 E 恰好在 y 轴上，过点 D 和 BC 的中点 H 的直线交 AC 于点 F，线段 DE、CD 的长是方程 $x^2-9x+18=0$ 的两根，请解答下列问题：

（1）求点 D 的坐标；

（2）点 Q 在直线 BD 上，在直线 DH 上是否存在点 P，使以点 F、C、P、Q 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



解析

解：（1）$x^2-9x+18=0$

$(x-3)(x-6)=0$

$x_1=3$， $x_2=6$

$\because CD>DE$

$\therefore CD=6$， $DE=3$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$\therefore AC\perp BD$， $EC=\dfrac{1}{2}AC, DE=\dfrac{1}{2}DB$

$\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中， $EC=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \angle DCA=30°$， $\angle EDC=60°$， $AC=6\sqrt{3}$

$\mathrm{Rt}\triangle DEM$ 中， $\angle EDC=60°$， $DE=3$

$\therefore DM=\dfrac{3}{2}$， $DB=6$

$\because OM\perp AB$

$\therefore S_{菱形ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=CD\cdot OM$

$\therefore \frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 6=6OM$， $OM=3\sqrt{3}$，

$\therefore D(-\frac{3}{2}, 3\sqrt{3})$；

（2）$\because D(-\frac{3}{2}, 3\sqrt{3})$ ， $B(\frac{3}{2}, 0)$

$\therefore y_{BD}=-\sqrt{3}x+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\because D(-\frac{3}{2}, 3\sqrt{3})$ ， $H(\frac{3}{2}, 2\sqrt{3})$

$\therefore y_{HD}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{5}{2}\sqrt{3}$

设 $P(x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{5}{2}\sqrt{3})$

①当 PF 为平行四边形的对角线时

$\therefore PF$ 与 CQ 互相平分

$\therefore Q(x-3, -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3}{2}\sqrt{3})$

$\because Q$在直线DB上

$\therefore -\sqrt{3}(x-3)+\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

解得 $x=\frac{9}{2}$

$\therefore P(\frac{9}{2}, \sqrt{3})$

②当 PC 为平行四边形的对角线时

$\therefore PC$ 与 FQ 互相平分

$\therefore Q(x+3, -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{7}{2}\sqrt{3})$

$\because Q$在直线DB上

$\therefore -\sqrt{3}(x+3)+\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{7}{2}\sqrt{3}$

解得 $x=-\frac{15}{2}$

$\therefore P(-\frac{15}{2}, 5\sqrt{3})$ ；

③当 CF 为平行四边形的对角线时

$\therefore CF$ 与 PQ 互相平分

$\therefore Q(6-x\text{，}\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{5}{2}\sqrt{3})$

$\because Q$在直线DB上

$\therefore -\sqrt{3}(6-x)+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

解得 $x=\dfrac{21}{2}$

$\therefore P(\dfrac{21}{2}\text{，}-\sqrt{3})$

综上所述，点 P 的坐标为：$(\dfrac{9}{2}\text{，}\sqrt{3})$ 或 $(-\dfrac{15}{2}\text{，}5\sqrt{3})$ 或 $(\dfrac{21}{2}\text{，}-\sqrt{3})$．

2．如图 1，平面直角坐标系中，B、C 两点的坐标分别为 $B(0\text{，}3)$ 和 $C(0\text{，}-\dfrac{9}{2})$，点 A 在 x 轴正半轴上，且满足 $\angle BAO=30^\circ$．

（1）过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，交 AO 于点 F，点 G 为线段 OC 上一动点，连接 GF，将 $\triangle OFG$ 沿 FG 翻折使点 O 落在平面内的点 O' 处，连接 $O'C$，求线段 OF 的长以及线段 $O'C$ 的最小值；

（2）如图 2，点 D 的坐标为 $D(-1\text{，}0)$，将 $\triangle BDC$ 绕点 B 顺时针旋转，使得 $BC\perp AB$ 于点 B，将旋转后的 $\triangle BDC$ 沿直线 AB 平移，平移中的 $\triangle BDC$ 记为 $\triangle B'D'C'$，设直线 $B'C'$ 与 x 轴交于点 M，N 为平面内任意一点，当以 B'、D'、M、N 为顶点的四边形是菱形时，求点 M 的坐标．

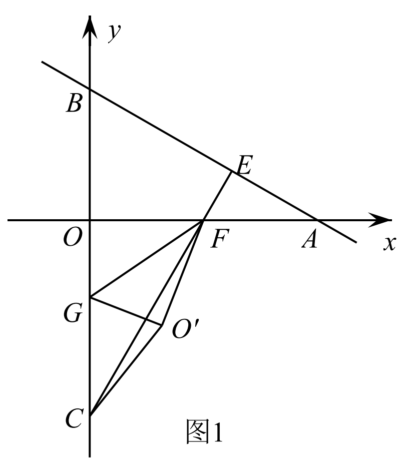


图1

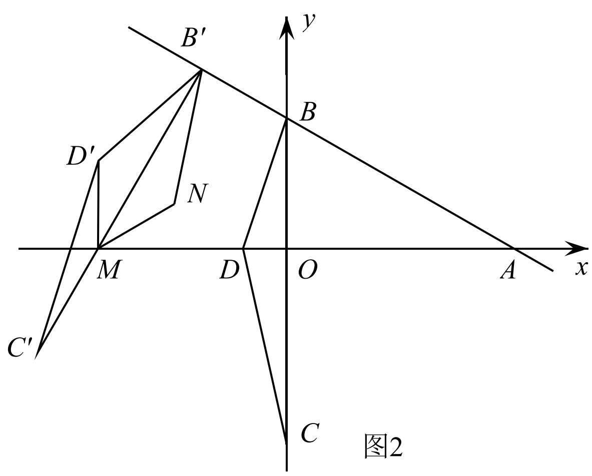


图2

解析

解：（1）如图 1 中，

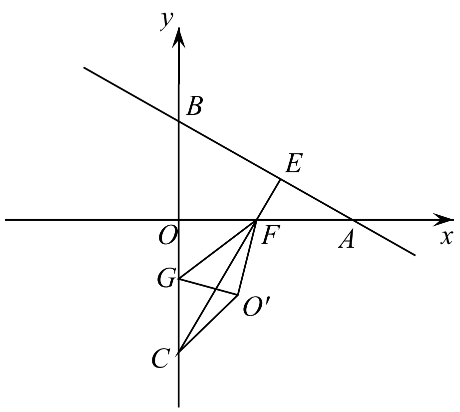


图 1

$\because \angle AOB=90^\circ$，$\angle OAB=30^\circ$，

$\therefore \angle CBE=60^\circ$，

$\because CE\perp AB$，

$\therefore \angle CEB=90^\circ$，$\angle BCE=30^\circ$，

$\because C(0，-\dfrac{9}{2})$，

$\therefore OC=\dfrac{9}{2}$，$OF=OC\bullet\tan 30^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$CF=2OF=3\sqrt{3}$，

由翻折可知：$FO'=FO=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore CO'\geqslant CF-O'F$，

$\therefore CO'\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 线段 $O'C$ 的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

（2）$\because$ 四边形$MND'B'$是菱形

$\therefore \triangle MD'B'$ 是等腰三角形

①如图 2（1）中，当 $B'D'=D'M$ 时

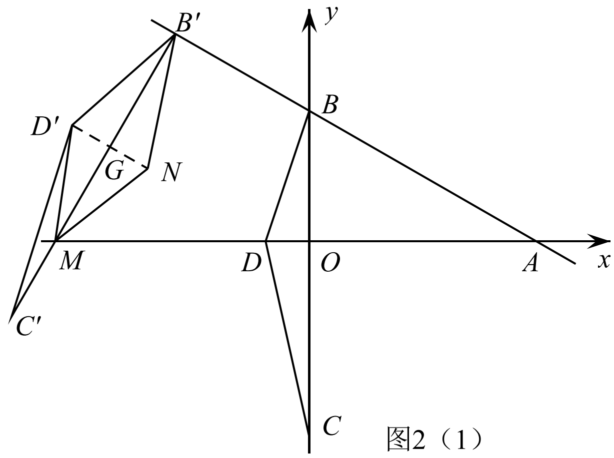


图2（1）

连 $D'N$ 交 $B'M$ 于 G

则 $D'G \perp B'M$

$\therefore B'M=2B'G$

可证 $\triangle B'D'G \cong \triangle BDO$

$\therefore B'G=BO=3$

$\therefore B'M=2B'G=6$

在 $Rt\triangle AMB'$ 中，$AM=2B'M=12$，

$\therefore M(3\sqrt{3}-12，0)$．

②如图 2（2）中，当 $B'M=D'M$ 时

$D'B'$ 交 NM 于 H

则 $D'B' \perp NM$

$\therefore B'D'=2B'H$

可证 $\triangle B'HM \backsim \triangle BDO$

$\therefore \dfrac{B'H}{B'M}=\dfrac{OB}{BD}$

$\therefore B'M=\dfrac{5}{3}$

在 $Rt\triangle AMB'$ 中，$AM=2B'M=\dfrac{10}{3}$，

$\therefore M(3\sqrt{3}-\dfrac{10}{3}，0)$．

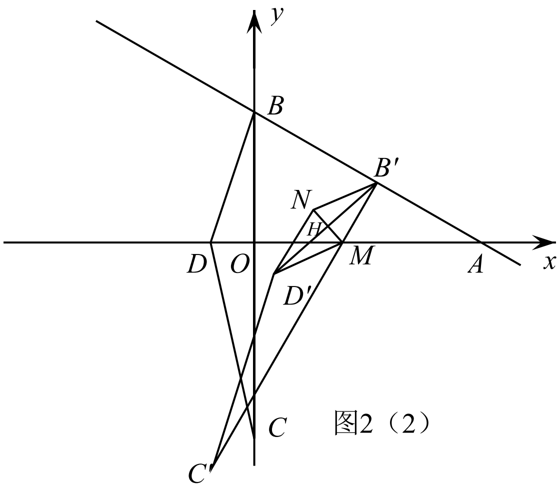


图2（2）

③如图 2（3）（4）中，当 $B'D'=B'M=\sqrt{10}$ 时

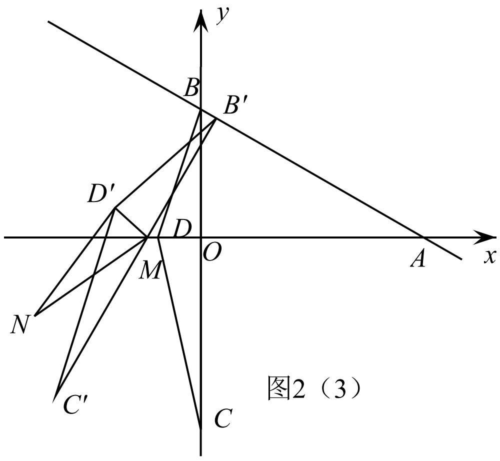


图2（3）

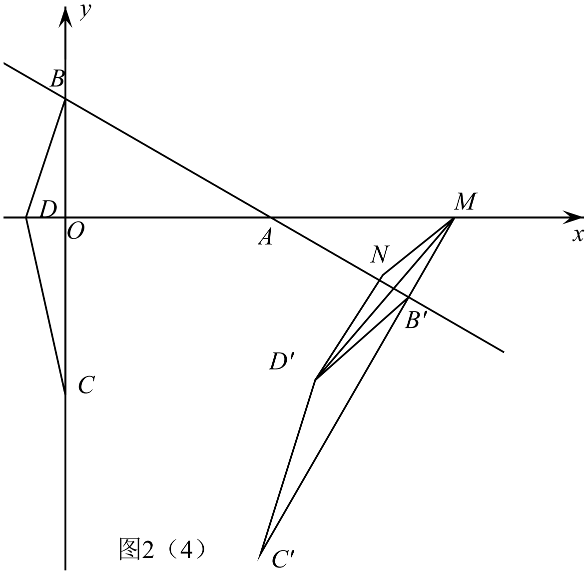


图2（4）

在 Rt△AMB' 中， $AM=2B'M=2\sqrt{10}$，

$\therefore M(3\sqrt{3}\pm 2\sqrt{10},0)$.

综上所述，满足条件的点 M 坐标为 $(3\sqrt{3}-12，0)$ 或 $(3\sqrt{3}-\frac{10}{3}，0)$ 或 $(3\sqrt{3}-2\sqrt{10}，0)$ 或 $(3\sqrt{3}+2\sqrt{10}，0)$.

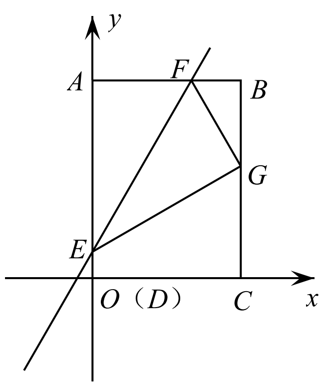
小试牛刀

1．如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，C 点在 x 轴上，A 点在 y 轴上，D 点坐标是(0，0)，B 点坐标是(3，4)，矩形 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，点 A 落在 BC 边上的 G 处，E、F 分别在 AD、AB 上，且 F 点的坐标是(2，4).

（1）求 G 点坐标

（2）求直线 EF 解析式

（3）点 N 在 x 轴上，直线 EF 上是否存在点 M，使以 M、N、F、G 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出 M 点坐标；若不存在，请说明理由.

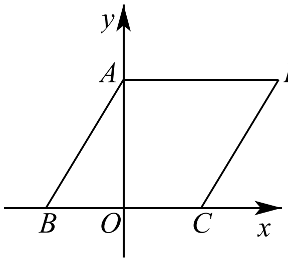


2．如图，在平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AD=6$，若 OA、OB 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2-7x+12=0$ 的两个根，且 $OA>OB$.

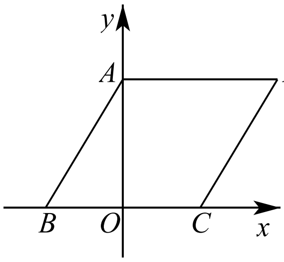
（1）直接写出 A、B 的坐标.

（2）求证：射线 AO 是 $\angle BAC$ 的平分线.

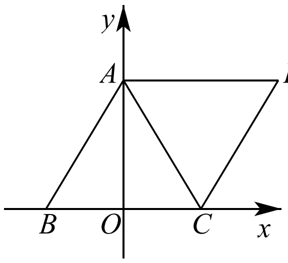
（3）若点 M 在平面直角坐标系内，则在直线 AB 上是否存在点 F，使以 A、C、F、M 为定点的四边形为菱形？若存在，请直接写出 F 点的坐标，若不存在，请说明理由.



图(1)



图(2)



图(3)

参考答案

考点 1

典例 1

1．$\frac{24}{5}$

典例 2

1．D

2．C

考点 2

1．A

考点 3

1．D

考点 4

1．（1）由 Rt$\triangle ADF$≌Rt$\triangle ABE$ 得证；

2．菱形．

考点 5

典例 1

1．（1）证明：$\because \angle B=90°$，$\angle A=60°$

$\therefore \angle C=30°$

$\because DF\perp BC$，$CD=4t$

$\therefore \angle DFC=\angle B=90°$，$DF=2t$

$\therefore DF /\!/ AB$，$DF=AE$

（2）由（1）可知：$DF /\!/ AB$，$DF=AE$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形

当 $AD=AE$ 即 $60-4t=2t$ 时，平行四边形 $AEFD$ 是菱形

$\therefore t=10$ 时，四边形 $AEFD$ 是菱形；

（3）由（1）可知：$DF /\!/ AB$

当 $FD=BE$ 即 $30-2t=2t$ 时，四边形 $AEFD$ 是平行四边形

$\therefore t=\dfrac{15}{2}$ 时，四边形 $AEFD$ 是平行四边形；

当 $t=\dfrac{15}{2}$ 时，$BE=15$，$BF=15\sqrt{3}$，则四边形 $BEDF$ 不可能为正方形

典例 2

1.（1）由 $ND/\!/AM$，E 为 AD 的中点可证：$\triangle AED\cong\triangle MEA$，得 $NE=ME$，根据对角线互相平分的四边形是平行四边形得证；

（2）①10；②20；

2.（1）由 $CD/\!/BE$，O 为 BC 的中点可证：$\triangle BEO\cong\triangle CDO$，得 $OD=OE$，根据对角线互相平分的四边形是平行四边形得证；

（2）①90；②100；

考点 6

1.（1）$G(3,4-2\sqrt{3})$；

（2）$y=\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}$；

（3）$(1-\dfrac{4}{3}\sqrt{3},-\sqrt{3})$；$(1+\dfrac{4}{3}\sqrt{3},8-\sqrt{3})$；$(3-\dfrac{4}{3}\sqrt{3},\sqrt{3})$.

2.（1）$A(0,4)$；$B(-3,0)$；

（2）略；

（3）$(-3,0)$；$(3,8)$；$(-\dfrac{42}{25},\dfrac{44}{25})$；$(-\dfrac{75}{14},-\dfrac{22}{7})$.

第二篇 一元二次方程

考点 1 一元二次方程的定义

知识小贴士

1．定义：只含有一个未知数，且可化为$ax^2+bx+c=0$（a，b，c为常数，且$a\neq 0$）的形式的整式方程称为一元二次方程.

典例

1．已知关于x的方程$(m-1)x^{m^2+1}+2x-3=0$是一元二次方程，则m的值为____________.

答案

-1

解析

解：由一元二次方程的定义得：$m^2+1=2$，且$m-1\neq 0$，

解得：$m=-1$.

故答案为：-1.

2．若关于x的方程$(m^2-1)x^2+(m+1)x+3=0$是一元二次方程，则m____________；若是一元一次方程，则m____________.

答案

$\neq \pm 1$；$=1$

解析

解：若原方程是一元二次方程，则$m^2-1\neq 0$，即$m\neq \pm 1$；

若原方程是一元一次方程，则$\begin{cases} m^2-1=0 \\ m+1\neq 0 \end{cases}$解得$m=1$.

总结

判断一元二次方程的时候，严格按照一元二次方程定义进行判断，当二次项系数含有参数时，应注意二次项系数不为零.

小试牛刀

1．已知 $2x^{|m|-2}+3=9$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m=_______.

2．若（$m-1$）$x^{m(m+2)-1}+2mx-1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的值是_______.

考点 2 含参方程根的情况

知识小贴士

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的情况可由 b^2-4ac 来判定．我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式，通常用希腊字母“ Δ ”来表示.

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

典例

1. 若关于 x 的一元二次方程 $(a-2)x^2-2ax+a=6$ 有两个不相等实数根，则 a 的取值范围为(　　)

A．$a>0$　　B．$a>0$ 且 $a\neq 2$　　C．$a>\frac{3}{2}$　　D．$a>\frac{3}{2}$ 且 $a\neq 2$

答案

D.

解析

解：根据题意得 $a-2\neq 0$ 且 $\Delta=(-2a)^2-4(a-2)\times(a-6)>0$，

解得 $a>\frac{3}{2}$ 且 $a\neq 2$.

2．若关于 x 的方程 $kx^2-2x+\frac{1}{4}=0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$k<4$　　B．$k<4$ 且 $k\neq 0$　　C．$k\leqslant 4$　　D．$k\leqslant 4$ 且 $k\neq 0$

答案

C．

解析

解：当 $k\neq 0$ 时，$\Delta=4-4k\times\frac{1}{4}=4-k\geqslant 0$，

$\therefore k\leqslant 4$，

当 $k=0$ 时，也符合题意，

$\therefore k\leqslant 4$，

故选：C．

总结

一元二次方程中，判断根的情况时，使用一元二次方程根的判别式判断根的情况．使用根的判别式判断根的情况时，前提是方程为一元二次方程，当题目中没有明确说明方程为一元二次方程时，由于一元一次方程也有实数根，故应注意进行分类讨论．

小试牛刀

1．若关于 x 的一元二次方程 $mx^2-2x+1=0$ 有两个实数根，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$m\leqslant 1$　　B．$m\leqslant -1$　　C．$m\leqslant 1$ 且 $m\neq 0$　　D．$m\geqslant 1$ 且 $m\neq 0$

2．若关于 x 的方程 $mx^2-2x+3=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是（　　）

A．$m<-\frac{1}{3}$　　B．$m\leqslant\frac{1}{3}$ 且 $m\neq 0$　　C．$m<\frac{1}{3}$ 且 $m\neq 0$　　D．$m>\frac{1}{3}$

考点 3　一元二次方程解法

知识小贴士

1．一元二次方程解法：

①直接开方法；②配方法；③公式法；④因式分解法．

典例

1．用规定的方法解下列方程：

（1）$(2x-1)^2=4$（用直接开平方法）　　（2）$x^2-2x-2=0$（用配方法）

（3）$2x^2-x-15=0$（用因式分解法）　　（4）$2x^2+5(2x+1)=0$（用求根公式法）

解析

解：（1）$\because (2x-1)^2=4$，

$\therefore 2x-1=2$ 或 $2x-1=-2$，

解得 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$；

（2）$\because x^2-2x=2$，

$\therefore x^2-2x+1=2+1$，即 $(x-1)^2=3$，

则 $x-1=\pm\sqrt{3}$，

解得 $x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$；

（3）$\because 2x^2-x-15=0$，

$\therefore (x-3)(2x+5)=0$，

则 $x-3=0$ 或 $2x+5=0$，

解得 $x=3$ 或 $x=-2.5$.

（4）方程整理为一般式，得：$2x^2+10x+5=0$，

$\because a=2$，$b=10$，$c=5$，

$\therefore \Delta=10^2-4\times2\times5=60>0$，

则 $x=\dfrac{-10\pm2\sqrt{15}}{4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{15}}{2}$，

$\therefore x_1=\dfrac{-5+\sqrt{15}}{2}$，$x_2=\dfrac{-5-\sqrt{15}}{2}$.

总结

解法攻略：

①解法的思考顺序：先看能否用因式分解法，再考虑其他方法；

②当方程两端可化为完全平方时，可考虑直接开方法或平方差公式法；

③当一次项系数是二次项系数的偶数倍时，可考虑用配方法；

④十字相乘法需要多加练习，能够熟练使用，当前期经验积累不足时，可判断 b^2-4ac 的值是否为平方数来判断是否能使用十字相乘法.

小试牛刀

1．解方程：

（1）$2x^2-5x+1=0$

（2）$(x+1)(x-2)=4$

（3）$9x^2+6x=8$

（4）$(x-1)^2-3(x-1)=10$.

考点 4 根的判别式

知识小贴士

判断根的情况时，使用根的判别式进行判断；解一元二次方程，用参数表示根，利用根的范围确定参数范围

典例

1．已知关于 x 的方程 $mx^2+(3m+1)x+3=0$．

（1）求证：不论 m 取何值，方程都有实数根；

（2）若方程有两个整数根，求整数 m 的值．

解析

（1）证明：当 $m=0$ 时，原方程可化为 $x+3=0$，方程有实根 $x=-3$；

当 $m\neq 0$ 时，$mx^2+(3m+1)x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程．

$\because \Delta=(3m+1)^2-4m\times 3=9m^2+6m+1-12m=(3m-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ 此方程总有两个实数根．

综上所述，不论 m 取何值，方程都有实数根．

（2）解：$\because (mx+1)(x+3)=0$，

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{m}$，$x_2=-3$．

$\because$ 方程有两个整数根且 m 是整数，

$\therefore m=-1$ 或 $m=1$．

2．已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4\sqrt{5}x+12+m=0$．

（1）若方程的一个根是 $\sqrt{5}$，求 m 的值及方程的另一根；

（2）若方程的两根恰为等腰三角形的两腰，而这个三角形的底边为 m，求 m 的值及这个等腰三角形的周长．

解析

解：（1）$\because x=\sqrt{5}$ 是方程 $x^2-4\sqrt{5}x+12+m=0$ 的一个根，

$\therefore (\sqrt{5})^2-4\sqrt{5}\times\sqrt{5}+12+m=0$，

解得：$m=3$，

则方程为：$x^2-4\sqrt{5}x+15=0$，

解得：$x_1=\sqrt{5}$，$x_2=3\sqrt{5}$．

$\therefore$ 方程的另一根为 $3\sqrt{5}$；

（2）若方程的两根恰为等腰三角形的两腰，则 $\Delta=b^2-4ac=0$，

所以 $\Delta=(-4\sqrt{5})^2-4(12+m)=0$，

解得 $m=8$，

则方程为：$x^2-4\sqrt{5}x+20=0$，

解得 $x_1=x_2=2\sqrt{5}$，

三角形的周长：$4\sqrt{5}+8$．

总结

1．已知含参一元二次方程的一个解时，可以将解带入方程求解参数的值；

2．判断一元二次方程根的情况时，利用根的判别式$\Delta=b^2-4ac$的正负性进行判断，

3．一元二次方程中根含有限制条件时，可以通过解方程，用参数表示方程的根，再通过限制条件计算参数；

4．一元二次方程和等腰三角形结合时，注意方程的根是等腰三角形的腰还是底，进行分类讨论．

小试牛刀

1．关于x的一元二次方程$x^2-(m+3)x+m+2=0$．

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若方程有一个根大于3，求m的取值范围．

2．已知关于x的方程$x^2-(2k+1)x+4(k-\frac{1}{2})=0$．

（1）求证：无论k取何值，此方程总有实数根；

（2）若$x=1$是这个方程的一个根，求k的值和它的另一个根；

（3）若等腰三角形ABC的一边长$a=4$，另两边b、c恰好是这个方程的两个根，求这个等腰三角形的周长是多少？

考点 5 根与系数的关系

知识小贴士

如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个实数根 x_1， x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$， $x_1x_2=\frac{c}{a}$，这种根与系数关系称为韦达定理.

典例

1．在一元二次方程中，有著名的韦达定理：对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，如果方程有两个实数根 x_1， x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$， $x_1 \bullet x_2=\frac{c}{a}$（说明：定理成立的条件 $\Delta\geq 0$）. 比如方程 $2x^2-3x-1=0$ 中，$\Delta=17$，所以该方程有两个不等的实数解. 记方程的两根为 x_1， x_2，那么 $x_1+x_2=\frac{3}{2}$， $x_1 \bullet x_2=-\frac{1}{2}$，请根据阅读材料解答下列各题：

（1）已知方程 $x^2-3x-2=0$ 的两根为 x_1、 x_2，且 $x_1>x_2$，求下列各式的值：

①$x_1^2+x_2^2$；②$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；

（2）已知 x_1， x_2 是一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根.

①是否存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$ 成立？若存在，求 k 的值；若不存在，请说明理由.

②求使 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的实数 k 的整数值.

解析

解：（1）$\because x^2-3x-2=0$， $\Delta=(-3)^2-4\times(-2)=17>0$

$\therefore x_1+x_2=3$， $x_1 \bullet x_2=-2$

①$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1 \bullet x_2=3^2-2\times(-2)=9+4=13$

②$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2}{x_1 \bullet x_2}+\frac{x_1}{x_1 \bullet x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1 \bullet x_2}=-\frac{3}{2}$

（2）$\because$方程有两个实数根，

$\therefore \Delta=(-4k)^2-4 \bullet 4k(k+1)\geq 0$

又$\because k\neq 0$

$\therefore k<0$， $x_1+x_2=1$， $x_1 \bullet x_2=\frac{k+1}{4k}$

①$\because (2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=2x_1^2-5x_1x_2+2x_2^2=2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-9x_1x_2=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2$

$\therefore 2-9 \bullet \frac{k+1}{4k}=-\frac{3}{2}$

解得： $k=\frac{9}{5}$，与$k<0$矛盾

$\therefore$不存在k的值，使$(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$成立.

②$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{1-4 \bullet \frac{k+1}{4k}}{\frac{k+1}{4k}}=\frac{4k-4k-4}{k+1}=\frac{-4}{k+1}$

$\because \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2=\frac{-4}{k+1}$的值为整数

$\therefore k+1=\pm1$或±2或±4

又$\because k<0$

$\therefore k=-2$或-3或-5

总结

一元二次方程中出现两根的和、差、积以及平方和、平方差时，可以使用韦达定理进行计算，不需要进行解方程，注意：使用韦达定理的时候（定理成立的条件$\Delta\geq 0$），可以结合知二求二进行计算或变形， 例： ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$； $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

小试牛刀

1．关于 x 的方程 $(k-1)x^2+2kx=-2$

（1）求证：无论 k 为何值，方程总有实数根．

（2）设 x_1，x_2 是方程的两个根，且 $2x_1x_2+x_1+x_2=2$，求 k 的值．

2．阅读理解，并回答问题：

若 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，则有 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$．即 $ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$，于是 $b=-a(x_1+x_2)$，$c=ax_1x_2$．由此可得一元二次方程的根与系数关系：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$．这就是我们众所周知的韦达定理．

（1）已知 m，n 是方程 $x^2-x-100=0$ 的两个实数根，不解方程求 m^2+n^2 的值；

（2）若 x_1，x_2，x_3 是关于 x 的方程 $x(x-2)^2=t$ 的三个实数根，且 $x_1<x_2<x_3$；

①$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 的值；②求 x_3-x_1 的最大值．

考点6 一元二次方程的应用

知识小贴士

一元二次方程代数类应用题：代数类应用题类型较多，本考点主要研究增长率型和销售型应用题，也是中考应用题的热点．

题型：①增长率型　例如："原价××元，经过两次连续降价（涨价）"；

"某人患了流感，经过两轮传染"．

②销售型　例如："每涨价××元，则销量减少××件"．

由于一元二次方程通常有两个根，为此要根据题意对两根加以检验，即判断方程的根与实际背景和题意是否相符，并将不符合题意的根舍去．

典例

1．随着粤港澳大湾区建设的加速推进，广东省正加速布局以$5G$等为代表的战略性新兴产业，计划到2020年底，全省$5G$基站数量将达到6万座，到2022年底，全省$5G$基站数量将达到17.34万座．

（1）按照计划，求2020年底到2022年底，全省$5G$基站数量的年平均增长率；

（2）若2023年保持前两年$5G$基站数量的年平均增长率不变，到2023年底，全省$5G$基站数量能否超过25万座？

解析

解：（1）设 2020 年底到 2022 年底，全省 $5G$ 基站数量的年平均增长率为 x，

依题意，得：$6\times(1+x)^2=17.34$，

解得：$x_1=0.7=70\%$，$x_2=-2.7$（不合题意，舍去）.

答：2020 年底到 2022 年底，全省 $5G$ 基站数量的年平均增长率为 70%.

（2）$17.34\times(1+70\%)=29.478$（万座），

$\because 29.478>25$，

$\therefore$ 到 2023 年底，全省 $5G$ 基站数量能超过 25 万座.

2．2020 年，我国脱贫攻坚在力度、广度、深度和精准度上都达到了新的水平，重庆市深度贫困地区脱贫进程明显加快，作风治理和能力建设初见成效，精准扶贫、精准脱贫取得突破性进展．为助力我市脱贫攻坚，某村村委会在网上直播销售该村优质农产品礼包，该村在今年 1 月份销售 256 包，2、3 月该礼包十分畅销，销售量持续走高，在售价不变的基础上，3 月份的销售量达到 400 包.

（1）若设 2、3 这两个月销售量的月平均增长率为 $a\%$，求 a 的值；

（2）若农产品礼包每包进价 25 元，原售价为每包 40 元，该村在今年 4 月进行降价促销，经调查发现，若该农产品礼包每包降价 1 元，销售量可增加 5 袋，当农产品礼包每包降价多少元时，这种农产品在 4 月份可获利 4620 元？

解析

解：（1）设 2、3 这两个月的月平均增长率为 x .

由题意得：$256(1+x)^2=400$，

解得：$x_1=25\%$，$x_2=-225\%$（舍去），

即 2、3 这两个月的月平均增长率为 25%，

即 a 的值是 25；

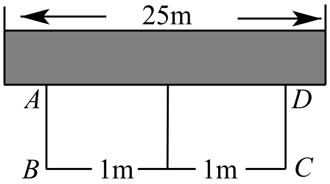
（2）设当农产品每袋降价 m 元时，该农产品在 4 月份可获利 4620 元.

根据题意可得：$(40-25-m)(400+5m)=4620$，

解得：$m_1=4$，$m_2=-69$（舍去），

答：当农产品每袋降价 4 元时，该农产品在 4 月份可获利 4620 元.

3．如图，有长为 46 米的篱笆，一面利用墙（墙的最大可用长度 25 米），围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃 $ABCD$. 为了方便出入，在 BC 上用其他材料建了两扇宽为 1 米的门，问：当 AB 的长是多少米时，围成长方形花圃 $ABCD$ 的面积为 180m^2 ?



解析

解：设 $AB=x$，

$\therefore BC = 46 - 3x + 2 = 48 - 3x$，

由题意可知：$48 - 3x \leqslant 25$，

解得：$x \geqslant \dfrac{23}{3}$，

$\therefore x(48 - 3x) = 180$，

解得：$x = 6$（舍去）或 $x = 10$，

答：当 AB 的长是 10 米时，围成长方形花圃 $ABCD$ 的面积为 180m^2

总结

一元二次方程应用题中注意理解题目中的关键信息，根据题目要求设出合适的未知数，利用题目中的等量关系建立方程，进行求解，解出方程后根据题意进行取舍（检验），具体步骤为：审；设；列；解；检验；答.

小试牛刀

1. “阳光玫瑰”葡萄品种是广受各地消费者的青睐的优质新品种，在我国西部区域广泛种植，重庆市某葡萄种植基地 2017 年种植“阳光玫瑰”100 亩，到 2019 年“阳光玫瑰”的种植面积达到 196 亩.

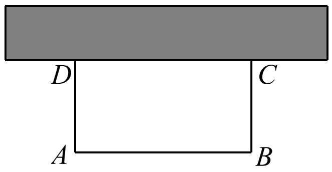
（1）求该基地这两年“阳光玫瑰”种植面积的平均增长率；

（2）市场调查发现，当“阳光玫瑰”的售价为 20 元 / 千克时，每天能售出 200 千克，售价每降价 1 元，每天可多售出 50 千克，为了推广宣传，基地决定降价促销，同时尽量减少库存，已知该基地“阳光玫瑰”的平均成本价为 12 元 / 千克，若使销售“阳光玫瑰”每天获利 1750 元，则售价应降低多少元？

2．如图，利用一面墙（墙长 10 米）用 20 米的篱笆围成一个矩形场地．设垂直于墙的一边为 x 米，矩形场地的面积为 S 平方米．

（1）求 S 与 x 的函数关系式，并求出 x 的取值范围；

（2）若矩形场地的面积为 48 平方米，求矩形场地的长与宽．



参考答案

考点 1

1．±4

2．-3

考点 2

1．C．

2．C．

考点 3

1．（1）$2x^2-5x+1=0$

解：$\Delta=b^2-4ac=25-4\times2\times1=17$，

故 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$，

则 $x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$；

（2）$(x+1)(x-2)=4$，

解：$x^2-x-2=4$，

故 $x^2-x-6=0$，

$(x-3)(x+2)=0$，

故 $x-3=0$ 或 $x+2=0$，

解得：$x_1=3$，$x_2=-2$．

（3）$9x^2+6x-8=0$，

解：$\Delta=6^2-4\times9\times(-8)=36\times9$，

$x=\dfrac{-6\pm18}{2\times9}$，

所以 $x_1=\dfrac{2}{3}$，$x_2=-\dfrac{4}{3}$；

（4）$(x-1)^2-3(x-1)=10$，

解：$(x-1)^2-3(x-1)-10=0$，

$(x-1+2)(x-1-5)=0$

$(x+1)(x-6)=0$，

$\therefore x_1=-1$， $x_2=6$．

考点 4

1．解：（1）证明：依题意，得 $\Delta=[-(m+3)]^2-4(m+2)=(m+1)^2$，

$\because (m+1)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ 方程总有两个实数根；

（2）由求根公式，得 $x=\dfrac{(m+3)\pm(m+1)}{2}$，

$\therefore x_1=1$， $x_2=m+2$，

$\because$ 方程有一个根大于 3，

$\therefore m+2>3$．

$\therefore m>1$．

$\therefore m$ 的取值范围是 $m>1$．

2．解：（1） $\Delta=(2k+1)^2-4\times1\times4(k-\dfrac{1}{2})=4(k-\dfrac{3}{2})^2\geqslant 0$，此时方程有两个实数根.

所以，无论 k 取何值，此方程总有实数根.

（2）若 $x=1$ 是这个方程的一个根，则 $1-(2k+1)+4(k-\dfrac{1}{2})=0$，

解得 $k=1$，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2-3x+2=0$，

解方程得 $x_1=1$， $x_2=2$，

$\therefore$ 方程的另一根是 2；

（3）当 $a=4$ 为底边，则 b， c 为腰长，则 $b=c$，则 $\Delta=0$．

$\therefore 4(k-\dfrac{3}{2})^2=0$，解得： $k=\dfrac{3}{2}$．

此时原方程化为 $x^2-4x+4=0$

$\therefore x_1=x_2=2$，即 $b=c=2$．

此时 $\triangle ABC$ 三边为 4，2，2，构不成三角形，

当 $a=4$ 为腰，不妨设 $b=4$ 为腰长，c 为底，则 $16-4(2k+1)+4(k-\frac{1}{2})=0$，

求得 $k=\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 关于 x 的方程为 $x^2-6x+8=0$．

解得 $x=2$ 或 4，

$\therefore c=2$，

$\therefore$ 周长为 $4+4+2=10$．

故这个等腰三角形的周长是 10．

考点 5

1．（1）证明：原方程可化为 $(k-1)x^2+2kx+2=0$

当 $k-1=0$ 时，则 $k=1$，方程为 $2x+2=0$，解得 $x=-1$，方程有实数根；

当 $k-1\neq 0$ 时，则 $\Delta=(2k)^2-4(k-1)\times 2=4k^2-8k+8=4(k-1)^2+4>0$，

即方程有两个实数根，

综上可知，无论 k 为何值，方程总有实数根；

（2）解：$\because x_1$，x_2 是上述方程的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{2k}{k-1}$，$x_1x_2=\frac{2}{k-1}$，

$\because 2x_1x_2+x_1+x_2=2$，

$\therefore \frac{4}{k-1}-\frac{2k}{k-1}=2$，

$\therefore k=\frac{3}{2}$

2．解：（1）$\because m$，n 是方程 $x^2-x-100=0$ 的两个实数根

$\therefore m+n=1$，$mn=-100$

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=1^2-2\times(-100)=201$；

（2）①由题意得：$x(x-2)^2-t=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$\therefore x^3-4x^2+4x-t=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$

$\therefore x_1+x_2+x_3=4$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=4$，$x_1x_2x_3=t$

$\therefore x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 的值为 4；

②$\because x_1+x_2+x_3=4$

$\therefore x_1+x_3=4-x_2$

$\because x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=4$

$\therefore x_3x_1=4-(x_1+x_3)x_2$

$\because x_1x_2x_3=t$

$\therefore x_3x_1=\dfrac{t}{x_2}$

$\because (x_3-x_1)^2=(x_3+x_1)^2-4x_3x_1$

$\therefore (x_3-x_1)^2=(4-x_2)^2-4[4-(x_1+x_3)x_2]=-3{x_2}^2+8x_2=-3(x_2-\dfrac{4}{3})^2+\dfrac{16}{3}\leqslant\dfrac{16}{3}$

$\therefore$ 当 $x_2=\dfrac{4}{3}$ 时，x_3-x_1 的最大值为：$\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore x_3-x_1$ 的最大值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

考点 6

1．解：（1）设该基地这两年“阳光玫瑰”种植面积的平均增长率为 x，

依题意，得：$100(1+x)^2=196$，解得：$x_1=0.4=40\%$，$x_2=-2.4$（不合题意，舍去）.

答：该基地这两年“阳光玫瑰”种植面积的平均增长率为 40%.

（2）设售价应降低 y 元，则每天可售出 $(200+50y)$ 千克，

依题意，得：$(20-12-y)(200+50y)=1750$，

整理，得：$y^2-4y+3=0$，

解得：$y_1=1$，$y_2=3$.

$\because$ 要尽量减少库存，

$\therefore y=3$.

答：售价应降低 3 元.

2．解：（1）$\because AD = BC = x$，

$\therefore AB = 20 - 2x$．

又$\because$墙长 10 米，

$$\therefore \begin{cases} 20 - 2x \leqslant 10 \\ 2x < 20 \end{cases},$$

$\therefore 5 \leqslant x < 10$．

$\therefore S = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x(5 \leqslant x < 10)$．

（2）当矩形场地的面积为 48 平方米时，$-2x^2 + 20x = 48$，

解得：$x_1 = 4$（不合题意，舍去），$x_2 = 6$，

$\therefore 20 - 2x = 8$．

答：矩形的长为 8 米，宽为 6 米．

第三篇 相似

考点 1 成比例线段与成比例数

知识小贴士

a，b，c，d 四条线段成比例有严格的顺序之分，

判断时可利用 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 或 $ad=bc$.

典例

1．下列各组线段中，是成比例线段的是（　　）

A． 1cm， 3cm， 4cm， 6cm　　B． 2cm， 3cm， 4cm， 6cm

C． 3cm， 5cm， 9cm， 13cm　　D． 3cm， 5cm， 9cm， 12cm

答案

B

解析

解：$\because 3\times 4\neq 1\times 6$，

$\therefore$ 选项 A 不成比例；

$\because 3\times 4=2\times 6$，

$\therefore$ 选项 B 成比例；

$\because 3\times 13\neq 5\times 9$，

$\therefore$ 选项 C 不成比例；

$\because 3\times 12\neq 5\times 9$，

$\therefore$ 选项 D 不成比例

总结

这类题型常考小题，判断四条线段是否成比例，注意成比例线段有严格的顺序之分，利用 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 或 $ad=bc$ 判断.

小试牛刀

1．下列各组中的四条线段成比例的是（　　）

A．$a=2$，$b=3$，$c=4$，$d=1$

B．$a=2$，$b=\sqrt{5}$，$c=2\sqrt{3}$，$d=\sqrt{15}$

C．$a=4$，$b=6$，$c=5$，$d=10$

D．$a=\sqrt{2}$，$b=3$，$c=2$，$d=\sqrt{3}$

2．下列数中，能与 6，9，10 组成比例的数是（　　）

A．1　　B．74　　C．5.4　　D．1.5

考点 2 比例的性质

知识小贴士

（1）基本性质：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\xLeftrightarrow[bd\neq0]{}ad=bc$，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}\xLeftrightarrow[bc\neq0]{}b^2=ac$

（2）合分比性质：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\xLeftrightarrow[bd\neq0]{}\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$

（3）等比性质：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\cdots=\dfrac{m}{n}\Rightarrow\dfrac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\dfrac{a}{b}(b+d+\cdots+n\neq0)$

典例

1．若四条不相等的线段 a，b，c，d 满足 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则下列式子中，成立的是（　　）

A．$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{d}$

B．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c+m}{d+m}(m>0)$

C．$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{d-c}{d}$

D．$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{c}{d}$

答案

D

解析

解：A、$\because\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，$\therefore\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$；故本选项错误；

B、$\because\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，$m>0$，$\therefore\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{c+m}{d+m}$；故本选项错误；

C、$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\therefore \frac{a-b}{b}=-\frac{d-c}{d}$；故本选项错误；

D、$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\therefore \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$；故本选项正确．

2．若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=0.5$，则$\frac{3a-2c+e}{3b-2d+f}=$__________．

答案

0.5

解析

解：由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=0.5$，得$a=0.5b$，$c=0.5d$，$e=0.5f$，

所以$\frac{3a-2c+e}{3b-2d+f}=\frac{1.5b-d+0.5f}{3b-2d+f}=0.5$

总结

这类题型常考小题，对比例性质进行综合考查，常将$\frac{a}{b}=k$变形为$a=kb$，进而求解出正确答案

小试牛刀

1．已知$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，则$\frac{a+b}{3a-b}=$__________．

2．已知四条线段a，b，c，d是成比例线段，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，下列说法错误的是（　　）

A．$ad=bc$　　B．$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$

C．$\frac{a-b}{b}=\frac{c-b}{d}$　　D．$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$

3．已知a，b，c为$\triangle ABC$的三边，且$\frac{2a}{b+c}=\frac{2b}{a+c}=\frac{2c}{a+b}=k$，则$k$的值为（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$或-1　　C．-2　　D．1或-2

考点 3 平行线分线段成比例

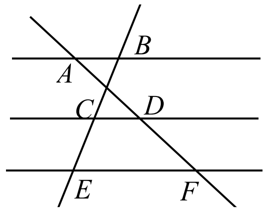
知识小贴士

两条直线被一组平行线所截，所得对应线段程比例.

推论：平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例.

典例

1．如图，已知 $AB//CD//EF$， $AD:AF=3:5$， $BC=6$，CE 的长为（　　）



A．2　　B． 4　　C．9　　D．10

答案

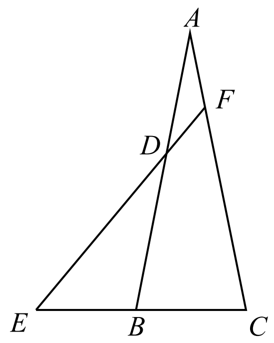
B

解析

$\because AD:AF=3:5$，$\therefore AD:DF=3:2$，$\because AB//CD//EF$，$\therefore \frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$，即 $\frac{3}{2}=\frac{6}{CE}$，

解得：$CE=4$

2．如图，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC=3$，$BC=1$．点 D 在 AB 边上，点 E 在 CB 的延长线上，已知 $AD=1$，$BE=1$，连接 ED 并延长交 AC 于点 F，则线段 AF 的长为（　　）



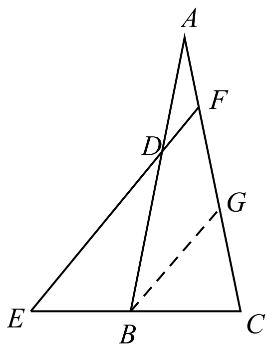
A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．1

答案

B

解析

解：取 CF 的中点 G，连接 BG，如图所示：



$\because BC=1$， $BE=1$，

$\therefore$ 点 B 为 EC 的中点，

$\therefore BG$ 是 $\triangle CEF$ 的中位线，

$\therefore BG /\!/ EF$，

$\therefore \dfrac{AF}{AG}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore AF=\dfrac{1}{3}AG$， $\therefore FG=CG=2AF$，

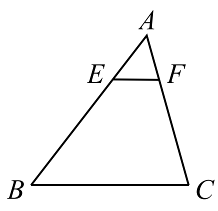
$\therefore AC=AF+FG+CG=5AF=3$， $\therefore AF=\dfrac{3}{5}$

总结

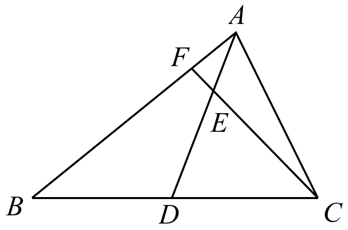
处理此类问题的时候，可以考虑过分点作平行线，构造出“A”字型相似或“8”字相似，通过线段比例的转化得到线段比例关系，求得线段长.

小试牛刀

1. 如图，在三角形 ABC 中，点 E，F 分别是 AB，AC 边上的点，且有 $EF /\!/ BC$，如果 $\dfrac{EB}{AB}=\dfrac{4}{5}$，则 $\dfrac{AC}{FC}=$__________.



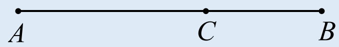
2．如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，E 是 AD 上一点，$AE:AD=1:3$，CE 的延长线交 AB 于点 F，若 $AF=1.5$，则 $AB=$__________.



考点 4 黄金分割

知识小贴士

一般地，点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC，如果 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，那么称线段 AB 被点 C 黄金分割（golden section），点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点，AC 与 AB 的比叫做黄金比．



典例

1．如果点 C 为线段 AB 的黄金分割点，且 $AC>BC$，则下列各式不正确的是（　　）

A．$AB:AC=AC:BC$　　B．$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$

C．$AB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AC$　　D．$BC\approx 0.618AB$

答案

D

解析

解：$\because AC>BC$，

$\therefore AC$ 是较长的线段，

根据黄金分割的定义可知：$AB:AC=AC:BC$，$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，$AB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AC$，

$AC\approx 0.618AB$．

总结

这类题型常考小题，当明确某线段较长时，不需要分类讨论，不明确时则需要分类讨论，这是最容易出错的，注意一条线段的黄金分割点有两个！

小试牛刀

1．已知线段 $AB=20\text{cm}$，点 C 是线段 AB 的黄金分割点，则 AC 的长为__________.

2．已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，$AP>BP$，记以 AP 为一边的正方形面积为 S_1，以 BP、AB 为邻边矩形的面积为 S_2，则（　　）

A．$S_1>S_2$　　B．$S_1=S_2$　　C．$S_1<S_2$　　D．S_1，S_2 大小不能确定

考点 5 相似图形的判定与性质

知识小贴士

相似三角形判定定理：

①两角分别相等的两个三角形相似；

②两边成比例且夹角相等的两个三角形相似；

③三边成比例的两个三角形相似.

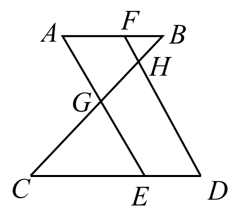
相似三角形判定定理：

①相似三角形对应高的比、对应角平分线的比、对应中线的比都等于相似比；

②相似三角形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方.

典例

1. 如图，$AB // CD$，$AE // FD$，AE，FD 分别交 BC 于点 G，H，则图中共有相似三角形（　　）



A．4 对　　B．5 对　　C．6 对　　D．7 对

答案

C

解析

解：$\because AB // CD$， $AE // DF$；

$\therefore \triangle BFH \backsim \triangle BAG$

$\triangle BAG \backsim \triangle CEG$

$\triangle BFH \backsim \triangle CEG$

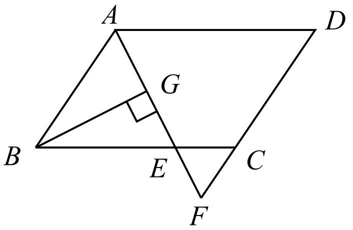
$\triangle BFH \backsim \triangle CDH$

$\triangle CEG \backsim \triangle CDH$

$\triangle CDH \backsim \triangle BAG$．

$\therefore$相似三角形共有 6 对．

2．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=6$， $AD=9$， $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于 E，交 DC 的延长线于 F， $BG \perp AE$ 于 G， $BG=4\sqrt{2}$，则 $\triangle EFC$ 的周长为（　　）



A．11　　　B．10　　　C．9　　　D．8

答案

D

解析

解：$\because$在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD=6$，$AD=BC=9$，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，

$\therefore \angle BAF=\angle DAF$，

$\because AB // DF$， $AD // BC$，

$\therefore \angle BAF=\angle F=\angle DAF$， $\angle BAE=\angle AEB$，

$\therefore AB=BE=6$， $AD=DF=9$，

$\therefore \triangle ADF$ 是等腰三角形， $\triangle ABE$ 是等腰三角形，

$\because AD // BC$，

$\therefore \triangle EFC$ 是等腰三角形，且 $CF = CE$，

$\therefore EC = FC = DF - DC = 9 - 6 = 3$，$\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{1}{2}$，

在 $\triangle ABG$ 中，$BG \perp AE$，$AB = 6$，$BG = 4\sqrt{2}$，

$\therefore AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = 2$，

$\therefore AE = 2AG = 4$，

$\therefore \triangle ABE$ 的周长等于 16，

又$\because \triangle CEF \backsim \triangle BEA$，相似比为$1:2$，

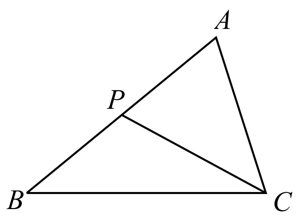
$\therefore \triangle CEF$ 的周长为 8.

总结

这类题型常考小题，熟练掌握相似三角形的判定与性质之外，还需要熟悉常见的“A”字与“8”字结构及其变式，面积比是相似比的平方，注意仔细审题，看清所求的是谁与谁的比.

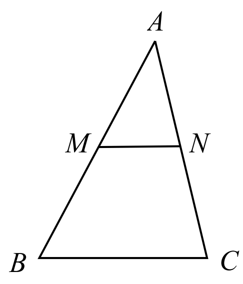
小试牛刀

1．如图，点 P 为 $\triangle ABC$ 的 AB 边上一点（$AB > AC$），下列条件中不一定能保证 $\triangle ACP \backsim \triangle ABC$ 的是（　　）



A．$\angle ACP = \angle B$　　B．$\angle APC = \angle ACB$　　C．$\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{AC}{AB}$　　D．$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AP}{AC}$

2．如图，在 $\triangle ABC$ 中，M，N 分别是边 AB，AC 的中点，则 $\triangle AMN$ 的面积与四边形 $MBCN$ 的面积比为（　　）



A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

3．在长 8cm，宽 6cm 的矩形中，截去一个矩形，使留下的矩形与原矩形相似，那么留下的矩形面积是__________cm^2．

考点 6 位似

知识小贴士

一般地，如果两个相似多边形任意一组对应顶点 P，P' 所在的直线都经过同一点 O，且有 $OP' = kOP(k \neq 0)$，那么这样的两个多边形叫做位似多边形，点 O 叫做位似中心．

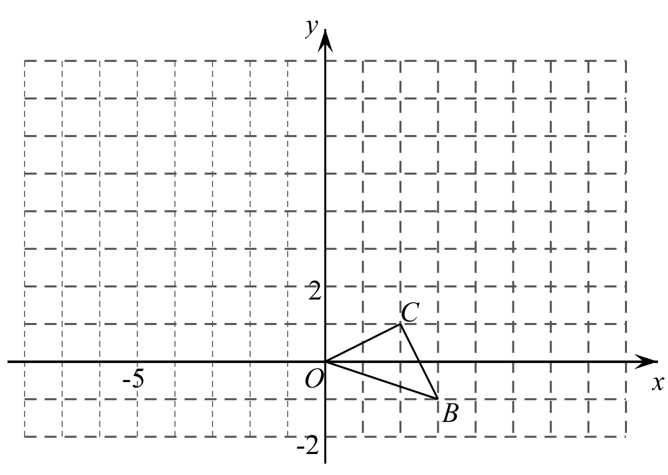
典例

1．如图，已知点 O 是坐标原点，B、C 两点的坐标分别为 $(3, -1)$，$(2, 1)$．

（1）以 O 点为位似中心，在 y 轴的左侧将 $\triangle OBC$ 放大到原图的 2 倍（即新图与原图的相似比为 2），画出对应的 $\triangle OB'C'$；

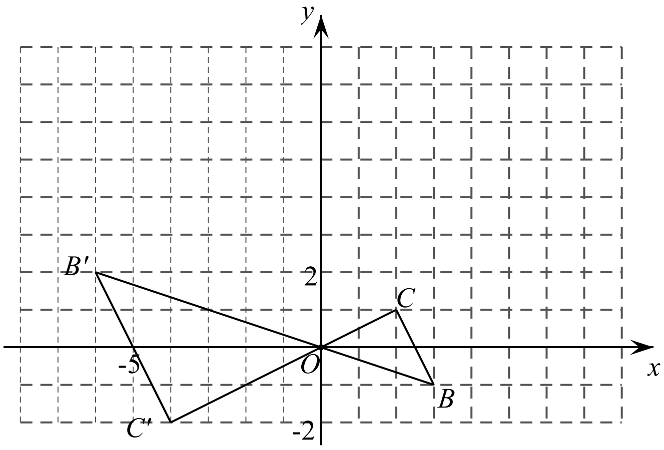
（2）若 $\triangle OBC$ 内部一点 M 的坐标为 (a, b)，则点 M 对应点 M' 的坐标是__________；

（3）求出变化后 $\triangle OB'C'$ 的面积__________．



解析

解：（1）如图，$\triangle OB'C'$为所作；



（2）点 M 对应点 M' 的坐标为$(-2a,-2b)$；

（3）$S_{\triangle OB'C'}=4S_{\triangle OCB}=4\times(2\times3-\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times3\times1)=10$．

故答案为$(-2a\ ，-2b)$；10．

总结

在平面直角坐标系中，将一个多边形每个顶点的横坐标、纵坐标都乘以 $k(k\neq0)$，所对应的图形与原图形位似，位似中心是坐标原点，他们的相似比为$|k|$．

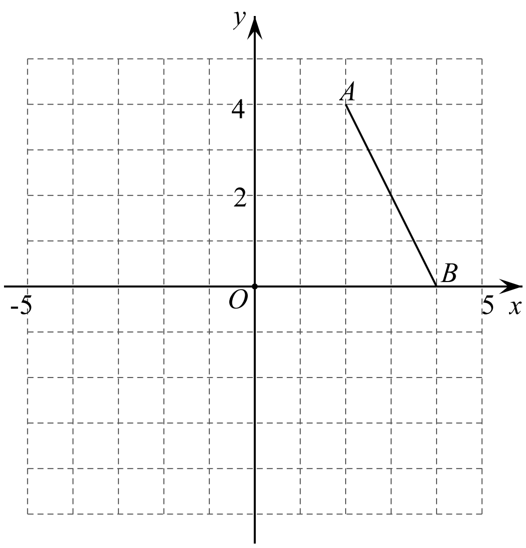
小试牛刀

1．如图，在平面直角坐标系中，点 A， B 的坐标分别为 $A(2，4)$， $B(4，0)$．

（1）以原点 O 为位似中心，把线段 AB 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$；

（2）若（1）中画出的线段为 $A'B'$，请写出线段 $A'B'$ 两个端点 A'、 B' 的坐标；

（3）若线段 AB 上任意一点 M 的坐标为 $(a，b)$，请写出缩小后的线段 $A'B'$ 上对应点 M' 的坐标．

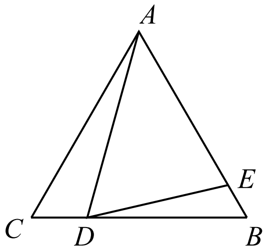


考点 7 相似综合

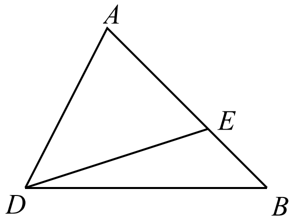
典例

1．（2019 枫杨外国语第一次月考）【探究】如图①，在等边△ABC 中， $AB=4$，点 D、E 分别为边 BC、AB 上的点，连结 AD、DE， $\angle ADE=60°$，若 $BD=3$，求 BE 的长．

【拓展】如图②，在△ABD 中，$AB=4$，点 E 为边 AB 上的点，连结 DE，若 $\angle ADE=\angle ABD=45°$，若 $DB=3\sqrt{2}$，$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDE}}=$__________．



图①



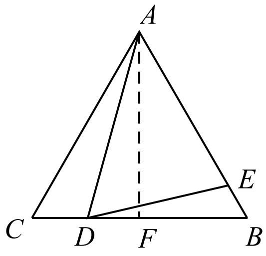
图②

解析

【探究】解：$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore$ $\angle B=\angle C=60^{\circ}$， $AB=BC=4$，

过点 A 作 $AF\perp BC$ 于 F，如图①所示：



图①

则 $BF=CF=\frac{1}{2}BC=2$， $AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ $DF=BD-BF=3-2=1$，

$\therefore$ $AD=\sqrt{AF^2+DF^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{13}$，

根据三角形的内角和定理得， $\angle ADB+\angle BAD=120°$，

$\because$ $\angle ADE=60°$，

$\therefore$ $\angle BAD+\angle AED=120°$，

$\therefore$ $\angle ADB=\angle AED$，

$\because$ $\angle B=\angle ADE=60°$，

$\therefore$ $\triangle ABD\backsim\triangle ADE$，

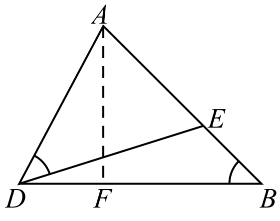
$\therefore$ $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AE}$，

即： $\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{AE}$，

解得： $AE=\frac{13}{4}$，

$\therefore$ $BE=AB-AE=4-\frac{13}{4}=\frac{3}{4}$；

【拓展】解：过点 A 作 $AF\perp BC$ 于 F，如图②所示：



图②

$\because \angle ABD = 45°$，

$\therefore \triangle ABF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AF = BF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB = 2\sqrt{2}$，

$\therefore DF = DB - BF = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$，

$\therefore AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{10}$，

$\because \angle ADE = \angle ABD = 45°$， $\angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABD$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AD}$，

$\therefore AE = \dfrac{AD^2}{AB} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$，

$\therefore BD = AB - AE = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDE}} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{5}{3}$；

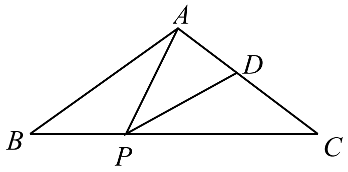
故答案为：$\dfrac{5}{3}$.

小试牛刀

1．如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，点P、D分别是BC、AC边上的点，且$\angle APD = \angle B$.

（1）求证：$AC \cdot CD = CP \cdot BP$；

（2）若$AB = 10$，$BC = 12$，当$PD // AB$时，求BP的长.

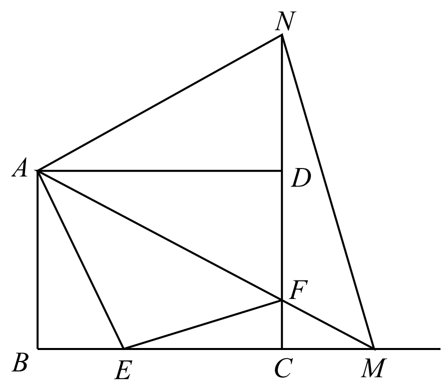


2．如图，在矩形$ABCD$中，$AB=9$，$AD=12$．动点E从点B出发，沿线段BC（不包括端点B、C）以每秒2个单位长度的速度匀速向点C运动；动点F从点C出发，沿线段CD（不包括端点C、D）以每秒1个单位长度的速度，匀速向点D运动；点E、F同时出发，同时停止．连接AF并延长交BC的延长线于点M，再把AM沿AD翻折交CD延长线于点N，连接MN．设运动时间为t秒．

（1）当t为何值时，$\triangle ABE\backsim\triangle ECF$；

（2）在点E运动的过程中是否存在某个时刻使$AE\perp AN$？若存在请求出t的值，若不存在请说明理由；

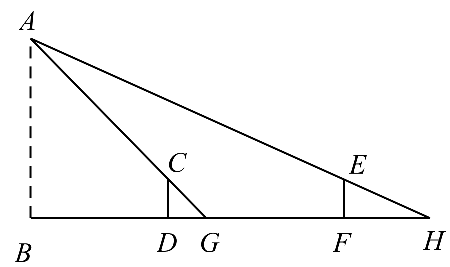
（3）在运动的过程中，$\triangle AMN$的面积是否变化？如果改变，求出变化的范围；如果不变，求出它的值．



考点8 测高问题

典例

1．如图，某水平地面上建筑物的高度为AB，在点D和点F处分别竖立高是2米的标杆CD和EF，两标杆相隔52米，并且建筑物AB、标杆CD和EF在同一竖直平面内，从标杆CD后退2米到点G处，在G处测得建筑物顶端A和标杆顶端C在同一条直线上；从标杆FE后退4米到点H处，在H处测得建筑物顶端A和标杆顶端E在同一条直线上，求建筑物的高．



解析

解：$\because AB \perp BH$， $CD \perp BH$， $EF \perp BH$，

$\therefore AB /\!/ CD /\!/ EF$，

$\therefore \dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DG}{DG+BD}$， $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{FH}{FH+DF+BD}$，

$\because CD=DG=EF=2\text{m}$， $DF=52\text{m}$， $FH=4\text{m}$，

$\therefore \dfrac{2}{AB}=\dfrac{2}{2+BD}$，

$\dfrac{2}{AB}=\dfrac{4}{4+52+BD}$，

$\therefore \dfrac{2}{2+BD}=\dfrac{4}{4+52+BD}$，

解得 $BD=52$，

$\therefore \dfrac{21}{AB}=\dfrac{2}{2+52}$，

解得 $AB=54$．

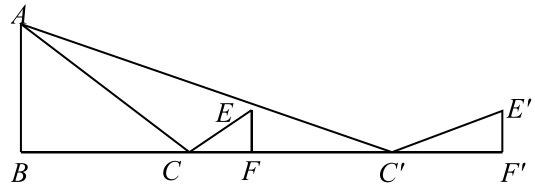
答：建筑物的高为 54 米.

总结

这类题型通常思路是读懂题意，找出图中的相似三角形，利用相似三角形对应线段成比例，知 3 求 1，或用一个未知数列比例方程，从而求解出所测高度.

小试牛刀

1．李师傅用镜子测量一棵古树的高，但树旁有一条小河，不便测量镜子与树之间的距离，于是他两次利用镜子，第一次把镜子放在 C 点（如图所示），人在 F 点正好在镜中看到树尖 A；第二次他把镜子放在 C' 处，人在 F' 处正好看到树尖 A．已知李师傅眼睛距地面的高度 EF 为 1.7m， 量得 CC' 为 12m， CF 为 1.8m， $C'F'$ 为 3.84m， 求树高 AB.



考点 9 类比探究

知识小贴士

解决类比探究题的一般思路

1．第一问往往是最特殊的情况，在特殊情况下找到简单，直观的结论；

2．第二问通常是在第一问的基础上，改变其中部分条件，抓住和第一问共同的条件，利用同样的思路解决问题，证明结论；

3．第三问通常将特殊情况推广到一般情况，利用前两问的做题思路，借助第 2 问证明的结论进行求解．

典例

1．（2019 省实验第一次月考）（1）操作发现

如图 1，在五边形 $ABCDE$ 中，$AB=AE$，$\angle B=\angle BAE=\angle AED=90^\circ$，$\angle CAD=45^\circ$，试猜想 BC，CD，DE 之间的数量关系．小明经过仔细思考，得到如下解题思路：

将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle AEF$，由 $\angle B=\angle AED=90^\circ$，得 $\angle DEF=180^\circ$，即点 D，E，F 三点共线，易证 $\triangle ACD\cong$__________，故 BC，CD，DE 之间的数量关系是__________；

（2）类比探究

如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle ABC+\angle D=180^\circ$，点 E，F 分别在边 CB，DC 的延长线上，$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，连接 EF，试猜想 EF，BE，DF 之间的数量关系，并给出证明．

（3）拓展延伸

如图 3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点 D，E 均在边 BC 上，且 $\angle DAE=45^\circ$，若 $BD=2$，$CE=3$，则 DE 的长为__________．

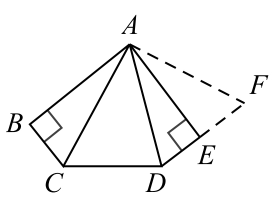


图 1

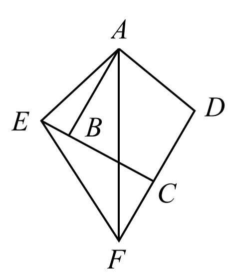


图 2

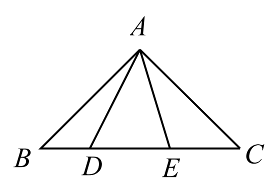


图 3

解析

解：（1） BC ， CD ， DE 之间的数量关系为： $CD=DE+BC$ ，理由是：

如图 1，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 至 $\triangle AEF$ ，由 $\angle B=\angle AED=\angle AEF=90°$ ，得 $\angle DEF=180°$ ，即点 D ， E ， F 三点共线，

$\because \angle BAE=90°$ ， $\angle CAD=45°$ ，

$\therefore \angle BAC+\angle DAE=\angle DAE+\angle EAF=45°$ ，

$\therefore \angle CAD=\angle FAD$ ，

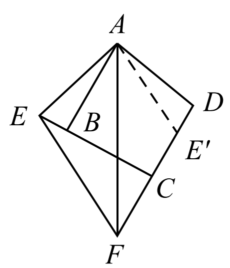
$\because AC=AF$ ，

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AFD(SAS)$ ，

$\therefore CD=DF=DE+EF=DE+BC$ ，

故答案为： $\triangle AFD$ ， $CD=DE+BC$ ；

（2）如图 2， EF ， BE ， DF 之间的数量关系是 $EF=DF-BE$ ．



证明：将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转，使 AB 与 AD 重合，得到 $\triangle ADE'$ ，

则 $\triangle ABE \cong \triangle ADE'$ ，

$\therefore \angle DAE'=\angle BAE$ ， $AE'=AE$ ， $DE'=BE$ ， $\angle ADE'=\angle ABE$ ，

$\therefore \angle EAE'=\angle BAD$ ，

$\because \angle ABC+\angle ADC=180°$ ， $\angle ABC+\angle ABE=180°$ ，

$\angle ADE'=\angle ADC$ ，即 E' ， D ， F 三点共线，

又 $\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle EAE'$

$\therefore \angle EAF=\angle E'AF$ ，

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AE'F$ 中，

$$\begin{cases} AE = AE' \\ \angle EAF = \angle E'AF \\ AF = AF \end{cases},$$

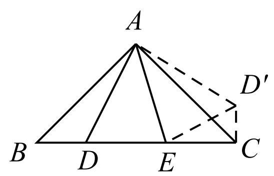
$\therefore \triangle AFE \cong \triangle AFE'(SAS)$，

$\therefore FE = FE'$，

又$\because FE' = DF - DE'$，

$\therefore EF = DF - BE$；

（3）如图 3，将$\triangle ABD$绕点A逆时针旋转至$\triangle ACD'$，使AB与AC重合，连接ED'，则 $CD' = BD = 2$，



由（1）同理得，$\triangle AED \cong \triangle AED'$，.

$\therefore DE = D'E$．

$\because \angle ACB = \angle B = \angle ACD' = 45°$，

$\therefore \angle ECD' = 90°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ECD'$中，$ED' = \sqrt{EC^2 + D'C^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$，即$DE = \sqrt{13}$，

故答案为：$\sqrt{13}$．

2．（2019 桐柏一中第一次月考）如图，在△ABC 中，点 N 为 AC 边的任意一点，D 为线段 AB 上一点，若 $\angle MPN$ 的顶点 P 为线段 CD 上任一点，其两边分别与边 BC，AC 交于点 M、N，且 $\angle MPN+\angle ACB=180°$．

（1）如图 1，若 $AC=BC$，$\angle ACB=90°$，且 D 为 AB 的中点时，则 $\dfrac{PM}{PN}=$__________；

（2）如图 2，若 $BC=m$，$AC=n$，$\angle ACB=90°$，且 D 为 AB 的中点时，则 $\dfrac{PM}{PN}=$__________，请证明你的结论；

（3）如图 3，若 $\dfrac{BD}{AB}=k(k\neq 1)$，$BC=m$，$AC=n$，请直接写出 $\dfrac{PM}{PN}$ 的值．（用 k，m，n 表示）

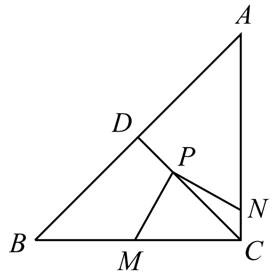


图 1

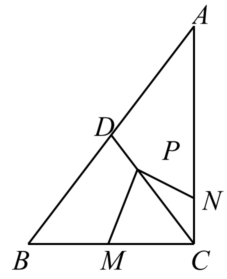


图 2

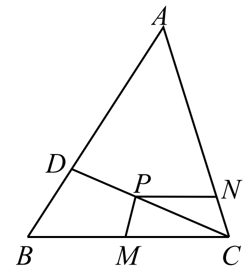


图 3

解析

解：（1）如图 1 中，作 $PG \perp AC$ 于 G， $PH \perp BC$ 于 H．

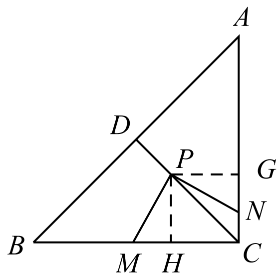


图 1

$\because AC = BC$， $\angle ACB = 90°$，且 D 为 AB 的中点，

$\therefore CD$ 平分 $\angle ACB$，

$\because PG \perp AC$ 于 G， $PH \perp BC$ 于 H，

$\therefore PG = PH$，

$\because \angle PGC = \angle PHC = \angle GCH = 90°$，

$\therefore \angle GPH = \angle MPN = 90°$，

$\therefore \angle MPH = \angle NPG$，

$\because \angle PHM = \angle PGN = 90°$，

$\therefore \triangle PHM \backsim \triangle PGN$，

$\therefore \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{PH}{PG} = 1$，

故答案为 1．

（2）如图 2 中，作 $PG \perp AC$ 于 G， $PH \perp BC$ 于 H．

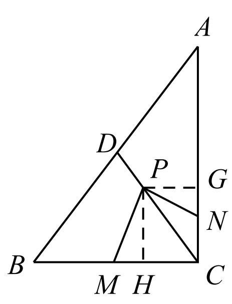


图 2

$\because \angle PGC = \angle PHC = \angle GCH = 90^\circ$，

$\therefore \angle GPH = \angle MPN = 90^\circ$，

$\therefore \angle MPH = \angle NPG$，

$\because \angle PHM = \angle PGN = 90^\circ$，

$\therefore \triangle PHM \backsim \triangle PGN$，

$\therefore \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{PH}{PG}$，

$\because \triangle PHC \backsim \triangle ACB$，$PG = HC$，

$\therefore \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{PH}{PG} = \dfrac{PH}{HC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{n}{m}$．

故答案为$\dfrac{n}{m}$．

（3）如图 3 中，作$PG \perp AC$于G，$PH \perp BC$于H，$DT \perp AC$于T，$DK \perp BC$于K．

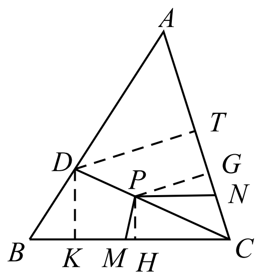


图 3

易证$\triangle PMH \backsim \triangle PGN$，

$\therefore \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{PH}{PG}$，

$\because \dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \dfrac{\frac{1}{2} \bullet AC \bullet DT}{\frac{1}{2} \bullet BC \bullet DK} = \dfrac{AD}{BD}$，

$\therefore \dfrac{DK}{DT} = \dfrac{kn}{(1-k)m}$，

$\because DT /\!/ PG$，$DK /\!/ PH$，

$\therefore \dfrac{PH}{DK} = \dfrac{CP}{CD} = \dfrac{PG}{DT}$，

$\therefore \dfrac{PH}{PG} = \dfrac{DK}{DT} = \dfrac{kn}{(1-k)m}$，

$\therefore \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{kn}{(1-k)m}$．

小试牛刀

1.（2018 省实验第一次月考）在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，点 P 是射线 BD 上一动点，以 AP 为边向右侧作等边△APE，点 E 的位置随着点 P 的位置变化而变化.

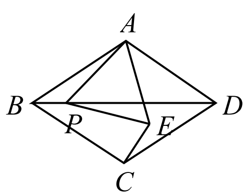


图 1

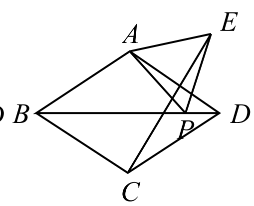


图 2

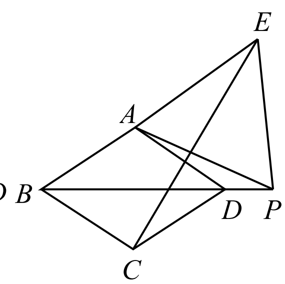


图 3

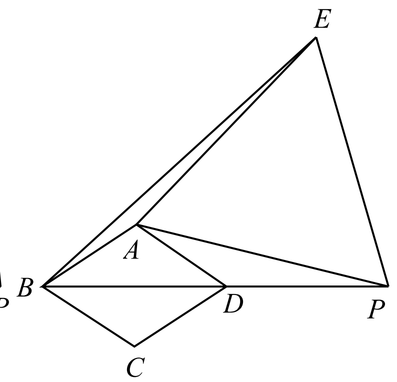


图 4

（1）如图 1，当点 E 在菱形 $ABCD$ 内部或边上时，连接 CE，BP 与 CE 的数量关系是__________，CE 与 AD 的位置关系是__________；

（2）当点 E 在菱形 $ABCD$ 外部时，（1）中的结论是否还成立？若成立，请予以证明；若不成立，请说明理由（选择图 2，图 3 中的一种情况予以证明或说理）；

（3）如图 4，当点 P 在线段 BD 的延长线上时，连接 BE，若 $AB=2\sqrt{3}$，$BE=2\sqrt{19}$，求四边形 $ADPE$ 的面积.

参考答案

考点 1

1．B

2．C

考点 2

1．$\frac{5}{3}$

2．C

3．A

考点 3

1．$\frac{5}{4}$

2．7.5

考点 4

1．$(10\sqrt{5}-10)$ 或 $(30-10\sqrt{5})$ cm

2．B

考点 5

1．C

2．B

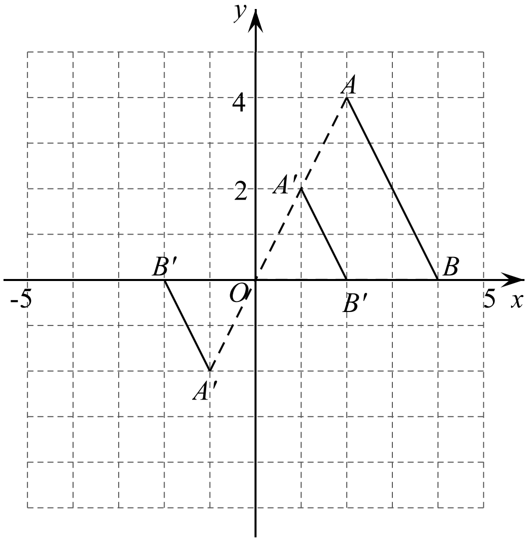
3．27

考点 6

1．解：（1）如图所示，线段 $A'B'$ 即为所求作的线段；

（2）$A'(1，2)$， $B'(2，0)$ 或 $A'(-1，-2)$， $B'(-2，0)$；

（3）$M'(\frac{a}{2}，\frac{b}{2})$ 或 $(-\frac{a}{2}，-\frac{b}{2})$．



考点 7

1．（1）证明：$\because AB=AC$， $\therefore \angle B=\angle C$．

$\because \angle APD=\angle B$， $\therefore \angle APD=\angle B=\angle C$．

$\because \angle APC=\angle BAP+\angle B$， $\angle APC=\angle APD+\angle DPC$，

$\therefore \angle BAP=\angle DPC$，

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle PCD$，

$\therefore \dfrac{BP}{CD}=\dfrac{AB}{CP}$，

$\therefore AB\bullet CD=CP\bullet BP$．

$\because AB=AC$，

$\therefore AC\bullet CD=CP\bullet BP$；

（2）解：如图，$\because PD/\!/AB$，

$\therefore \angle APD=\angle BAP$．

$\because \angle APD=\angle C$，

$\therefore \angle BAP=\angle C$

$\because \angle B=\angle B$

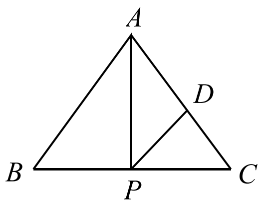
$\therefore \triangle BAP\backsim\triangle BCA$

$\therefore \dfrac{BA}{BC}=\dfrac{BP}{BA}$

$\because AB=10$， $BC=12$

$\therefore \dfrac{10}{12}=\dfrac{BP}{10}$，

$\therefore BP=\dfrac{25}{3}$．



2．解：（1）若$\triangle ABE\backsim\triangle ECF$，

则$\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CF}{EC}$，

$\therefore \dfrac{2t}{9}=\dfrac{t}{12-2t}$，

解得$t_1=0$（舍去），$t_2=\dfrac{15}{4}$，

$\therefore$当$t=\dfrac{15}{4}$时，$\triangle ABE\backsim\triangle ECF$；

（2）存在，

在矩形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle BAD=\angle ADC=\angle ADN=90^\circ$，

又 $\because AE\perp AN$

$\therefore \angle NAE=90^\circ$，

$\therefore \angle BAE=\angle DAN$，

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ADN$，

$\therefore \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{DN}{AD}$，

$\because AB=9$，$BE=2t$，$AD=12$，$CF=t$，

$\therefore DF=9-t$，

由折叠知：$DN=DF=9-t$，

$\therefore \dfrac{2t}{9}=\dfrac{9-t}{12}$，

$\therefore t=\dfrac{27}{11}$，

$\therefore$ 当 $t=\dfrac{27}{11}$ 时，$AE\perp AN$，

（3）$\triangle AMN$ 的面积不变，

在矩形 $ABCD$ 中，$FC\,//\,AB$，

$\therefore \triangle FCM\backsim\triangle ABM$

$\therefore \dfrac{FC}{AB}=\dfrac{MC}{BM}$，

$\therefore \dfrac{t}{9}=\dfrac{MC}{12+MC}$，

$\therefore MC=\dfrac{12t}{9-t}$，

$\therefore S_{\triangle AMN}=S_{\triangle ANF}+S_{\triangle NFM}$

$=\dfrac{1}{2}NF\times AD+\dfrac{1}{2}NF\times MC$

$=\dfrac{1}{2}NF(AD+MC)$

$=\dfrac{1}{2}\times 2(9-t)\times(12+\dfrac{12t}{9-t})$

$=108$．

$\therefore \triangle AMN$ 的面积不变为 108．

考点 8

1．解：根据反射定律可以推出 $\angle ACB=\angle ECF$， $\angle AC'B=\angle E'C'F'$，

$\therefore \triangle BAC \backsim \triangle FEC$、 $\triangle AC'B \backsim \triangle E'C'F'$，

设 $AB=x$， $BC=y$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{1.7}{x}=\dfrac{1.8}{y} \\ \dfrac{1.7}{x}=\dfrac{3.84}{12+y} \end{cases},$$

$$\text{解得}\begin{cases} x=10 \\ y=\dfrac{180}{17} \end{cases}.$$

$\therefore$ 这棵古树的高为10m．

考点 8

1．解：（1） $PB=EC$， $CE\perp AD$．

理由：连接 AC，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore$ $\triangle ABC$， $\triangle ACD$ 都是等边三角形， $\angle ABD=\angle CBD=30^\circ$，

$\therefore$ $AB=AC$， $\angle BAC=60^\circ$，

$\because$ $\triangle APE$ 是等边三角形，

$\therefore$ $AP=AE$， $\angle PAE=60^\circ$，

$\because$ $\angle BAC=\angle PAE$，

$\therefore$ $\angle BAP=\angle CAE$，

$\therefore$ $\triangle BAP \cong \triangle CAE$，

$\therefore$ $BP=CE$， $\angle ABP=\angle ACE=30^\circ$，

延长 CE 交 AD 于 H，

$\because$ $\angle CAH=60^\circ$，

$\therefore$ $\angle CAH+\angle ACH=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle AHC=90^\circ$，即 $CE\perp AD$.

故答案为 $PB=EC$， $CE\perp AD$.

（2）结论仍然成立.

理由：选图 2，连接 AC 交 BD 于 O，设 CE 交 AD 于 H.

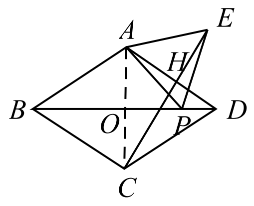


图 2

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC = 60°$，

∴$\triangle ABC$，$\triangle ACD$ 都是等边三角形，$\angle ABD = \angle CBD = 30°$，

∴ $AB = AC$，$\angle BAC = 60°$，

∵$\triangle APE$ 是等边三角形，

∴ $AP = AE$，$\angle PAE = 60°$，

∴ $\angle BAP = \angle CAE$.

∴ $\triangle BAP \cong \triangle CAE$，

∴ $BP = CE$，$\angle PBA = \angle ACE = 30°$，

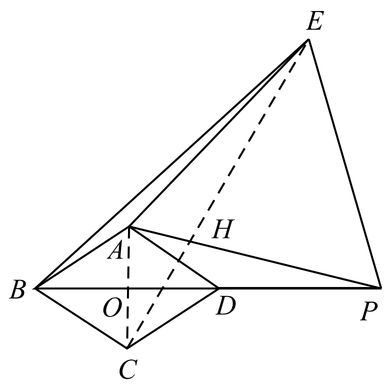
∵ $\angle CAH = 60°$，

∴ $\angle CAH + \angle ACH = 90°$，

∴ $\angle AHC = 90°$，即 $CE \perp AD$.

选图 3，同理可证；

（3）$\triangle BAP \cong \triangle CAE$，



由（2）可知 $EC \perp AD$，$CE = BP$，

在菱形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，

∴$EC \perp BC$，

∵ $BC = AB = 2\sqrt{3}$，$BE = 2\sqrt{19}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，$EC = 8$，

∴ $BP = 8$，

∵AC 与 BD 是菱形的对角线，

∴ $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$，$AC \perp BD$，

∴ $BD = 2BO = 6$，

∴ $OA = \sqrt{3}$，$DP = 2$，

∴ $OP = OD + DP = 5$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，$AP = 2\sqrt{7}$，

∴ $S_{四边形ADPE} = S_{\triangle ADP} + S_{\triangle AEP} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{7})^2 = 8\sqrt{3}$.

第四篇 概率与统计

考点 1 取出不放回类型与取出放回类型

知识小贴士

1．对于多次拿出的概率计算问题，可以利用画树状图或者列表的方法列出多种情况，进行计算概率

典例

1．一个盒子中装有标号为 1，2，3，4，5 的五个小球，这些球除标号外都相同，从中随机摸出两个小球，则摸出的小球标号之和大于 5 的概率为（　　）

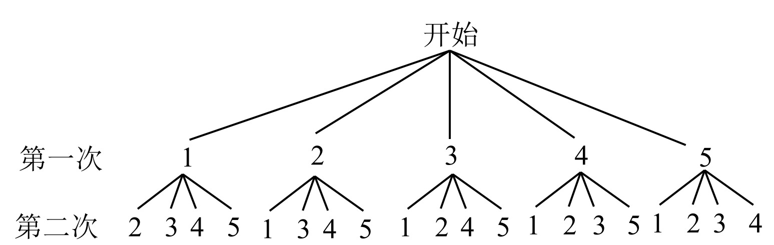
A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

答案

C

解析

解：画树状图如图所示：



∵共有 20 种等可能的结果，两次摸出的小球的标号之和大于 5 的有 12 种结果，

∴两次摸出的小球的标号之和大于 5 的概率为 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$；

故选：C．

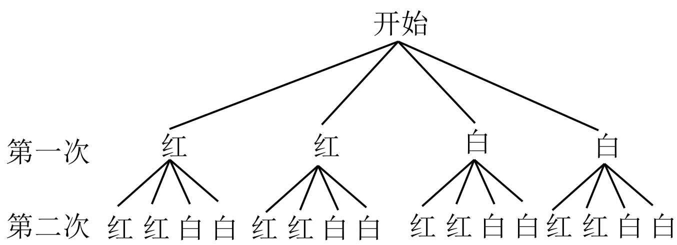
2．在一个不透明的袋子中，有 2 个白球和 2 个红球，它们只有颜色上的区别，从袋子中随机地摸出一个球记下颜色放回，再随机地摸出一个球，则两次都摸到白球的概率为__________．

答案

$\frac{1}{4}$

解析

解：



共有 16 种结果，两次都摸到白球的有 4 种结果，则概率是 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

故答案是：$\frac{1}{4}$.

总结

在做题前应提前进行判断，题目类型属于取出放回还是取出不放回类型，在使用树状图或者使用列表法求解时，根据题目类型进行设计和计算.

小试牛刀

1. 若 n 是一个两位正整数，且 n 的个位数字大于十位数字，则称 n 为“两位递增数”(如 13，35，56 等). 在某次数学趣味活动中，每位参加者需从由数字 1，2，3，4，5，6 构成的所有的“两位递增数”中随机抽取 1 个数，且只能抽取一次. 则抽取的“两位递增数”的个位数字与十位数字之积能被 10 整除的概率是____________.

2. 小红、小芳、小明在一起做游戏时需要确定做游戏的先后顺序，他们约定用“锤子、剪刀、布”的方式确定，请问在一个回合中三个都出“布”的概率是______________.

考点 2 概率综合

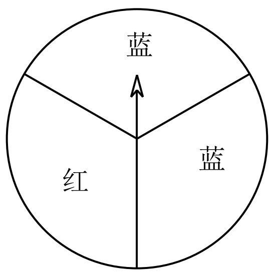
典例

1．某商场在促销活动中规定，顾客每消费 100 元就能获得一次抽奖机会．为了活跃气氛，设计了两个抽奖方案：

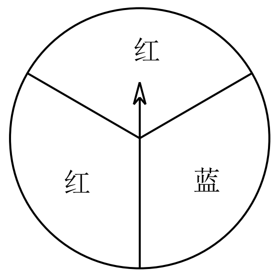
方案一：转动转盘 A 一次，转出红色可领取一份奖品；

方案二：转动转盘 B 两次，两次都转出红色可领取一份奖品．（两个转盘都被平均分成 3 份）

如果你获得一次抽奖机会，你会选择哪个方案？请用相关的数学知识说明理由．



转盘A



转盘B

解析

解：方案一：∵转盘 A 被平均分成 3 份，其中红色区域占 1 份，

∴转出红色可领取一份奖品的概率为：$\frac{1}{3}$

方案二：∵转盘 B 被平均分成 3 份，分别为红$_1$，红$_2$，蓝，可列表：

第一次 \ 第二次	红$_1$	红$_2$	蓝
红$_1$	(红$_1$，红$_1$)	(红$_2$，红$_1$)	(蓝，红$_1$)
红$_2$	(红$_1$，红$_2$)	(红$_2$，红$_2$)	(蓝，红$_2$)
蓝	(红$_1$，蓝)	(红$_2$，蓝)	(蓝，蓝)

由表格可知，一共有 9 种结果，每种结果出现的可能性相同，其中两次都转出红色的结果有 4 种，分别是(红$_1$，红$_1$)，(红$_1$，红$_2$)，(红$_2$，红$_1$)，(红$_2$，红$_2$)．

∴P(获得奖品）$=\frac{4}{9}>\frac{1}{3}$．

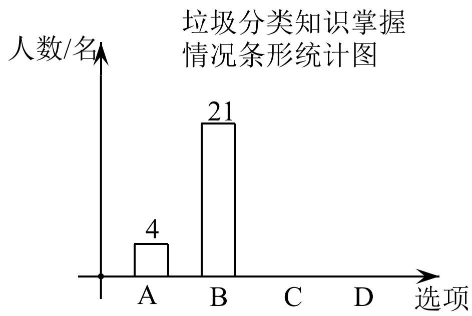
∴选择方案二

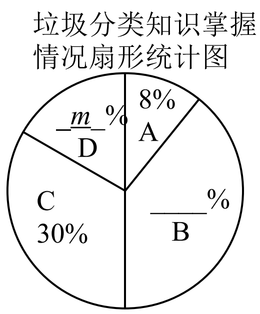
2．为响应市政府关于“垃圾不落地•市区更美丽”的主题宣传活动，郑州外国语中学随机调查了部分学生对垃圾分类知识的掌握情况，调查选项分为“A：非常了解；B：比较了解；C：了解较少；D：不了解．”四种，并将调查结果绘制成以下两幅不完整的统计图．请根据图中提供的信息，解答下列问题；

（1）求 $m=$__________，并补全条形统计图；

（2）若我校学生人数为 1000 名，根据调查结果，估计该校“非常了解”与“比较了解”的学生共有__________名；

（3）已知“非常了解”的是 3 名男生和 1 名女生，从中随机抽取 2 名向全校做垃圾分类的知识交流，请画树状图或列表的方法，求恰好抽到 1 男 1 女的概率．





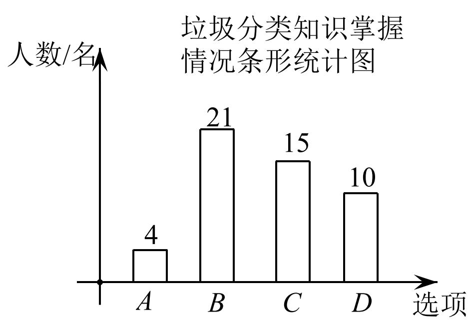
解析

解：（1）调查的总人数为 $4\div 8\%=50$，A 选项所占的百分比为 $\dfrac{21}{50}\times 100\%=42\%$，

所以 $m\%=1-8\%-42\%-30\%=20\%$，即 $m=20$，C 选项的人数为 $30\%\times 50=15$（人），

D 选项的人数为 $20\%\times 50=10$（人），

条形统计图为：



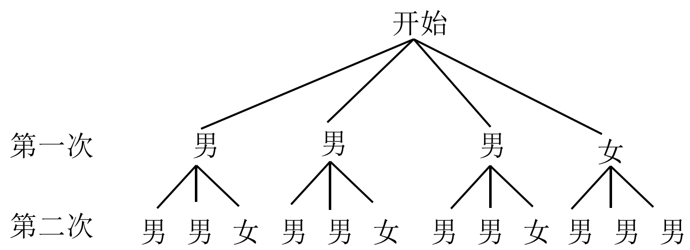
故答案为 20；

（2）$1000\times(8\%+42\%)=500$，

所以估计该校“非常了解”与“比较了解”的学生共有 500 名；

故答案为 500；

（3）画树状图为：



共有 12 种等可能的结果数，其中抽到 1 男 1 女的结果数为 6，

所以恰好抽到 1 男 1 女的概率 $=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

总结

在计算概率的时候，注意分辨题目类型，属于拿出放回类还是拿出不放回类，使用树状图或列表法画图的时候，两种方法的标准画法，避免出错；注意能够分辨出列表法和树状图的局限性以及区别之处.

小试牛刀

1．在郑州外国语中学的文化建设进程中，“打造书香校园”一直是其最重要的内容之一．我校为满足学生的阅读需求，欲购进一批学生喜欢的图书，学校组织学生会成员随机抽取部分学生进行问卷调查，被调查学生须从“文史类、社科类、小说类、生活类”中选择自己喜欢的一类，根据调查结果绘制了统计图（未完成），请根据图中信息，解答下列问题：

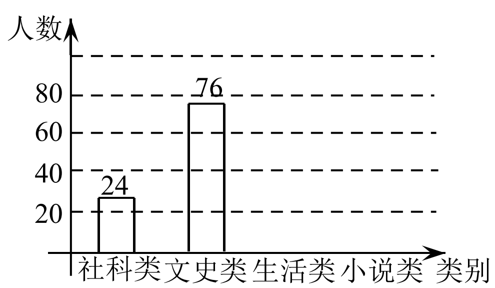


图1

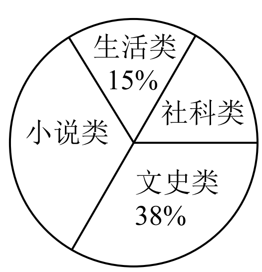


图2

（1）此次共调查了____________名学生；

（2）将条形统计图补充完整；

（3）小红与小明每人从四类图书中任选一种，用树状图或列表法求二人恰好选择文史类的概率是多少？

参考答案

考点 1

1. $\frac{1}{5}$

2. $\frac{1}{27}$

考点 2

1．（1）200．

（2）∵喜欢生活类书籍的人数占总人数的15%，

∴喜欢生活类书籍的人数为： $200\times15\%=30$ 人，

∴喜欢小说类书籍的人数为： $200-24-76-30=70$ 人，

如图所示：

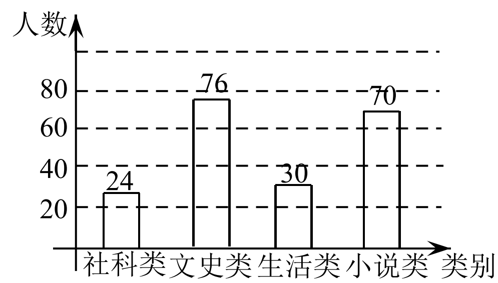
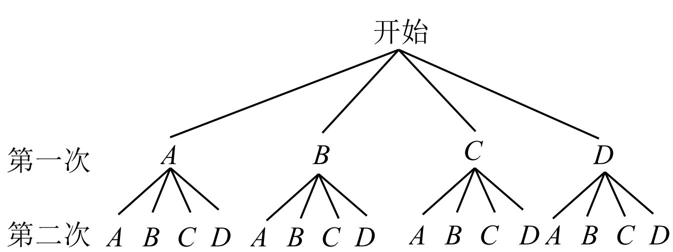


图1

（3）记社科类图书为 A 、文史类图书为 B 、生活类图书为 C 、小说类图书为 D ，

画树状图如下：



由树状图可知，共有 16 种等可能情况，其中二人恰好选择文史类的只有 1 种结果，

所以二人恰好选择文史类的概率为 $\frac{1}{16}$.

第五篇 反比例函数

考点1 反比例函数

知识小贴士

1．概念：形如 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的函数称为反比例函数；

三种表达形式：① $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ ② $y=kx^{-1}(k\neq 0)$ ③ $xy=k(k\neq 0)$

2．图象：

（1）形状：双曲线；

（2）位置：$\begin{cases}\text{当}k>0\text{时，图象位于第一、三象限；}\\ \text{当}k<0\text{时，图象位于第二、四象限；}\end{cases}$

（3）对称性：既是中心对称图形，又是轴对称图形；

3．性质：

$\begin{cases}\text{当}k>0\text{时，在每个象限内，}y\text{随着}x\text{的增大而减小；}\\ \text{当}k<0\text{时，在每个象限内，}y\text{随着}x\text{的增大而增大；}\end{cases}$

典例

1．若函数 $y=(m-2)x^{m^2-5}$ 是反比例函数，则 $m=$__________.

答案

-2

解析

由反比例函数的表达式 $y=kx^{-1}(k\neq 0)$ 可知：$\begin{cases}m^2-5=-1\\ m-2\neq 0\end{cases}$，解得 $m=-2$

2．若点 $(-5,a)$ 、$(-2,b)$、$(3,c)$ 在反比例函数 $y=\frac{-6}{x}$ 图象上，则下列结论中正确的是（　）

A． $a>b>c$　　B． $b>a>c$　　C． $c>a>b$　　D． $c>b>a$

答案

B

解析

解：由 $k=-6$ 可知，在每个象限内，y 随着 x 的增大而增大

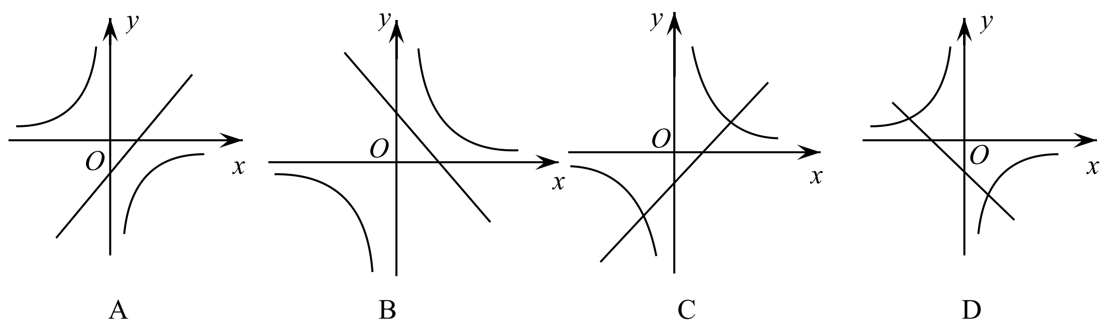
$\because -5<-2<0<3$

$\therefore 0<a<b$，$c<0$

$\therefore b>a>c$

故答案：B

3．一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\dfrac{a-b}{x}$，其中 $ab<0$，a、b 为常数，它们在同一坐标系中的图象可以是（　　）



答案

C

解析

A．根据一次函数可判断 $a>0$，$b<0$，根据反比例函数可判断 $a-b<0$，矛盾，故此选项错误；

B．根据一次函数可判断 $a<0$，$b>0$，根据反比例函数可判断 $a-b>0$，矛盾，故此选项错误；

C．根据一次函数可判断 $a>0$，$b<0$，即 $ab>0$，根据反比例函数可判断 $a-b>0$，故此选项正确；

D．根据一次函数可判断 $a<0$， $b<0$，即 $ab>0$，故不符合题意；

故答案：C．

总结

1．利用增减性比较函数值大小时，需要注意点要在同一象限内；若点不在同一象限内，可通过函数值的正负性比较；

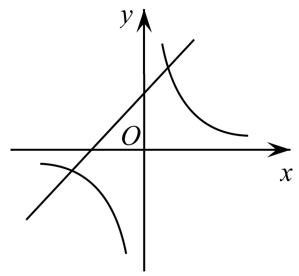
2．函数图象的共存问题，可通过排除法解决．

小试牛刀

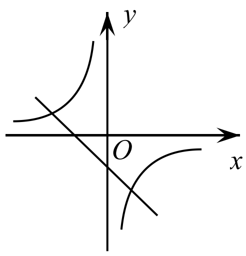
1．如果点 $A(-1, y_1)$、$B(1, y_2)$、$C(2, y_3)$ 是反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$ 图象上的三个点，则下列结论正确的是(　　)

A．$y_1>y_3>y_2$　　B．$y_3>y_2>y_1$　　C．$y_2>y_1>y_3$　　D．$y_3>y_1>y_2$

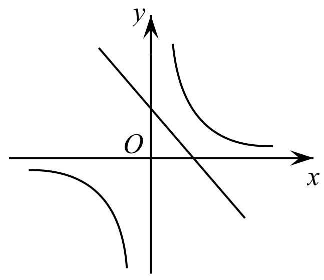
2．若 $ab>0$，则一次函数 $y=ax-b$ 与反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$ 在同一坐标系中的大致图象是(　　)



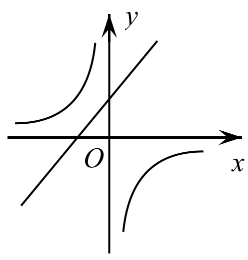
A．



B．



C．



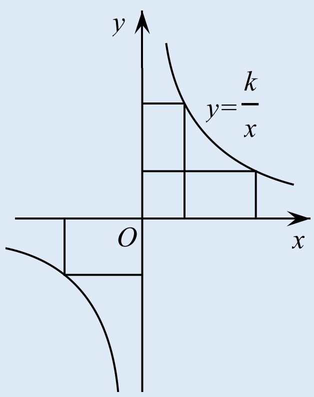
D．

考点 2　k 的几何意义

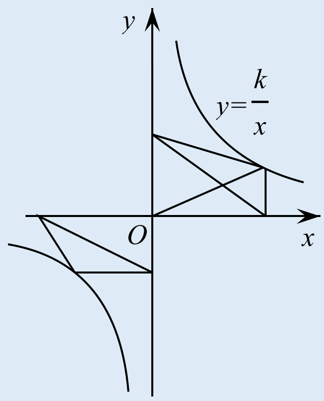
知识小贴士

1．反比例函数面积不变性（即 k 的几何意义）：一般地，反比例函数图象上任意一点与两坐标轴围成的矩形面积等于反比例系数 k 的绝对值，即 $|k|$．

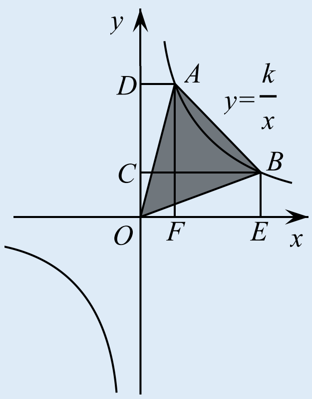
2．常见结构：



$S_{矩}=|k|$



$S_{三角形}=\frac{|k|}{2}$

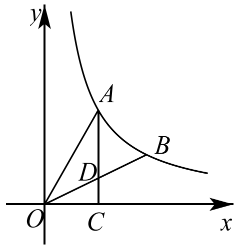


$S_{\triangle AOB}=S_{梯ABCD}=S_{梯ABEF}$

典例

1．如图，A、B 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的两点，过 A 点做 $AC\perp x$ 轴，交 OB 于 D 点，垂足为 C，若 $\triangle ADO$ 的面积为 2，D 为 OB 的中点，则 k 的值为（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　　B．$\frac{8}{3}$　　　C．3　　　D．$\frac{16}{3}$

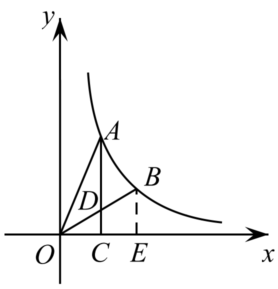


答案

D

解析

解：作 $BE\perp x$ 轴于点 E



$\because A$、B在函数$y=\dfrac{k}{x}$的图象上

$\therefore S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOE}=\dfrac{k}{2}$

可证$\triangle ODC\backsim\triangle OBE$

$\because D$为OB的中点

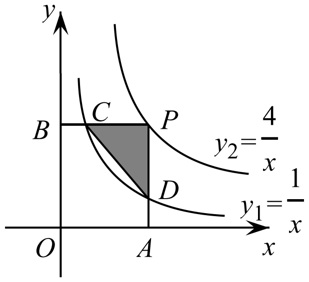
$\therefore S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle OBE}=\dfrac{1}{8}k$

$\therefore S_{\triangle OAD}=\dfrac{3}{8}k=2$

$\therefore k=\dfrac{16}{3}$

故答案：D

2．如图，已知反比例函数 $y_1=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$， $y_2=\dfrac{4}{x}$ $(x>0)$，点 P 为反比例函数 $y_2=\dfrac{4}{x}$ 图象上的一点，且 $PA\perp x$ 轴于点 A， $PB\perp y$ 轴于点 B，PA、PB 分别交双曲线 $y_1=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 于 D、C 两点，则 $\triangle PCD$ 的面积为__________.



答案

$\dfrac{9}{8}$

解析

解：作 $CE\perp x$ 轴于点 E ，作 $DF\perp y$ 轴于点 F

$\because C$、D在函数$y=\dfrac{1}{x}$的图象上

$\therefore S_{矩形CBOE}=S_{矩形DFOA}=1$

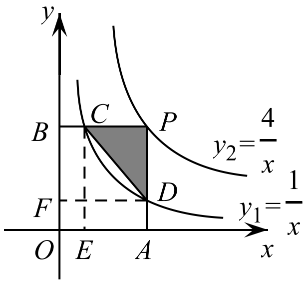
$\because P$在函数$y=\dfrac{4}{x}$的图象上

$\therefore S_{矩形PBOA}=4$

$\therefore \dfrac{BC}{PB}=\dfrac{DA}{PA}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore S_{\triangle PDC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}S_{矩形PBOA}=\dfrac{9}{8}$

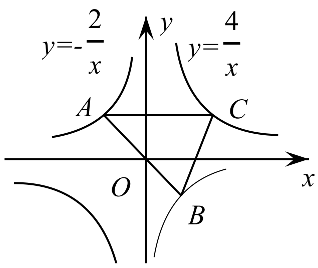
故答案：$\dfrac{9}{8}$



小试牛刀

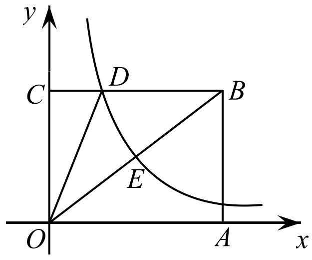
1．如图，在平面直角坐标系中，函数 $y=kx$ 与 $y=-\dfrac{2}{x}$ 的图象交于 A，B 两点，过 A 作 y 轴的垂线，交函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象于点 C，连接 BC，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8



2．已知四边形 $OABC$ 是矩形，边 OA 在 x 轴上，边 OC 在 y 轴上，双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 与边 BC 交于点 D、与对角线 OB 交于点中点 E，若 $\triangle OBD$ 的面积为 10，则 k 的值是(　　)

A．10　　B．5　　C．$\dfrac{10}{3}$　　D．$\dfrac{20}{3}$



总结

根据 k 的几何意义：求 k 与求图形面积之间互相转化，需要掌握常见的基本面积结构及其推论；此类题目还可以根据反比例函数表达式设出点的坐标，表示出线段长、图形面积，根据面积建立等式；或者根据几何图形的特征设出线段长，表示出点的坐标，根据点满足的表达式建等式.

考点 3 反比例函数与几何综合

知识小贴士

1．反比例函数与不等式：利用图象解不等式，先找交点，以交点和 y 轴为界，上大下小找范围；

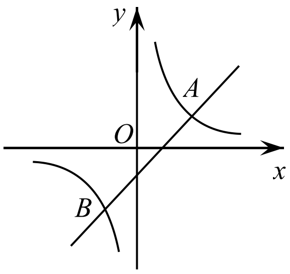
2． 反比例函数与几何综合的处理思路

①函数图象和几何图形的交点是解题的突破口．可将函数特征与几何特征综合在一起进行研究.

②对函数特征和几何特征进行转化、组合，列方程求解.

典例

1．如图，一次函数 $y_1=x-1$ 与反比例函数 $y_2=\dfrac{2}{x}$ 的图象交于点 $A(2,1)$，$B(-1,-2)$，请观察图象直接写出 $y_1>y_2$ 的 x 的取值范围__________.



答案

$x>2$ 或 $-1<x<0$

解析

解：由图象可得在交点 A 的右边以及交点 B 与 y 轴之间的部分，对于相同的自变量，一次函数的函数值总大于反比例函数的函数值，

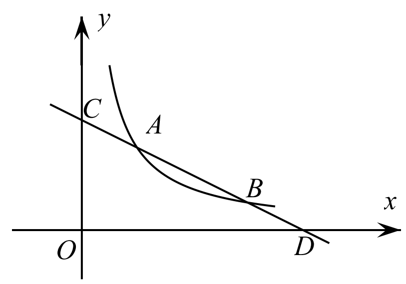
$\because$ 两图象交于点 $A(2,1)$ 、 $B(-1,-2)$，

$\therefore$ 使 $y_1 > y_2$ 的 x 的取值范围是： $x > 2$ 或 $-1 < x < 0$.

2．直线 $y = kx + b$ 与反比例函数 $y = \dfrac{6}{x}\left(x > 0\right)$ 的图象交于点 $A\left(m,3\right)$ 和点 $B\left(6,n\right)$，与坐标轴分别交于点 C 和点 D.

（1）求直线 AB 的解析式；

（2）若点 P 是 x 轴上一动点，当 $\triangle COD$ 与 $\triangle ADP$ 相似时，求点 P 的坐标.



解析

解：（1）$\because$ $y = kx + b$ 与反比例函数 $y = \dfrac{6}{x}(x > 0)$ 的图象分别交于点 $A(m,3)$ 和点 $B(6,n)$，

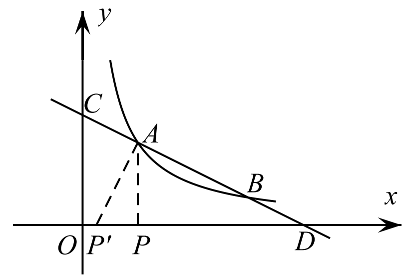
$\therefore m = 2$， $n = 1$，

$\therefore A(2,3)$， $B(6,1)$，

则有 $\begin{cases} 2k + b = 3 \\ 6k + b = 1 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases}$，

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$



（2）如图①当 $PA \perp OD$ 时，

易知 $\triangle ADP \backsim \triangle CDO$，

此时 $P(2,0)$．

②当 $AP'\perp CD$ 时，易知 $\triangle P'DA\backsim\triangle CDO$，

$\because$ 直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$，

$\therefore$ 直线 $P'A$ 的解析式为 $y=2x-1$，

令 $y=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，

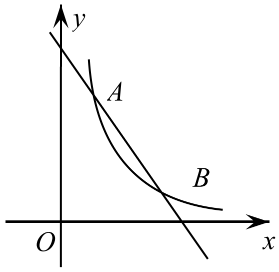
$\therefore P'(\frac{1}{2},0)$，

综上所述，满足条件的点 P 坐标为 $(2,0)$ 或 $(\frac{1}{2},0)$．

3．如图，一次函数 $y=-x+4$ 的图象与反比例 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的图象交于 $A(1,a)$，$B(b,1)$ 两点.

（1）求点 A，B 的坐标及反比例函数的表达式；

（2）在 x 轴上找一点，使 $PA+PB$ 的值最小，求满足条件的点 P 的坐标.



解析

解：（1）把点 $A(1,a)$，$B(b,1)$ 代入一次函数 $y=-x+4$，

得 $a=-1+4$，$1=-b+4$，

解得 $a=3$，$b=3$，

$\therefore A(1,3)$，$B(3,1)$；

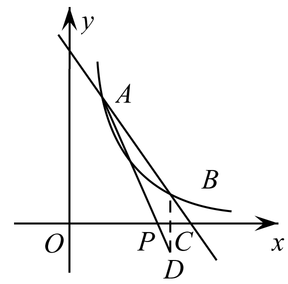
点 $A(1,3)$ 代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 得 $k=3$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{3}{x}$；

（2）作点 B 作关于 x 轴的对称点 D，交 x 轴于点 C，连接 AD，交 x 轴于点 P，此时 $PA+PB$ 的值最小，

$\therefore D(3,-1)$，

设直线 AD 的解析式为 $y=mx+n$，



把 A，D 两点代入得：$\begin{cases} m+n=3 \\ 3m+n=-1 \end{cases}$，

解得 $m=-2$，$n=5$，

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为 $y=-2x+5$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{5}{2}$，

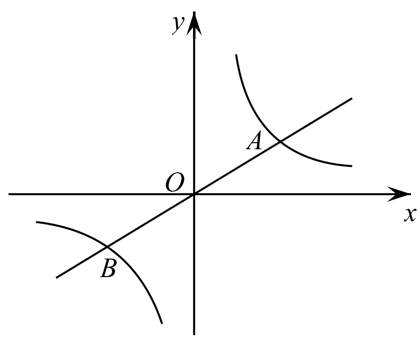
$\therefore$ 点 P 坐标 $(\frac{5}{2}，0)$．

4．如图，已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 交于 A，B 两点，且点 A 的横坐标为 4．

（1）求 k 值；

（2）直接写出当 x 取何值时，一次函数的值小于反比例函数的值；

（3）过原点 O 的另一条直线 l 交双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 于 P，Q 两点（P 点在第一象限），若由点 A，B，P，Q 为顶点组成的四边形面积为 24，求点 P 的坐标．



解析

解：（1）$\because$ 点 A 横坐标为 4，

把 $x=4$ 代入 $y=\frac{1}{2}x$ 中，得 $y=2$，

$\therefore A(4,2)$，

$\because$ 点 A 是直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与与双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的交点，

$\therefore k=4\times 2=8$；

（2）$\because A(4,2)$，

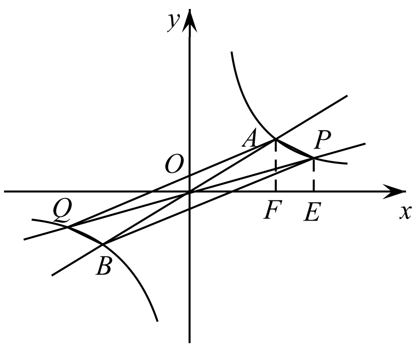
$\therefore$ 根据正比例函数和反比例函数图象的对称性，则 $B(-4,-2)$，

由图象可知，当 $x<-4$ 或 $0<x<4$ 时，一次函数的值小于反比例函数的值；

（3）$\because$ 反比例函数图象是关于原点 O 的中心对称图形，

$\therefore OP=OQ$，$OA=OB$，

$\therefore$ 四边形 $APBQ$ 是平行四边形，



$\therefore S_{\triangle POA}=\frac{1}{4}S_{平行四边形APBQ}=\frac{1}{4}\times 24=6$，

设点 P 的横坐标为 $m(m>0$ 且 $m\neq 4)$，

得 $P(m,\frac{8}{m})$，

过点 P、A 分别做 x 轴的垂线，垂足为 E、F，

$\because$ 点 P、A 在双曲线上，

$\therefore S_{\triangle POE}=S_{\triangle AOF}=4$，，

$\therefore S_{梯形PEFA}=S_{\triangle POA}=6$．

$\therefore \frac{1}{2}(2+\frac{8}{m})\cdot|4-m|=6$．

$\therefore m_1=2$，$m_2=8$（负值舍去），

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $P(2,4)$ 或 $P(8,1)$．

总结

反比例函数与几何综合常见的类型：

（1）反比例函数与一次函数综合，求表达式．可将一个（两个）已知点的坐标代入反比例函数表达式（一次函数）求得表达式或者将已知一个坐标的点代入已知表达式中得到此点坐标；

（2）反比例函数与不等式：利用图象解不等式，先找交点，以交点和 y 轴为界，上大下小找范围．需要注意反比例函数自变量的取值范围是 $x\neq 0$；

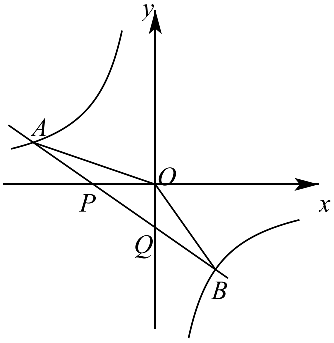
（2）反比例函数背景下的相似三角形存在性问题：先确定对应关系，分类讨论，根据对应边成比例或对应角相等建等式；

（4）反比例函数背景下的面积问题：利用函数图象上点的坐标表示线段长时注意线段长的非负性；

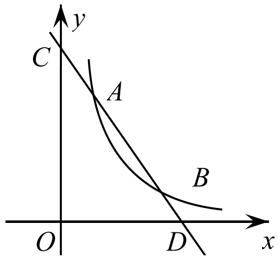
小试牛刀

1. 如图，已知直线 $y=k_1x+b$ 与 x 轴、y 轴相交于 P、Q 两点，与 $y=\dfrac{k_2}{x}$ 的图象相交于 $A(-2,m)$ 、$B(1,n)$ 两点，连接 OA、OB，给出下列结论：① $k_1k_2<0$；② $m+\dfrac{1}{2}n=0$；③ $S_{\triangle AOP}=S_{\triangle BOQ}$；④不等式 $k_1x+b>\dfrac{k_2}{x}$ 的解集是 $x<-2$ 或 $0<x<1$，其中正确的结论有（　　）个

A．1　　B．2　　C．3　　D．4



2．直线 $y_1=kx+b$ 与反比例函数 $y_2=\dfrac{8}{x}(x>0)$ 的图象分别交于点 $A(m,4)$ 和点 $B(n,2)$，与坐标轴分别交于点 C 和点 D．若点 P 是 x 轴上一动点，当△COD 与△ADP 相似时，则点 P 的坐标为__________.

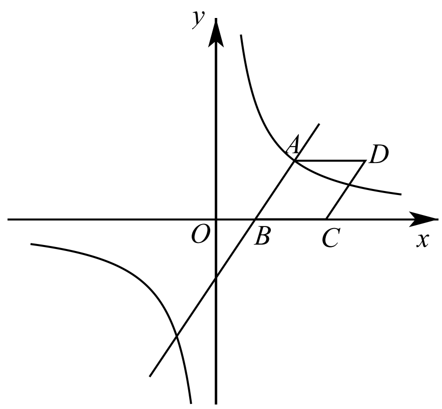


3．如图，已知一次函数 $y=\frac{3}{2}x-3$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交于点 $A(4，n)$，与 x 轴相交于点 B.

（1）填空：n 的值为__________，k 的值为__________；

（2）以 AB 为边作菱形 $ABCD$，使点 C 在 x 轴正半轴上，点 D 在第一象限，求点 D 的坐标；

（3）观察反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象，当 $y\geq-2$ 时，请直接写出自变量 x 的取值范围.



考点 4　定义新函数

典例

1. 参照学习函数的过程与方法，探究函数 $y=\frac{x-2}{x}(x\neq 0)$ 的图象与性质，因为 $y=\frac{x-2}{x}=1-\frac{2}{x}$，

即 $y=-\frac{2}{x}+1$，所以我们对比函数 $y=-\frac{2}{x}$ 来探究.

列表：

x	…	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	…
$y=-\frac{2}{x}$	…	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	…
$y=\frac{x-2}{x}$	…	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	3	5	-3	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	…

描点：在平面直角坐标系中以自变量 x 的取值为横坐标，以 $y=\frac{x-2}{x}$ 相应的函数值为纵坐标，描出相应的点如图所示；

（1）请把 y 轴左边各点和右边各点分别用一条光滑曲线，顺次连接起来；

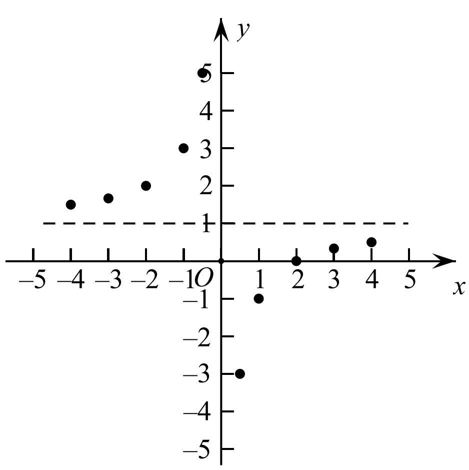
（2）观察图象并分析表格，回答下列问题：

①当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而__________；（“增大”或“减小”）

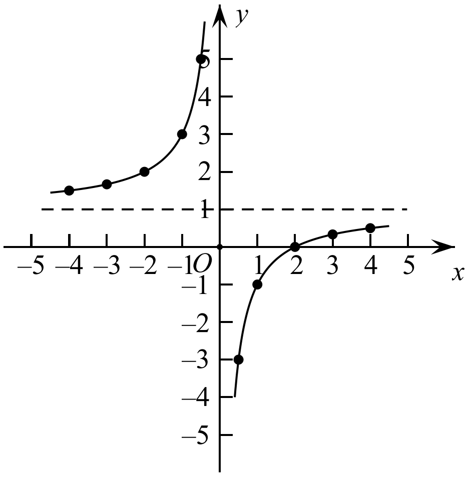
② $y=\frac{x-2}{x}$ 的图象是由 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象向_____平移_____个单位而得到的；

③图象关于点__________中心对称.（填点的坐标）

（3）函数 $y=\frac{x-2}{x}$ 与直线 $y=-2x+1$ 交于点 A，B，求 $\triangle AOB$ 的面积.



解析



解：（1）函数图象如图所示：

（2）①当 $x<0$ 时， y 随 x 的增大而增大；

② $y=\dfrac{x-2}{x}$ 的图象是由 $y=-\dfrac{2}{x}$ 的图象向上平移 1 个单位而得到；

③图象关于点 $(0,1)$ 中心对称.

故答案为：增大，上，1，$(0,1)$；

（3）根据题意得： $\dfrac{x-2}{x}=-2x+1$，解得： $x=\pm1$，

当 $x=1$ 时， $y=-2x+1=-1$，

当 $x=-1$ 时， $y=-2x+1=3$，

$\therefore$ 交点为 $(1,-1)$， $(-1,3)$，

当 $y=0$ 时， $-2x+1=0$， $x=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \triangle AOB$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times(3+1)\times\dfrac{1}{2}=1$.

小试牛刀

1．有这样一个问题：探究函数 $y=\frac{x-1}{x-3}$ 的图象与性质．小彤根据学习函数的经验，对函数 $y=\frac{x-1}{x-3}$ 的图象与性质进行了探究．

下面是小彤探究的过程，请补充完整：

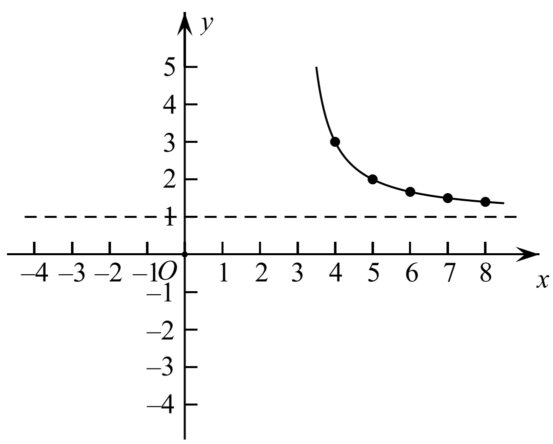
（1）函数 $y=\frac{x-1}{x-3}$ 的自变量 x 的取值范围是__________；

（2）下表是 y 与 x 的几组对应值：

x	…	-2	-1	0	1	2	4	5	6	7	8	…
y	…	$\frac{3}{5}$	m	$\frac{1}{3}$	0	-1	3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	…

则 m 的值为__________；

（3）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，描出了以上表中各对对应值为坐标的点，根据描出的点，画出了图象的一部分，请根据剩余的点补全此函数的图象；



（4）观察图象，写出该函数的一条性质__________；

（5）若函数 $y=\frac{x-1}{x-3}$ 的图象上有三个点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，且 $x_1<3<x_2<x_3$，

则 y_1、y_2、y_3 之间的大小关系为__________；

参考答案

考点 1

典例

1．A

2．C

考点 2

典例

1．C

2．D

考点 3

典例

1．C

2．(2，0) 或 (−2，0)

解：∵点 $A(m,4)$ 和点 $B(n,2)$ 在反比例函数 $y_2=\frac{8}{x}(x>0)$ 的图象上，

$\therefore 4=\frac{8}{m}$， $2=\frac{8}{n}$，

解得 $m=2$， $n=4$，

即 $A(2,4)$， $B(4,2)$

把 $A(2,4)$， $B(4,2)$ 两点代入 $y_1=kx+b$ 中得 $\begin{cases}2k+b=4\\4k+b=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-1\\b=6\end{cases}$，

所以直线 AB 的解析式为： $y=-x+6$；

当 $x=0$ 时， $y=6$，

$\therefore C(0,6)$，

$\therefore OC=6$，

当 $y=0$ 时， $x=6$，

$\therefore D$ 点坐标为 $(6, 0)$

$\therefore OD = 6$，

$\therefore CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 6\sqrt{2}$，

$\because A(2, 4)$，

$\therefore AD = \sqrt{(6-2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$，

设 P 点坐标为 $(a, 0)$，由题可以，点 P 在点 D 左侧，则 $PD = 6 - a$

由 $\angle CDO = \angle ADP$ 可得

①当 $\triangle COD \backsim \triangle APD$ 时，$\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{PD}{OD}$，

$\therefore \dfrac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{6-a}{6}$，解得 $a = 2$，

故点 P 坐标为 $(2, 0)$

②当 $\triangle COD \backsim \triangle PAD$ 时，$\dfrac{AD}{OD} = \dfrac{PD}{CD}$，

$\therefore \dfrac{4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{6-a}{6\sqrt{2}}$，解得 $a = -2$，

即点 P 的坐标为 $(-2, 0)$

因此，点 P 的坐标为 $(2, 0)$ 或 $(-2, 0)$ 时，$\triangle COD$ 与 $\triangle ADP$ 相似，

故答案 $(2, 0)$ 或 $(-2, 0)$．

3．解：（1）把点 $A(4, n)$ 代入一次函数 $y = \dfrac{3}{2}x - 3$，可得 $n = \dfrac{3}{2} \times 4 - 3 = 3$；

把点 $A(4, 3)$ 代入反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}$，可得 $3 = \dfrac{k}{4}$，

解得 $k = 12$．

（2）$\because$ 一次函数 $y = \dfrac{3}{2}x - 3$ 与 x 轴相交于点 B，

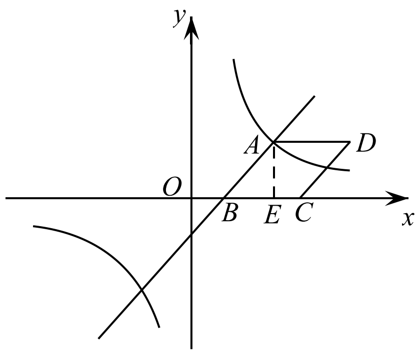
$\therefore \dfrac{3}{2}x - 3 = 0$，

解得 $x = 2$，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 0)$，

如图，过点 A 作 $AE \perp x$ 轴，垂足为 E，

$\because A(4, 3)$，$B(2, 0)$，



$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=AD=\sqrt{13}$， $AD//BC$，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(4+\sqrt{13}，3)$．

（3）当 $y=-2$ 时， $-2=\dfrac{12}{x}$，解得 $x=-6$．

故当 $y\geqslant -2$ 时，自变量 x 的取值范围是 $x\leqslant -6$ 或 $x>0$．

考点 4

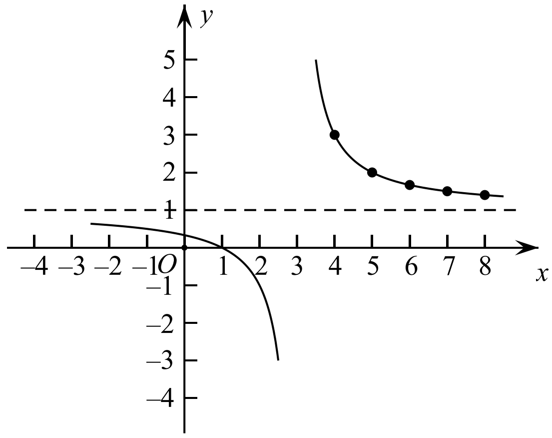
典例

1．解：（1）$\because x-3\neq 0$，

$\therefore x\neq 3$；

（2）当 $x=-1$ 时， $y=\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$；

（3）如图所示：



（4）由图象可得，当 $x>3$ 时， y 随 x 的增大而减小（答案不唯一）；

（5）由图象可得，当 $x_1<3$ 时， $y_1<1$；当 $3<x_2<x_3$ 时， $1<y_3<y_2$．

$\therefore y_1$、 y_2、 y_3 之间的大小关系为 $y_1<y_3<y_2$．

故答案为： $x\neq 3$； $\dfrac{1}{2}$；当 $x>3$ 时， y 随 x 的增大而减小； $y_1<y_3<y_2$．