

七年级备考系列

——期中易错百题



平行线中学教材
2020 秋季

PARALLEL EDUCATION



编者语

本书是平行线“轻产品”系列丛书之备考系列。平行线“轻产品”系列丛书包含备考系列丛书、专题系列丛书、中考系列丛书等,旨在主干教材之外打造具有高质量高品质的应试丛书,解决学生学习过程中会而不得分、重难点无法突破,解题方法不够优化等问题,为孩子每次重大考试取得好成绩保驾护航。

备考系列丛书,包含月考备考、期中备考、期末备考。无论月考、期中、期末都涵盖真题备考、易错百题精练。

真题备考,选自往年郑州市各学校的考试真题,提供详细答案,用于孩子考试前的计时训练,查漏补缺。

易错百题精练,包含考试章节中各个考点的总结、典型例题、答案及解析、预测练习,使得学生能在基础知识、典型例题的引导下进行练习;由易至难、层层深入的训练使得学生的数学知识得到巩固和提升,同时不断渗透数学思想方法,培养学生数学思维能力。

本书在编写过程中力求完美,但难免出现纰漏,希望各位学生、家长和老师对于书中出现的疏漏和错误,请不吝批评指正。

目录



第一篇	丰富的图形世界	1
第二篇	有理数及其运算	10
第三篇	整式及其加减	28
第四篇	基本平面图形	47

考情分析



七年级期中考试即将来临，各位小瓶盖儿们是不是有点小激动，想在期中考试中大展身手！但其中必然有些同学有所担忧，比如有些同学平时未整理错题本，不知道如何高效的复习及查漏补缺。古人云：“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”，没错，一场及时雨即将来临！

在这决战时刻，平行线集各位优秀教师的力量为各位小瓶盖儿们倾情奉献《七年级备战期中一易错百题》，本书将为大家提供最高效、最完善的查漏补缺的方法，同时基础与拔高兼顾，无论你现在的数学是否优秀，相信这本书会是你备战期中的得力助手！

俗话说：“知己知彼，百战不殆”，以下是去年郑州市七年级数学各个学校考试每一章节的重要考点：

章节	分值占比	重要考点
第一章 丰富的图形世界	18%	带图案的展开与折叠，截几何体，最多最少问题，正方体展开图，三视图，相邻相对面
第二章 有理数及其运算	50%	概念类（有理数及其分类、相反数、数轴、绝对值、倒数、科学记数法），绝对值性质，绝对值化简，绝对值几何意义，数轴作用，动点问题，混合计算、材料题，其他计算，有理数应用
第三章 整式及其加减	26%	代数式定义，书写规范，单项式基础概念，多项式基础概念，同类项，化简求值、整体代入、不含无关
第四章 基本平面图形	6%	线段、直线、射线相关概念，线段的相关计算

就考情来看，每个章节在期中考试中所占分值以及具体的考点平行线教材上都已全部覆盖。

第一章丰富图形世界整体难度不大，平行线暑期教材第5讲全面覆盖所有考试考点。

第二章有理数相关概念、计算基础题在平行线小升初衔接课第1、2、3、4、5讲已全部覆盖到，对于有理数计算易错题在暑期第1讲、秋季第3讲计算专题再次巩固强化讲解，对于学生比较难的绝对值化简、几何意义以及数轴上动点问题平行线秋季教材上第1讲有针对数轴专题、第2讲有针对绝对值专题，易错题以及重难点全部覆盖。

第三章整式及其加减相关概念以及整式化简求值在平行线暑期教材第2、3讲全部覆盖，对于学生有一定难度的整体代入、不含无关问题在平行线秋季教材上第5讲针对性讲解。

同学们在做题目时，可以由易到难先重点攻克自己薄弱的版块，其他版块做好时间规划，限

时训练，注意计算能力的培养，对于基础知识理解并掌握，为初中的后续学习做准备！

第一篇 丰富的图形世界



考点 1 展开与折叠

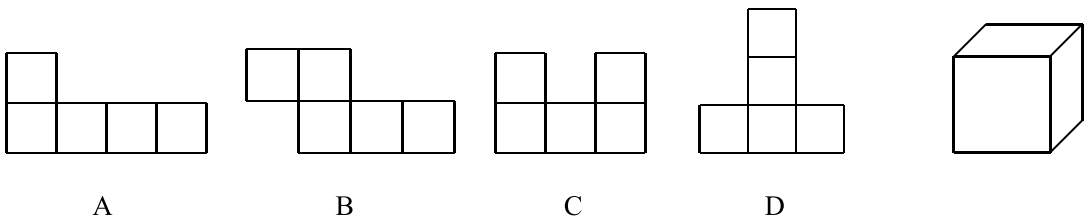
知识小贴士

1. 对于带图案的正方体的展开与折叠，从“顶点，棱，面”入手，通过抓不变量，解决立体图形的展开与折叠问题.
2. 解题技巧：
 - ①面：相邻不相对；
 - ②棱：一条棱剪开是两条边；
 - ③顶点：一个顶点连接 3 条棱.



典例

1. 如图是一无盖的正方体盒子，下列展开图不能叠合成无盖正方体的是（ ）



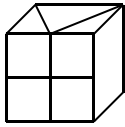
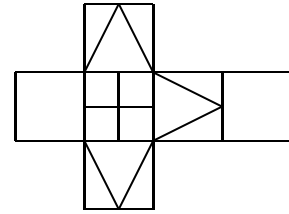
答案

C

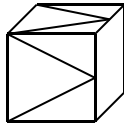
解析

正方体展开图主要有 1-4-1，2-3-1，2-2-2，3-3 四种类型，其中 A、B、D 符合四种类型中去掉一个小正方形后的展开图，故可以拼成一个无盖的正方体，但“田、凹”一定不能拼成正方体。故选 C.

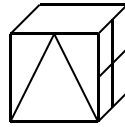
2. 如图，是一个正方体的展开图，这个正方体可能是（ ）



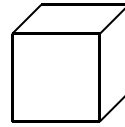
A



B



C



D

答案

B

解析

从面的角度出发，可以发现“十”字与三角形的边正对，故可以排除 A、C，再结合展开图只有 2 个空白面，故排除 D，故选 B.



小试牛刀

1. 将图 1 围成图 2 的正方体，则图 1 中的红心“♥”标志所在的正方形是正方体中的（ ）

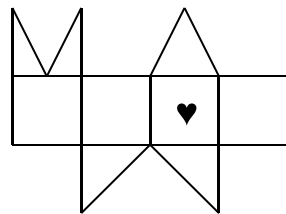


图 1

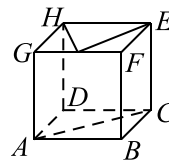


图 2

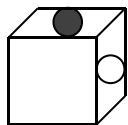
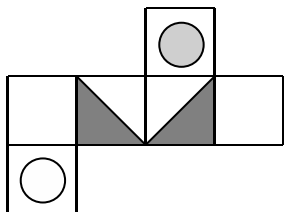
A. 面 $CDHE$

B. 面 $BCEF$

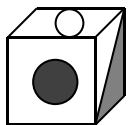
C. 面 $ABFG$

D. 面 $ADHG$

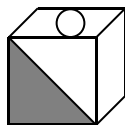
2. 下图是某一立方体的侧面展开图，则该立方体是（ ）



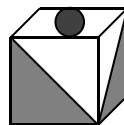
A



B



C



D



考点2 截面

知识小贴士

1. 用一个平面去截一个几何体，截出的面叫做截面。
2. 截面的形状随截法的不同而改变，一般为多边形或圆，也可能是不规则图形，一般地，用一个平面去截一个几何体，与几何体的几个面相交就得到几条交线，截面就是几边形，因此，若一个几何体有几个面，则截面最多为几边形。



典例

1. 用一个平面截下列几何体：①长方体，②六棱柱，③球，④圆柱，⑤圆锥，截面能得到三角形的是_____。（填写序号即可）

答案

①②⑤

解析

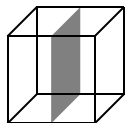
- ①长方体能截出三角形；
- ②六棱柱能截出三角形；
- ③球不能截出三角形；
- ④圆柱不能截出三角形；
- ⑤圆锥能截出三角形；

故截面可能是三角形的有①②⑤.

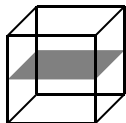


小试牛刀

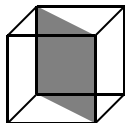
3. 如图, 用一个平面去截一个正方体, 截面相同的有_____.



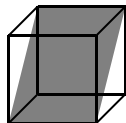
①



②



③



④

4. 用一个平面去截下面的几何体: 正方体、长方体、圆柱、圆锥, 截面的形状不可能为三角形的几何体是_____.



考点3 三视图

知识小贴士

1. 主视图主要确定物体的长和高, 左视图确定物体的宽和高, 俯视图确定物体的长和宽.
2. 主视图可以确定列数; 左视图可以确定行数; 俯视图可以确定行数和列数.

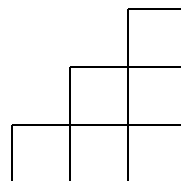
注: ①出发点是俯视图;

②若题中没有俯视图, 可以通过主左两个视图尝试先确定.



典例

1. n 个单位小立方体叠放在桌面上, 所得几何体的主视图和俯视图均如图所示. 那么 n 的最大值与最小值的和是_____.



答案

23

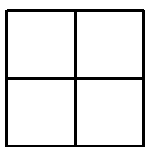
解析

由主视图可以看出该几何体的列数，在俯视图的基础上，确定每个位置小立方体最多个数和最少个数，最多个数为 14 个，最少个数为 9 个，那么 n 的最大和最小值的和是 $14 + 9 = 23$.
故答案为：23.

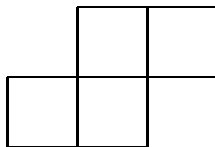


小试牛刀

5. 如图所示是用小立方块搭成的一个几何体从上面和左面看到的形状图，搭成这样的几何体，至少需要_____个小立方块.

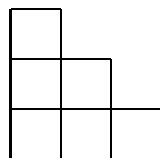


从左面看

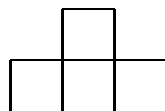


从上面看

6. 如图是用小立方块搭成的几何体的主视图和俯视图，问这样的几何体最多需要多少小立方块，最少需要多少小立方块，请画出最多和最少时的左视图（各画一种）.



主视图



俯视图



考点 4 几何图形的表面积与体积

知识小贴士

1. 答题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答，确定小正方体的数目及涂色面的个数.



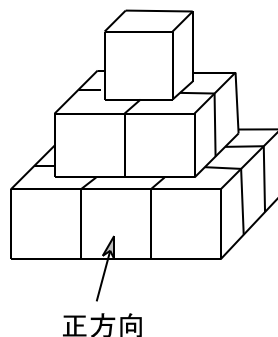
典例

1. 把棱长为 1cm 的若干个小正方体摆放成如图所示的几何体，然后在露出的表面上涂上颜色（不含底面）

(1) 该几何体中有_____个小正方体；

(2) 其中两面被涂到的有_____个小正方体；没被涂到的有_____个小正方体；

(3) 求出涂上颜色部分的总面积.



答案

(1) 14; (2) 4, 1; (3) 33cm^2

解析

(1) 由图可得，

该几何体中有： $1+4+9=14$ （个）小正方体.

(2) 由图可得，

其中两面被涂到的有 4 个小正方体；没被涂到的有 1 个小正方体.

(3) 涂上颜色部分的总面积为： $1 \times 1 \times (9 + 6 \times 4) = 33\text{cm}^2$

即涂上颜色部分的总面积为 33cm^2 .



小试牛刀

7. 已知长为 6cm ，宽为 4cm 的长方形是一个圆的侧面展开图，则圆柱的体积为_____.（结果保留 π ）

8. 一个几何体由若干个棱长为 2 的小立方体组成，其从上面看到的形状如图所示，其中的数字表示在该位置上的小立方体的个数，则：

- (1) 请画出这个几何体从正面看和从左面看的图形；
- (2) 请计算这个几何体的体积和表面积。

3	2	3
2	1	
1		



考点 5 几何图形旋转

知识小贴士

1. 明确旋转边及旋转后的几何体，利用公式计算几何体的体积。
2. 常见类型：直角三角形绕直角边旋转→圆锥；长方形旋转→圆柱。

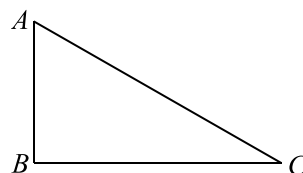


典例

1. 如图所示，已知直角三角形纸板 ABC ，直角边 $AB = 4\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ 。

(1) 将直角三角形纸板绕三角形的边所在的直线旋转一周，能得到_____种大小不同的几何体？

(2) 分别计算绕三角形直角边所在的直线旋转一周，得到的几何体的体积？（圆锥的体积 $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ，其中 π 取 3）



答案

(1) 3; (2) 256cm^3 或 128cm^3

解析

(1) 将直角三角形纸板 ABC 绕三角形的三条边所在的直线旋转一周，能得到 3 种大小不同的几何体.

(2) 以 AB 为轴:

$$\frac{1}{3} \times 3 \times 8^2 \times 4 = \frac{1}{3} \times 3 \times 64 \times 4 = 256\text{cm}^3$$

以 BC 为轴:

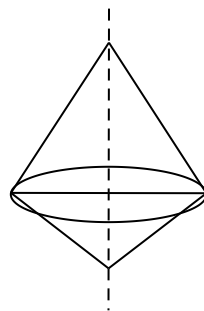
$$\frac{1}{3} \times 3 \times 4^2 \times 8 = \frac{1}{3} \times 3 \times 16 \times 8 = 128\text{cm}^3$$



小试牛刀

9. 一个直角三角尺，两直角边长 6 和 8，如果绕着直角边所在的直线旋转一周，得到的几何体的体积为多少？（结果保留 π ）

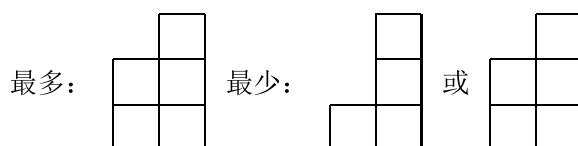
10. 如图，有一直角三角形三条边长分别是 15cm、20cm、25cm，求绕着它的斜边所在直线旋转一周形成的立体图形的体积_____ cm^3 . (π 取 3)





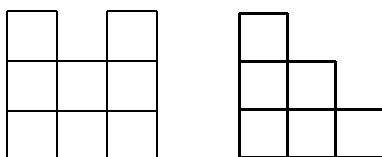
参考答案

1. A
2. D
3. ①和②, ③和④
4. 圆柱
5. 6
6. 最多需要 8 个, 最少需要 7 个



7. $\frac{36}{\pi}\text{cm}^2$ 或 $\frac{24}{\pi}\text{cm}^2$

8. (1)



从正面看

从左面看

(2) 表面积: $(6 \times 2 + 6 \times 2 + 8 \times 2 + 2) \times 2 \times 2 = 168\text{cm}^2$

体积: $(3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1) \times 2^3 = 96\text{cm}^3$

9. 128π 或 96π

10. 3600

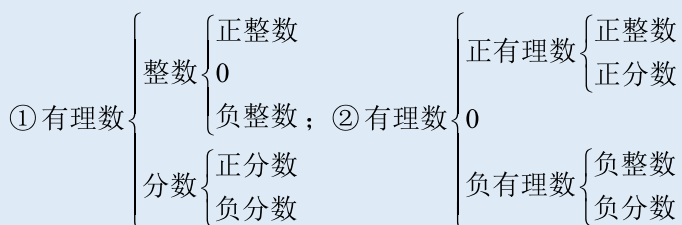
第二篇 有理数及其运算



考点 1 概念混淆

知识小贴士

1. 有理数的分类：



2. 相反数性质：若 a 、 b 互为相反数，则 $a+b=0$ 。

3. 绝对值定义：在数轴上，一个数所对应的点到原点的距离叫做这个数的绝对值。

4. 绝对值性质：①非负性；②若 $|a|=b$ ，则 $a=\pm b(b\geq 0)$ ；③若 $|a|=|b|$ ，则 $a=\pm b$ 。



典例

1. 下列说法不正确的是（ ）

A. 正整数、0、负整数统称为整数

B. 分数和整数统称为有理数

C. 正有理数、负有理数统称为有理数

D. 正分数和负分数统称为分数

答案

C

解析

正有理数、0、负有理数统称为有理数，故选 C。

2. 下列说法：①符号不同的两个数互为相反数；②互为相反数的两个数绝对值相等；③几个数的积的符号由负因数的个数决定；④两个有理数的和大于它们的差；⑤两数比较大小，绝对值大的反而小。其中正确的有_____（填写序号）。

答案

②

解析

- ①只有符号不同的两个数互为相反数；
 ②正确；
 ③几个“非零”有理数的积的符号由负因数的个数决定；
 ④两个负数的和小于它们的差；
 ⑤两个负数比较大小，绝对值大的反而小；
 故选：②.



小试牛刀

1. 下列说法中：①若干个有理数相乘，如果负因数的个数是奇数，则乘积一定是负数；②若 a , b 互为相反数，则 $\frac{b}{a} = -1$ ；③当 $a \neq 0$ 时， $|a|$ 总是大于 0；④如果 $a = b$ ，那么 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. 其中正确说法的个数是 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 若 a, b 为有理数，下列判断：(1) 若 $|a| = b$ ，则一定有 $a = b$ ；(2) 若 $|a| > |b|$ ，则一定有 $a > b$ ；(3) 若 $|a| > b$ ，则一定有 $|a| > |b|$ ；(4) 若 $|a| = b$ ，则一定有 $a^2 = (-b)^2$. 其中正确的是 _____.
3. 对于任何有理数 a ，下列各式中一定是负数的是 ()
- A. $-(-3+a)$ B. $-a$ C. $-|a+1|$ D. $-|a|-1$



考点 2 乘方计算

知识小贴士

- 乘方：求 n 个相同因数 a 的乘积的运算叫做乘方.
- 乘方的偶次幂具有非负性，计算时注意符号问题.



典例

1. 下列计算正确的有 ()

① $(-2)^2 = 4$; ② $-2(a+2b) = -2a+4b$; ③ $-(-\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$; ④ $-(-1^{2018}) = 1$; ⑤ $-[-(-a)] = -a$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

答案

C

解析

其中② $-2(a+2b) = -2a-4b$; ③ $-(-\frac{1}{5})^2 = -\frac{1}{25}$, ①④⑤正确, 故选 C.



小试牛刀

4. 设 n 为正整数, 则 $(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}$ 的值为 ()

A. 1

B. 2

C. 0

D. 以上答案均不对

5. 下列各式一定成立的是 ()

A. $a^2 = (-a)^2$

B. $a^3 = (-a)^3$

C. $-a^2 = |-a^2|$

D. $a^3 = |-a^3|$

6. 在 $(-1)^3$, $(-1)^2$, -2^2 , $(-3)^2$ 这四个数中, 最大数与最小数的和等于 ()

A. 6

B. 8

C. 5

D. -5



考点 3 科学记数法

知识小贴士

1. 一个大于 10 的数可以用 $a \times 10^n$ 表示, 其中, $1 \leq a < 10$, n 为正整数.

2. 注: ① n 的求法; ② 单位问题; ③ 注意审题.



典例

1. 据环球报报道：中国为防控疫情做出的巨大努力有目共睹，受到了世卫组织和国际权威公共卫生专家的称赞，其他一些国家也在寻求借鉴中国的经验和防控措施，截止 5 月 13 日报道前，海外累计确诊病例约 4330000 人次。将 4330000 用科学记数法表示应为（ ）
- A. 4.33×10^5 B. 0.433×10^7 C. 4.33×10^6 D. 433×10^4

答案

C

解析

$4330000 = 4.33 \times 10^6$ ，故选：C.



小试牛刀

7. 长江三峡工程电站的总装机容量用科学记数法表示为 1.82×10^7 千瓦，把它写成原数是（ ）
- A. 182000 千瓦 B. 182000000 千瓦 C. 18200000 千瓦 D. 1820000 千瓦
8. 用科学记数法表示的数为 -2.25×10^5 ，则原数是（ ）
- A. -22500 B. -225000 C. 225000 D. -2250
9. 冥王星围绕太阳公转的轨道半径长度为 5900000000 千米，那么冥王星围绕太阳公转的轨道直径用科学记数法表示是_____米.



考点 4 画数轴比较大小

知识小贴士

1. 数轴的作用：①表示数；②比较大小；③表示距离.
2. 在数轴上表示数时，注意表示原数.

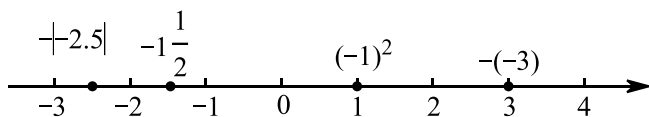


典例

1. 在数轴上标出以下各点，然后用“<”把这些数连起来.

$$-1\frac{1}{2}, -(-3), -|-2.5|, (-1)^2$$

答案



$$-|-2.5| < -1\frac{1}{2} < (-1)^2 < -(-3)$$

解析

$$-(-3)=3, -|-2.5|=-2.5, (-1)^2=1, \therefore -|-2.5| < -1\frac{1}{2} < (-1)^2 < -(-3).$$



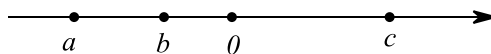
小试牛刀

10. 已知下列各有理数：-2.5，0， $|-3|$ ， $-(-2)$ ， $\frac{1}{2}$ ，-1

(1) 画出数轴，在数轴上标出这些数表示的点；

(2) 用“<”把这些数连接起来.

11. 已知 a 、 b 、 c 在数轴上的位置如图所示，且 a 与 c 互为相反数，则下列式子中一定成立的是（ ）



A. $a+b+c > 0$

B. $|a+b| < c$

C. $|a-c| = |a|+c$

D. $ab < 0$



考点5 绝对值性质

知识小贴士

1. 绝对值性质：①非负性；②若 $|a|=b$ ，则 $a=\pm b(b\geq 0)$ ；③若 $|a|=|b|$ ，则 $a=\pm b$ 。
2. 注意分类讨论。



典例

1. 已知 $|a+3|+(b-2)^2=0$ ，则 a^b 的值为_____。

答案

9

解析

$\because |a+3|+(b-2)^2=0$ ， $\therefore |a+3|=0$ ， $(b-2)^2=0$ ， $\therefore a=-3$ ， $b=2$ ，故 $a^b=(-3)^2=9$ 。



小试牛刀

12. 若 $|2a|=-2a$ ，则 a 一定是（ ）
- A. 正数 B. 负数 C. 正数或零 D. 负数或零
13. 设 a 是有理数，则 $|a|-a$ 的值（ ）
- A. 可以是负数 B. 不可能是负数
- C. 必是正数 D. 可以是正数，也可以是负数
14. 已知 $|x-y|=y-x$ ， $|x|=2$ ， $|y|=3$ ，则 $(x+y)^3$ 的值为_____。
15. 已知 $|a-b|=7$ ， $|b|=3$ ， $|a+b|=|a|-|b|$ ，则 $a+b=_____$ 。



考点 6 绝对值化简

知识小贴士

1. 去绝对值法则：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0.

2. 绝对值化简的步骤：

①利用数轴判断绝对值中的正负；

②根据去绝对值法则去绝对值；

③合并.

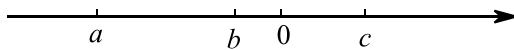
注：注意符号问题、是否漏项.



典例

1. 已知有理数 a, b, c 数轴上对应的位置如图所示，化简：

$$|a-b| + \frac{3}{2}|c-a| - \frac{1}{2}|a+b-c|$$



答案

$$-2a + \frac{3}{2}b + c$$

解析

由题意可得： $a-b < 0$ ， $c-a > 0$ ， $a+b-c < 0$ ，

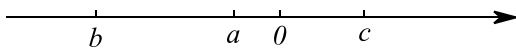
$$\therefore \text{原式} = b-a + \frac{3}{2}(c-a) - \frac{1}{2}(c-a-b) = -2a + \frac{3}{2}b + c.$$



小试牛刀

16. 已知 $b < c < 0 < a$ ， $|c| < |a| < |b|$ ， 化简 $|a+c| + |b+c| - |a+b| + |2a-c|$.

17. 实数 a, b, c 在数轴上的位置如图所示, 则代数式 $|a| - |a+b| + |c-a| + |b-c|$ 的值等于 ()

A. $-a$ B. $2a-2b$ C. $2c-a$ D. a 

18. 已知 a, b, c 都不等于零, 且 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的最大值是 m , 最小值是 n , 求 $\frac{n^m}{mn}$.



考点 7 绝对值的几何意义

知识小贴士

1. $|a| = |0-a|$, 在数轴上, 原点到表示 a 的点的距离.

$|x-a|$, 在数轴上, 表示 x 的点到表示 a 的点之间的距离.

$|x+a| = |x-(-a)|$, 在数轴上, 表示 x 的点到表示 $-a$ 的点之间的距离.



典例

1. 数学实验室:

点 A, B 在数轴上分别表示有理数 a, b , A, B 两点之间的距离表示为 AB , 在数轴上 A, B 两点之间的距离 $AB = |a-b|$.

利用数形结合思想回答下列问题:

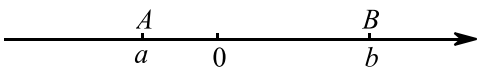
①数轴上表示 2 和 5 两点之间的距离是_____, 数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是_____.

②数轴上表示 x 和 -2 的两点之间的距离表示为_____. 数轴上表示 x 和 5 的两点之间的距离表示为_____.

③若 x 表示一个有理数, 则 $|x-1| + |x+3|$ 的最小值 = _____.

④若 x 表示一个有理数, 且 $|x+3| + |x-2| = 5$, 则满足条件的所有整数 x 的值是_____.

⑤若 x 表示一个有理数, 当 x 为_____, 式子 $|x+2| + |x-3| + |x-5|$ 有最小值为_____.



答案

①3, 4; ② $|x+2|$, $|x-5|$; ③4; ④-3或-2或-1或0或1或2; ⑤3, 7.

解析

①数轴上表示 2 和 5 两点之间的距离是 $5-2=3$, 数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是 $1-(-3)=4$

故答案为: 3, 4;

②数轴上表示 x 和 -2 的两点之间的距离表示为 $|x-(-2)|=|x+2|$, 数轴上表示 x 和 5 的两点之间的距离表示为 $|x-5|$

故答案为: $|x+2|$, $|x-5|$;

③在数轴上 $|x-1|+|x+3|$ 的几何意义是: 表示有理数 x 的点到 -3 及到 1 的距离之和
所以当 $-3 \leq x \leq 1$ 时, 它有最小值为 4

故答案为: 4;

④当 $x < -3$ 时, $|x+3|+|x-2|=-x-3+2-x=-2x-1=5$

解得: $x=-3$

此时不符合 $x < -3$, 舍去;

当 $-3 \leq x \leq 2$ 时, $|x+3|+|x-2|=x+3+2-x=5$

此时 $x=-3$ 或 $x=-2$ 或 0 或 1 或 2;

当 $x > 2$ 时, $|x+3|+|x-2|=x+3+x-2=2x+1=5$

解得: $x=2$

此时不符合 $x > 2$, 舍去;

故答案为: -3 或 -2 或 -1 或 0 或 1 或 2;

⑤ \because 设 $y=|x+2|+|x-3|+|x-5|$

i、当 $x \geq 5$ 时, $y=x+2+x-3+x-5=3x-6$

\therefore 当 $x=5$ 时, y 最小为: $3x-6=3 \times 5-6=9$;

ii、当 $3 \leq x < 5$ 时, $y=x+2+x-3+5-x=x+4$

\therefore 当 $x=3$ 时, y 最小为 7;

iii、当 $-2 \leq x < 3$ 时, $y = x + 2 + 3 - x + 5 - x = 10 - x$

\therefore 此时 y 最小接近 7;

iiii、当 $x < -2$ 时, $y = -x - 2 + 3 - x + 5 - x = 6 - 3x$

\therefore 此时 y 最小接近 12;

$\therefore y$ 的最小值为 7.

故答案为: 3, 7.



小试牛刀

19. 同学们都知道, $|7 - (-3)|$ 表示 7 与 -3 差的绝对值, 实际上也可以理解 7 与 -3 两数在数轴上所对应的两点之间的距离. 试探索:

(1) 求 $|7 - (-3)| =$ _____.

(2) 找出所有符合条件的整数 x , 使得 $|x + 5| + |x - 2| = 7$, 这样的整数是_____.

(3) 由以上探索猜想对于任意有理数 x , $|x - 3| + |x - 6|$ 是否有最小值? 如果有, 写出最小值; 如果没有, 说明理由.



考点 8 有理数计算

知识小贴士

1. 有理数混合运算顺序: 先算乘除, 再算加减, 有括号先算括号里面的.
2. 有理数计算易错点:
 - ①法则不牢固, 导致计算错误;
 - ②计算顺序错误;
 - ③跳步;
 - ④符号错误;
 - ⑤抄丢抄错导致错误.



典例

$$1. \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) \times (-48) - (-2)^3 \div \frac{1}{2}$$

$$2. \left(-\frac{1}{30}\right) \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}\right) - (-1)^{2021}$$

答案

$$(1) -8; (2) \frac{9}{10}.$$

解析

$$(1) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) \times (-48) - (-2)^3 \div \frac{1}{2}$$

$$\text{解: 原式} = (-36) + 8 + 4 - (-8) \times 2$$

$$= (-36) + 8 + 4 + 16$$

$$= -8$$

$$(2) \left(-\frac{1}{30}\right) \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}\right) - (-1)^{2021}$$

$$\text{解: 原式} = \left(-\frac{1}{30}\right) \div \left(\frac{20}{30} - \frac{3}{30} + \frac{5}{30} - \frac{12}{30}\right) - (-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{30}\right) \div \frac{1}{3} + 1$$

$$= \left(-\frac{1}{30}\right) \times 3 + 1$$

$$= -\frac{1}{10} + 1$$

$$= \frac{9}{10}$$



小试牛刀

$$20. (1) |8 - 35| - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) \div \left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$(2) (-1)^5 \times (3 - 5)^2 - \frac{1}{7} \times [1 - (-3)^3]$$



考点9 技巧性计算

知识小贴士

1. 技巧性计算主要考查了规律问题和有理数混合运算，解题的关键是学会探究规律，利用规律解决问题.



典例

1. 为了求 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2017}$ 的值，可令 $S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2017}$ ，则

$2S=2+2^2+2^3+\cdots+2^{2018}$ ，因此 $2S-S=2^{2018}-1$ ，所以，

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2017}=2^{2018}-1.$$

仿照上面推理计算：

- (1) 求 $1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{2020}$ 的值；
 (2) 求 $3-3^2+3^3-3^4+\cdots+3^{99}-3^{100}$ 的值.

答案

$$(1) \frac{5^{2021}-1}{4}; (2) \frac{3-3^{101}}{4}.$$

解析

$$(1) 1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{2020}$$

$$\text{令 } S=1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{2020}$$

$$\text{则 } 5S=5+5^2+5^3+\cdots+5^{2017}+5^{2021}$$

$$\therefore 4S=5^{2021}-1$$

$$\therefore S=\frac{5^{2021}-1}{4}$$

$$\text{即 } 1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{2020}=\frac{5^{2021}-1}{4}.$$

$$(2) 3-3^2+3^3-3^4+\cdots+3^{99}-3^{100}$$

$$\text{令 } S=3-3^2+3^3-3^4+\cdots+3^{99}-3^{100}$$

$$\text{则 } 3S=3^2-3^3+3^4-3^5+\cdots+3^{100}-3^{101}$$

$$\therefore 4S = 3 - 3^{101}$$

$$\therefore S = \frac{3 - 3^{101}}{4}$$

$$\text{即 } 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \cdots + 3^{99} - 3^{100} = \frac{3 - 3^{101}}{4}$$



小试牛刀

21. 观察以下等式:

$$\text{第 1 个等式: } \frac{1}{1} \times \frac{2}{1+1} \times (1+1^2) = 2;$$

$$\text{第 2 个等式: } \frac{1}{2} \times \frac{2}{2+1} \times (2+2^2) = 2;$$

$$\text{第 3 个等式: } \frac{1}{3} \times \frac{2}{3+1} \times (3+3^2) = 2;$$

$$\text{第 4 个等式: } \frac{1}{4} \times \frac{2}{4+1} \times (4+4^2) = 2;$$

$$\text{第 5 个等式: } \frac{1}{5} \times \frac{2}{5+1} \times (5+5^2) = 2;$$

.....

按照以上规律, 解决下列问题:

(1) 写出第 7 个等式: _____;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的等式表示), 并加以证明.

22. 观察下列有规律的数: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42} \cdots$ 根据规律可知:

(1) 第 7 个数是_____, 第 n 个数是_____ (n 为正整数);

(2) $\frac{1}{132}$ 是第_____个数;

(3) 计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{2019 \times 2020}$ 的值.



考点 10 有理数应用

知识小贴士

1. 仔细阅读题目, 审清题意是解题的关键, 计算时注意有理数计算的符号问题.



典例

1. 寒冬将至, 为保证我市供暖工作顺利, 热力公司对取暖设备进行全面检查, 某线路检修小组从总站 A 地驾车出发, 在东西向的路上检修线路. 若规定向东为正, 则一天中从出发到收工的行驶记录如下(单位: 千米): $-5, +8, -10, +9, -6, -2, +7$.

(1) 哪次记录时距总站 A 地最远?

(2) 若收工时在 B 地, 则 B 在 A 的什么方向, 距离 A 有多远?

(3) 若每千米汽车耗油 0.3 升, 则从出发到收工共耗油多少升?

答案

(1) 第三次记录;

(2) B 在 A 的东边, 距离 A 有 1km;

(3) 14.1 升.

解析

(1) 第三次记录时距总站 A 最远;

$$(2) -5 + 8 + (-10) + 9 + (-6) + (-2) + 7 = 1$$

$\therefore B$ 在 A 的东边，距离 A 有 1km.

$$(3) (5 + 8 + 10 + 9 + 6 + 2 + 7) \times 0.3 = 14.1 \text{ (升)}$$

答：从出发到收工共耗油 14.1 升.



小试牛刀

23. 张先生在上周末买进了某公司的股票 1000 股，每股 28 元. 下表是本周每天股票的涨跌情况（单位：元；用正数表示比前一天上涨数，用负数表示比前一天下跌数）：

星期	一	二	三	四	五	六
每股涨跌/ 元	+2.8	+3	-2	+1.5	-2.5	-0.5

(1) 本周星期三收盘时，每股是多少元？

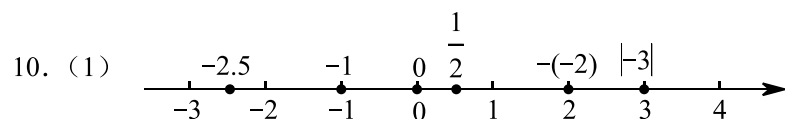
(2) 本周内最高价每股多少元？最低价每股多少元？

(3) 已知张先生买进股票时付了 0.15% 的手续费，卖出时需交付成交额 0.25% 的各种费用，如果张先生在本周末收盘时把全部股票卖出，他的收益是多少元？



参考答案

1. A
2. (4)
3. D
4. C
5. A
6. C
7. C
8. B
9. 1.18×10^{13}



$$-2.5 < -1 < 0 < \frac{1}{2} < -(-2) < |-3|$$

11. C
12. D
13. B
14. 125 或 1
15. ± 1

16. $\because b < c < 0 < a, |c| < |a| < |b|$

$$\therefore a + c > 0, b + c < 0, a + b < 0, 2a - c > 0$$

$$\therefore \text{原式} = a + c - b - c + a + b + 2a - c = 4a - c$$

17. C

18. 解: (1) 当 a, b, c 三个都大于 0, 可得 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = 4$

当 a, b, c 都小于 0, 可得 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = -4$

当 a, b, c 一正二负, 可得 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = 0$

当 a, b, c 二正一负可得 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = 0$

$$\therefore m = 4, \quad n = -4$$

$$\text{则 } \frac{n^m}{mn} = \frac{(-4)^4}{4 \times (-4)} = -16$$

19. (1) 10;

(2) -5、-4、-3、-2、-1、0、1、2;

(3) 当 $3 \leq x \leq 6$ 时, 取最小值为 3.

20. (1) 0; (2) -8

$$21. (1) \frac{1}{7} \times \frac{2}{7+1} \times (7+7^2) = 2;$$

$$(2) \text{第 } n \text{ 个等式: } \frac{1}{n} \times \frac{2}{n+1} \times (n+n^2) = 2.$$

$$\text{证明: 左边} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n+1} \times (n+n^2) = \frac{2}{n^2+n} \times (n+n^2) = 2 = \text{右边}.$$

$$22. (1) \because \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}, \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}, \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4 \times 5}, \quad \dots$$

$$\therefore \text{第 7 个数是 } \frac{1}{7 \times 8} = \frac{1}{56}$$

$$\therefore \text{第 } n \text{ 个数是 } \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{故答案为 } \frac{1}{56}, \quad \frac{1}{n(n+1)};$$

$$(2) \because \frac{1}{11 \times 12} = \frac{1}{132}$$

$$\therefore \frac{1}{132} \text{ 是第 11 个数}$$

故答案为 11;

$$(3) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{2019 \times 2020}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

$$= 1 - \frac{1}{2020}$$

$$= \frac{2019}{2020}.$$

23. (1) 根据题意得，本周三收盘时，每股的价钱为： $28 + 2.8 + 3 - 2 = 31.8$ （元）

答：本周三收盘时，每股是 31.8 元；

(2) 由表格可得：星期二每股的价格最高，星期六每股的价格最低，

则本周最高股价： $28 + 2.8 + 3 = 33.8$ （元）

本周最低股价： $28 + 2.8 + 3 - 2 + 1.5 - 2.5 - 0.5 = 30.3$ （元）

答：本周内最高价每股 33.8 元，最低价每股 30.3 元；

$$\begin{aligned} & (3) (30.3 - 28) \times 1000 - 28 \times 1000 \times 0.15\% - 30.3 \times 1000 \times 0.25\% \\ &= 2.3 \times 1000 - 28 \times 1.5 - 30.3 \times 2.5 \\ &= 2300 - 42 - 75.75 \\ &= 2182.25 \text{（元）} \end{aligned}$$

如果张先生在本周末收盘时把全部股票卖出，他的收益是 2182.25 元.

第三篇 整式及其加减



考点 1 代数式

知识小贴士

1. 用运算符号把数和字母连接而成的式子，叫做代数式。单独的一个数或一个字母也是代数式。（这里运算符号不包括“ $>$ 、 $<$ 、 \geq 、 \leq 、 $=$ 、 \neq 等”）
2. 代数式书写规范：
 - ①数与字母相乘或字母与字母相乘，“ \times ”省略或改写为“ \cdot ”，数字通常写在字母之前；
 - ②除法写成分数的形式；
 - ③带分数写成假分数；
 - ④相同字母相乘写成乘方的形式；
 - ⑤和差形式带单位需加括号。



典例

1. 下列式子 $x+5$ ， pq ， $y=1$ ， 0 ， p ， $3(m+n)$ ， $\frac{1}{a+b}$ ， $(3x-2y)^2$ 是代数式的是（ ）
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

答案

C

解析

$x+5$ ， pq ， 0 ， p ， $3(m+n)$ ， $\frac{1}{a+b}$ ， $(3x-2y)^2$ 是代数式， $y=1$ 中等号不属于运算符号，不是代数式，故选 C.

2. 下面式子中符合代数式书写要求的是（ ）

- A. $ab3$ B. $2\frac{1}{3}xy^2$ C. $\frac{mn}{4}$ D. $x+3$ 克

答案

C

解析

A. $ab3$ 不符合数写在字母之前;B. $2\frac{1}{3}xy^2$ 不符合带分数应该写成假分数;C. $\frac{mn}{4}$ 正确;D. $x+3$ 克不符合和差形式带单位需要加括号;

故选: C.



小试牛刀

1. 下列式子 $\frac{2}{3}a+b$, $S=\frac{1}{2}ab$, 5 , m , $8+y$, $m+3=2$, $\frac{2}{3}\geq\frac{5}{7}$, $1+2$ 中, 代数式有 ()

A. 6 个

B. 5 个

C. 4 个

D. 3 个

2. 下列式子书写规范的有 ()

(1) $2\times b$; (2) $m\div 3$; (3) $2\frac{1}{2}ab$; (4) $90-c$; (5) $m+n$ 万元; (6) $20\%x$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个



考点 2 概念辨析

知识小贴士

1. 单项式和多项式统称为整式.

2. 单项式

(1) 数与字母乘积的式子叫做单项式. 单独的一个数或一个字母也是单项式.

(2) 单项式中的数字因数叫做单项式的系数.

(3) 单项式中所有字母的指数和叫做单项式的次数.

注: ①单个字母的系数与次数都为 1, 不是 0;

②单项式的次数只与字母的指数有关, 与数字的指数无关.

3. 多项式

- (1) 几个单项式的和叫做多项式.
- (2) 在多项式中, 每个单项式叫做多项式的项.
- (3) 一个多项式中, 次数最高的项的次数, 叫做这个多项式的次数.



典例

1. 下列结论中正确的是 ()

- A. 单项式 $\frac{\pi x^2 y}{4}$ 的系数是 $\frac{1}{4}$, 次数是 4
- B. 单项式 m 的次数是 1, 没有系数
- C. 多项式 $2x^2 + xy^2 + 3$ 是二次三项式
- D. 在 $\frac{1}{x}$, $2x + y$, $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{x-y}{\pi}$, $\frac{5y}{4x}$, 0 中整式有 4 个

答案

D

解析

- A. 单项式 $\frac{\pi x^2 y}{4}$ 的系数是 $\frac{\pi}{4}$, 次数是 3, 故错误;
 - B. 单项式 m 的次数是 1, 系数是 1, 故错误;
 - C. 多项式 $2x^2 + xy^2 + 3$ 是三次三项式, 故错误;
 - D. 在 $\frac{1}{x}$, $2x + y$, $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{x-y}{\pi}$, $\frac{5y}{4x}$, 0 中整式有 4 个, 故正确;
- 故选: D.

2. 多项式 $\frac{1}{2}x^{|m|} - (m-4)x + 7$ 是关于 x 的四次三项式, 则 m 的值是 ()

- A. 4
- B. -2
- C. -4
- D. 4 或 -4

答案

C

解析

$\because \frac{1}{2}x^{|m|} - (m-4)x + 7$ 是关于 x 的四次三项式

$$\therefore |m| = 4, \quad m - 4 \neq 0$$

$$\therefore m = -4$$

故选: C.



小试牛刀

3. 下列代数式: (1) $-\frac{1}{2}mn$, (2) m , (3) $\frac{1}{2}$, (4) $\frac{b}{a}$, (5) $2m+1$, (6) $\frac{x-y}{5}$, (7) $\frac{2x+y}{x-y}$,

(8) $x^2 + 2x + \frac{2}{3}$, (9) $y^3 - 5y + \frac{3}{y}$ 中, 整式有 ()

A. 3 个

B. 4 个

C. 6 个

D. 7 个

4. 在式子 $\frac{ab}{3}$, $-4x$, $-\frac{7}{5}abc$, π , $\frac{m-n}{2}$, 0.81 , $\frac{1}{y}$, 0 中, 单项式共有 ()

A. 5 个

B. 6 个

C. 7 个

D. 8 个

5. 下列说法错误的是 ()

A. 数字 0 是单项式

B. $\frac{\pi xy^2}{3}$ 的系数是 $\frac{1}{3}$, 次数是 3

C. $\frac{1}{4}ab$ 是二次单项式

D. $-\frac{2mn}{5}$ 的系数是 $-\frac{2}{5}$, 次数是 2

6. 下列说法正确的是 ()

A. 5 不是单项式

B. 多项式 $-2x^2 + 5x$ 中的二次项的系数是 2

C. 单项式 $\frac{x^3y}{5}$ 的系数是 $\frac{1}{5}$, 次数是 4

D. 多项式 $3x^2 - xy^2 + 2xy$ 是三次二项式

7. 多项式 $x^{2000} + y^{18} + 2^{2018}$ 的次数为_____.

8. 若 M 和 N 都是关于 x 的二次三项式, 则 $M+N$ 一定是 ()

A. 二次三项式

B. 一次多项式

C. 三项式

D. 次数不高于 2



考点3 同类项

知识小贴士

1. 所含字母相同，相同字母的指数也相同的项，叫做同类项。特别地，所有的常数项都是同类项。
2. 判定同类项要注意两个相同：
 - (1) 所含字母相同；
 - (2) 相同字母的指数相同；



典例

1. 若 $5x^3y^n - 8x^m y^2 = -3x^3y^2$ ，则 $2m + n =$ _____.

答案

8

解析

由题可知， $5x^3y^n$ 、 $8x^m y^2$ 与 $-3x^3y^2$ 是同类项

$$\therefore m = 3, \quad n = 2$$

$$\therefore 2m + n = 8$$

2. 若两个单项式 $2x^{m-2}y^{n+4}$ 与 $-3xy^{2n+2}$ 的和也是单项式，则 $(n-m)^m$ 的值是_____.

答案

-1

解析

\because 单项式 $2x^{m-2}y^{n+4}$ 与 $-3xy^{2n+2}$ 的和也是单项式

$\therefore 2x^{m-2}y^{n+4}$ 与 $-3xy^{2n+2}$ 是同类项

$$\therefore m - 2 = 1, \quad n + 4 = 2n + 2$$

$$\therefore m = 3, \quad n = 2$$

$$\therefore (n-m)^m = (2-3)^3 = -1$$



小试牛刀

9. 下列各组中, 不是同类项的是 ()

A. 5^2 与 2^5

B. $-ab$ 与 ba

C. $0.2a^2b$ 与 $-\frac{1}{5}a^2b$

D. a^2b^3 与 $-a^3b^2$

10. 若 $-2a^m b^4$ 与 $5a^{n-2} b^{2m}$ 是同类项, 则 m^n 的值是 ()

A. 16

B. 6

C. 4

D. 2

11. 如果单项式 $-xy^{b+1}$ 与 $\frac{1}{2}x^{a-2}y^3$ 是同类项, 那么 $(a-b)^{2020} = \underline{\hspace{2cm}}$.



考点 4 化简求值

知识小贴士

- 合并同类项法则: 合并同类项时, 把同类项的系数相加, 字母和字母的指数不变.
- 去括号法则:
括号前是“+”号, 把括号和它前面的“+”号去掉后, 原括号里各项的符号都不改变;
括号前是“-”号, 把括号和它前面的“-”号去掉后, 原括号里各项的符号都要改变.
- 化简求值:
先化简再代入求值.



典例

1. 先化简, 后求值: $3x^2y - [2xy^2 - 2(xy - 1.5x^2y) + xy] + 3xy^2$, 其中 $x = -3$, $y = -2$.

答案

-6

解析

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & 3x^2y - [2xy^2 - 2(xy - 1.5x^2y) + xy] + 3xy^2 \\
 &= 3x^2y - (2xy^2 - 2xy + 3x^2y + xy) + 3xy^2 \\
 &= 3x^2y - 2xy^2 + 2xy - 3x^2y - xy + 3xy^2 \\
 &= xy^2 + xy
 \end{aligned}$$

把 $x = -3$, $y = -2$ 代入得:

$$xy^2 + xy = -3 \times (-2)^2 + (-3) \times (-2) = -6$$



小试牛刀

12. 先化简, 再求值: $2xy - \frac{1}{2}(4xy - 4x^2y^2) + 2(3xy - 5x^2y^2)$, 其中 x, y 满足 $(x+1)^2 + |y-2| = 0$.

13. 化简求值: $2(4a - 3b - 2ab) - 3(2a - \frac{8b+ab}{3})$, 其中 $a+b = -2$, $ab = -\frac{5}{4}$.

14. 已知 $A = 3x^2 + 3y^2 - 5xy$, $B = 2xy - 3y^2 + 4x^2$.

(1) 化简: $2B - A$;

(2) 已知 $-a^{x-2}b^2$ 与 $\frac{1}{3}ab^y$ 的同类项, 求 $2B - A$ 的值.



考点 5 整体代入

知识小贴士

1. 整体代入求值

一般情况下, 当已知条件中含字母项的系数与所求式子中对应字母项的系数成和差倍分的关系或互为相反数时, 可考虑整体代入; 当代数式中的字母不能或不易求出具体的值时, 可考虑整体代入.

2. 方法:

- (1) 化简变形
- (2) 对比前后式子中系数的特征
- (3) 整体代入



典例

1. 若代数式 $2x^2 + 3x$ 的值是 5, 则代数式 $4x^2 + 6x - 9$ 的值是 ()

- A. 10 B. 1 C. -4 D. -8

答案

B

解析

$$\because 2x^2 + 3x = 5$$

$$\therefore 4x^2 + 6x - 9 = 2(2x^2 + 3x) - 9 = 10 - 9 = 1$$

故选 B.



小试牛刀

15. 若 $2a^2 + 3a - 4 = 0$, 则 $2007 - a^2 - \frac{3}{2}a =$ _____.

16. 当 $x=1$ 时, 多项式 $px^3 + qx + 1$ 的值为 2020, 求当 $x=-1$ 时, 多项式 $2px^3 + 2qx + 1$ 的值 _____.

17. 设 $m^2 + m - 1 = 0$, 则 $m^3 + 2m^2 + 2020 =$ _____.

18. 若 $3x^2 - x = 1$, 则 $6x^3 + 7x^2 - 5x - 3$ 的值是 _____.



考点 6 不含无关

知识小贴士

1. 题目特征: “不含”、“无关”、“代数式的值为常数”、“恒成立”.

2. 方法:

①合并同类项;

②令不含无关项系数为 0.



典例

1. 若代数式 $(4x^2 - mx - 3y + 4) - (8nx^2 - x + 2y - 3)$ 的值与字母 x 的取值无关, 求代数式 $-m^2 + 2mn - n^2 - 2(mn - 3m^2) + (2n^2 - mn)$ 的值.

答案

$$\frac{19}{4}$$

解析

$$\begin{aligned}
& (4x^2 - mx - 3y + 4) - (8nx^2 - x + 2y - 3) \\
&= 4x^2 - mx - 3y + 4 - 8nx^2 + x - 2y + 3 \\
&= (4 - 8n)x^2 + (-m + 1)x - 5y + 7 \\
&\because (4x^2 - mx - 3y + 4) - (8nx^2 - x + 2y - 3) \text{ 的值与字母 } x \text{ 的取值无关} \\
&\therefore 4 - 8n = 0, \quad -m + 1 = 0 \\
&\therefore m = 1, \quad n = \frac{1}{2} \\
&\therefore -m^2 + 2mn - n^2 - 2(mn - 3m^2) + (2n^2 - mn) \\
&= -m^2 + 2mn - n^2 - 2mn + 6m^2 + 2n^2 - mn \\
&= 5m^2 + n^2 - mn \\
&\text{把 } m = 1, \quad n = \frac{1}{2} \text{ 代入得:} \\
&5m^2 + n^2 - mn \\
&= 5 \times 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{19}{4}
\end{aligned}$$



小试牛刀

19. 已知多项式 $(2mx^2 + 4x^2 + 3x + 1) - (7x^2 - 4y^2 + 3x)$ 化简后不含 x^2 项, 求多项式

$$2m^3 - [3m^3 - (5m - 5) + m] \text{ 的值.}$$

20. 有这样一道题：“计算 $(2x^3 - 3x^2y - 2xy^2) - (x^3 - 2xy^2 + y^3) + (-x^3 + 3x^2y - y^3)$ 的值，其中 $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$ ”。甲同学把“ $x = \frac{1}{2}$ ”错抄成“ $x = -\frac{1}{2}$ ”，但他计算的结果也是正确的，试说明理由，并求出这个结果。

21. 已知 $P = xy - 5x + 3$, $Q = x - 3xy + 2$, 当 $x \neq 0$ 时, $3P - 2Q = 5$ 恒成立, 则 $y =$ _____.

22. 已知 $P = 3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4$, $Q = 2x - 3y + 1 - nx^2$.

(1) 关于 x, y 的式子 $P - 2Q$ 的取值与字母 x 的取值无关, 求式子 $(m + 3n) - (3m - n)$ 的值;

(2) 当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时, 若 $3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3}$ 恒成立, 求 m, n 的值.

23. 把四张形状大小完全相同的小长方形卡片如图 1 不重叠地放在一个底面为长方形（长为 m cm，宽为 n cm）的盒子底部如图 2，盒子底面未被卡片覆盖的部分用阴影表示，则图 2 中两块阴影部分的周长和是（ ）



图 1

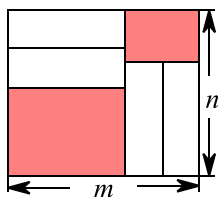


图 2

- A. $4m$ cm B. $4n$ cm C. $2(m+n)$ cm D. $4(m-n)$ cm



考点 7 应用题

知识小贴士

1. 和差形式后面带单位需要加括号.



典例

1. 为鼓励节约用电，某地用电收费标准规定：如果每月用户用电不超过 150 度，那么每度电 0.5 元；如果该月用电超过 150 度，那么超过部分每度电 0.8 元.
- (1) 如果小张家一个月用电 128 度，那么这个月应缴纳电费_____元.
- (2) 如果小张家一个月用电 a 度 ($a > 150$)，那么这个月应缴纳电费_____元. (用含 a 的最简代数式表示)
- (3) 如果这个月缴纳电费为 118.2 元，那么小张家这个月用电多少度？

答案

- (1) 64
- (2) $(0.8a - 45)$
- (3) 204 度

解析

- (1) $\because 128 < 150$

$$\therefore 128 \times 0.5 = 64 \text{ (元)}$$

$$(2) 150 \times 0.5 + 0.8(a - 150) = 0.8a - 45$$

$$(3) 150 \times 0.5 = 75 \text{ (元)}$$

$$\therefore 118.2 > 75$$

\therefore 小张家这个月用电超过 150 度

$$\therefore 0.8a - 45 = 118.2$$

$$\therefore a = 204$$

答：小张家这个月用电 204 度。



小试牛刀

24. 外国语中学体育组准备在网上为学校订购一批某品牌足球和跳绳，在查阅天猫网店后发现足球每个定价 160 元，跳绳每个定价 40 元。“双十一”期间 A、B 两家网店均提供包邮服务，并提出了各自的优惠方案。

A 网店：买一个足球送一个跳绳；

B 网店：足球和跳绳都按定价的 90% 付款。

已知要购买足球 30 个，跳绳 x 个 ($x > 30$)

(1) 若在 A 网店购买，需付款_____元。(用含 x 的代数式表示) 若在 B 网店购买，需付款_____元。(用含 x 的代数式表示)

(2) 若 $x = 80$ 时，通过计算说明此时在哪家网店购买较为合算？

(3) 当 $x = 80$ 时，你能给出一种更为省钱的购买方案吗？试写出你的购买方案，并计算需付款多少元？

25. 甲、乙两家体育用品商店出售同样的乒乓球拍和乒乓球，乒乓球拍每副定价 20 元，乒乓球每盒定价 5 元，现两家商店搞促销活动，甲店的优惠办法是：每买一副乒乓球拍赠一盒乒乓球；乙店的优惠办法是：全部商品按定价的 9 折出售，某班需购买乒乓球拍 4 副，乒乓球若干盒（不少于 4 盒）。

(1) 当购买乒乓球的盒数为 x 盒时，求在甲、乙两店购买分别需付款多少元？（用含 x 的代数式表示）

(2) 当购买乒乓球盒数为 10 盒时，去哪家商店购买较合算？请计算说明。

(3) 当购买乒乓球盒数为 10 盒时，你能给出一种更为省钱的购买方案吗？试写出你的购买方案，并求出此时需付多少元？



考点 8 规律探究

知识小贴士

1. 规律探究需要注意：

- ①考虑首先是从第 0 个开始，还是从第 1 个开始；
- ②规律一定要验证。



典例

1. 观察等式： $1+2+2^2=2^3-1$ ； $1+2+2^2+2^3=2^4-1$ ； $1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1$ ；若
 $1+2+2^2+\dots+2^9=2^{10}-1=a$ ，则用含 a 的式子表示 $2^{10}+2^{11}+2^{12}+\dots+2^{18}+2^{19}$ 的结果是()
 A. $a^{20}-1$ B. a^2+a C. a^2+a+1 D. a^2-a

答案

B

解析

由题可得 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9+2^{10}+2^{11}+\cdots+2^{18}+2^{19}=2^{20}-1$

$$\therefore 1+2+2^2+\cdots+2^9=2^{10}-1=a$$

$$\therefore 2^{10}+2^{11}+\cdots+2^{18}+2^{19}=2^{20}-1-2^{10}+1=2^{20}-2^{10}$$

$$\therefore 2^{10}-1=a$$

$$\therefore 2^{20}-2^{10}=a(a+1)=a^2+a$$

故选 B.



小试牛刀

26. 已知整数 a_1, a_2, a_3, \cdots , 满足下列条件: $a_1=0, a_2=-|a_1+1|, a_3=-|a_2+2|, a_4=-|a_3+3|,$

\cdots , 依此类推, 则 a_{2020} 的值为 ()

A. -1010

B. -1009

C. -2020

D. -2019

27. 若 $a \neq 2$, 则我们把 $\frac{2}{2-a}$ 称为 a 的“哈利数”, 如 3 的“哈利数”是 $\frac{2}{2-3}=-2$, -2 的“哈

利数”是 $\frac{2}{2-(-2)}=\frac{1}{2}$, 已知 $a_1=3$, a_2 是 a_1 的“哈利数”, a_3 是 a_2 的“哈利数”, a_4 是 a_3

的“哈利数”, \cdots , 依此类推, 则 $a_{2020} = ()$

A. 3

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{4}{3}$

28. 如图, 从左到右在每个小格子中都填入一个整数, 使得其中任意三个相邻格子中所填整数之和都相等, 则第 2020 个格子中的数为 ()

-2	a	b	c	3	-1
----	-----	-----	-----	---	----	-------

A. 3

B. -1

C. 2

D. -2



参考答案

1. B

2. B

3. C

4. B

5. B

6. C

7. 2000

8. D

9. D

10. A

11. 1

12. 解: $\because (x+1)^2 + |y-2| = 0$

$$\therefore x = -1, \quad y = 2$$

$$2xy - \frac{1}{2}(4xy - 4x^2y^2) + 2(3xy - 5x^2y^2)$$

$$= 2xy - 2xy + 2x^2y^2 + 6xy - 10x^2y^2$$

$$= -8x^2y^2 + 6xy$$

把 $x = -1$, $y = 2$ 代入得

$$-8x^2y^2 + 6xy = -8 \times (-1)^2 \times 2^2 + 6 \times (-1) \times 2 = -44$$

13. 解: $2(4a - 3b - 2ab) - 3(2a - \frac{8b + ab}{3})$

$$= 8a - 6b - 4ab - 6a + 8b + ab$$

$$= 2a + 2b - 3ab$$

把 $a + b = -2$, $ab = -\frac{5}{4}$ 代入得:

$$2a + 2b - 3ab$$

$$= 2(a + b) - 3ab$$

$$= 2 \times (-2) - 3 \times \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}$$

14. 解: (1) $2B - A = 2(2xy - 3y^2 + 4x^2) - (3x^2 + 3y^2 - 5xy)$

$$= 4xy - 6y^2 + 8x^2 - 3x^2 - 3y^2 + 5xy$$

$$= 9xy - 9y^2 + 5x^2$$

(2) $\because -a^{|x-2|}b^2$ 与 $\frac{1}{3}ab^y$ 的同类项

$$\therefore |x-2|=1, \quad y=2$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } 3, \quad y=2$$

当 $x=1, \quad y=2$ 时, $2B - A = 18 - 36 + 5 = -13$

当 $x=3, \quad y=2$ 时, $2B - A = 54 - 36 + 45 = 63$

15. 2005

16. -4037

17. 2021

18. 0

19. $(2mx^2 + 4x^2 + 3x + 1) - (7x^2 - 4y^2 + 3x)$

$$= 2mx^2 + 4x^2 + 3x + 1 - 7x^2 + 4y^2 - 3x$$

$$= (2m-3)x^2 + 1 + 4y^2$$

\therefore 多项式 $(2mx^2 + 4x^2 + 3x + 1) - (7x^2 - 4y^2 + 3x)$ 化简后不含 x^2 项

$$\therefore 2m-3=0$$

$$\therefore m = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2m^3 - [3m^3 - (5m-5) + m]$$

$$= 2m^3 - (3m^3 - 5m + 5 + m)$$

$$= 2m^3 - 3m^3 + 5m - 5 - m$$

$$= -m^3 + 4m - 5$$

把 $m = \frac{3}{2}$ 代入得:

$$-m^3 + 4m - 5 = -\frac{19}{8}$$

20. 解: $(2x^3 - 3x^2y - 2xy^2) - (x^3 - 2xy^2 + y^3) + (-x^3 + 3x^2y - y^3)$

$$= 2x^3 - 3x^2y - 2xy^2 - x^3 + 2xy^2 - y^3 - x^3 + 3x^2y - y^3$$

$$= -2y^3$$

因为化简的结果中不含 x ，所以把 x 看错后，结果仍正确.

$$\text{当 } y = -1 \text{ 时, 原式} = -2 \times (-1)^3 = 2$$

$$21. \frac{17}{9}$$

$$22. \text{ 解: (1) } P - 2Q = 3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4 - 2(2x - 3y + 1 - nx^2) = (3 + 2n)x^2 + (m - 4)x + \frac{17}{3}y + 2$$

$\because P - 2Q$ 的取值与字母 x 的取值无关

$$\therefore 3 + 2n = 0, \quad m - 4 = 0$$

$$\therefore n = -\frac{3}{2}, \quad m = 4$$

$$\therefore (m + 3n) - (3m - n) = 4n - 2m = -6 - 8 = -14$$

$$(2) \quad 3P - \frac{1}{3}Q = 3(3x^2 + mx - \frac{1}{3}y + 4) - \frac{1}{3}(2x - 3y + 1 - nx^2) = (9 + \frac{n}{3})x^2 + (3m - \frac{2}{3})x + \frac{35}{3}$$

$$\therefore 3P - \frac{1}{3}Q = \frac{35}{3}$$

$$\therefore (9 + \frac{n}{3})x^2 + (3m - \frac{2}{3})x = 0$$

$$\because x \neq 0$$

$$\therefore (9 + \frac{n}{3})x + 3m - \frac{2}{3} = 0$$

$$\therefore 9 + \frac{n}{3} = 0, \quad 3m - \frac{2}{3} = 0$$

$$\therefore n = -27, \quad m = \frac{2}{9}$$

23. B

$$24. \text{ 解: (1) 若在 } A \text{ 网店购买, 需付款 } 160 \times 30 + 40(x - 30) = (40x + 3600) \text{ 元}$$

$$\text{若在 } B \text{ 网店购买, 需付款 } 160 \times 90\% \times 30 + 40 \times 90\%x = (36x + 4320) \text{ 元}$$

故答案为: $(40x + 3600)$, $(36x + 4320)$;

$$(2) \quad A \text{ 店: 当 } x = 80 \text{ 时, } 40 \times 80 + 3600 = 6800 \text{ (元)}$$

$$B \text{ 店: 当 } x = 80 \text{ 时, } 36 \times 80 + 4320 = 7200 \text{ (元)}$$

$$\therefore 6800 < 7200$$

$\therefore A$ 网店购买较为合算.

(3) 能

在 A 网店买 30 个足球和 30 个跳绳，在 B 网店买 50 个跳绳

$$160 \times 30 + 40 \times 90\% \times 50 = 6600 \text{ (元)}$$

答：当 $x = 80$ 时，更为省钱的购买方案是：在 A 网店买 30 个足球和 30 个跳绳，在 B 网店买 50 个跳绳，此方案需付款 6600 元。

25. 解：(1) 甲店需付费： $4 \times 20 + (x - 4) \times 5 = 80 + 5x - 20 = (5x + 60)$ 元

$$\text{乙店需付费：} (4 \times 20 + x \times 5) \times 0.9 = (4.5x + 72) \text{ 元}$$

答：甲店购买需付款 $(5x + 60)$ 元，乙店购买需付款 $(4.5x + 72)$ 元。

(2) 当 $x = 10$ 时，甲店需付费 $5 \times 10 + 60 = 110$ 元；乙店需付费 $4.5 \times 10 + 72 = 117$ 元

$$\therefore 110 < 117$$

\therefore 到甲商店比较合算。

(3) 可在甲店购买 4 副乒乓球拍和 4 盒乒乓球，在乙店购买 6 盒乒乓球。

$$\text{所需费用为：} 4 \times 20 + (10 - 4) \times 5 \times 0.9 = 80 + 27 = 107 \text{ 元}$$

26. A

27. D

28. D

第四篇 基本平面图形



考点 1 公理

知识小贴士

1. 直线公理：经过两点有且只有一条直线．简称：两点确定一条直线．
2. 线段公理：两点之间的所有连线中，线段最短．简称：两点之间线段最短．



典例

1. 下列四个生活、生产现象中，可用“两点之间，线段最短”的几何知识来解释的现象有()
 - A. 用两个钉子就可以把木条固定在墙上
 - B. 把弯曲的公路改直，就能缩短路程
 - C. 植树时，只要定出两棵树的位置，就能确定同一行树所在直线
 - D. 安装木质门框时，为防止门框变形往往沿对角线钉上一根木条

答案

B

解析

A、C 选项对应几何知识：两点确定一条直线；D 选项对应几何知识：三角形具有稳定性；只有 B 选项对应几何知识：两点之间，线段最短，故选 B.



小试牛刀

1. 工人师傅在砌墙时，通常会在墙的两端竖两根标杆并在中间拉一条笔直的线，只要沿着这条线砌墙就不会砌歪，它的几何原理是_____.
2. 小平做事很认真，每次大扫除都会把桌椅排的很整齐！他先把每一列最前和最后的课桌摆好，然后再一次摆中间的课桌，一会儿一列课桌摆在一条线上整整齐齐的，这是因为_____.



考点 2 线段计数

知识小贴士

1. 线段计数问题

若一条直线上取 n 个点，则由这 n 个点组成的线段条数为 $\frac{n(n-1)}{2}$.



典例

1. 往返甲乙两地的火车，中途还需停靠 4 个站，则铁路部门对此运行区间应准备_____种不同的火车票.

答案

30

解析

火车票可以等价于线段数量，现在一条直线上有 6 个点，则这 6 个点组成的线段条数为 15 条，但是往返车票不同，所以应准备的火车票有 $15 \times 2 = 30$ 种.



小试牛刀

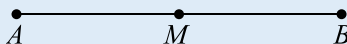
3. 在一条线段 AB 上取 5 个点，此时共有_____条线段.



考点 3 线段计算

知识小贴士

1. 如图，点 M 把线段 AB 分成相等的两条线段 AM 与 BM ，点 M 叫做线段 AB 的中点.



几何语言描述:

$\because M$ 是 AB 的中点

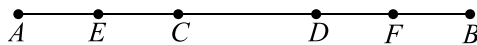
$\therefore AM = BM = \frac{1}{2}AB$

或 $AB = 2AM = 2BM$



典例

1. 如图, C, D 是线段 AB 上的两点, E 是 AC 的中点, F 是 BD 的中点, 若 $AB=10, CD=4$, 则 EF 的长为 ()



- A. 6 B. 7 C. 5 D. 8

答案

B

解析

$$\because AB=10, CD=4$$

$$\therefore AC+BD=6$$

$\because E$ 是 AC 的中点, F 是 BD 的中点

$$\therefore EC=\frac{1}{2}AC, DF=\frac{1}{2}BD$$

$$\therefore EF=EC+CD+DF=\frac{1}{2}(AC+BD)+CD=7$$



小试牛刀

4. 如图, 点 C 是 AB 的中点, 点 D 是 BC 的中点, 下列结论: ① $CD=AC-DB$, ② $CD=\frac{1}{4}AB$, ③ $CD=AD-BC$, ④ $BD=2AD-AB$, 正确的有 ()



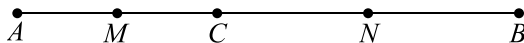
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 已知点 A, B, C, D 顺次落在直线 m 上, 且 $AB:BC:CD=2:3:4$, 点 E 和点 F 分别是 AB, CD 的中点, $EF=12$, 则 $AD=$ _____.

6. (1) 如图, 已知点 C 在线段 AB 上, 且 $AC=8$, $BC=12$, 点 M 、 N 分别是 AC 、 BC 的中点, 求线段 MN 的长度.

(2) 若点 C 是线段 AB 上任意一点, 且 $AC=a$, $BC=b$, 点 M 、 N 分别是 AC 、 BC 的中点, 请直接写出线段 MN 的长度; (用含 a 、 b 的代数式表示)

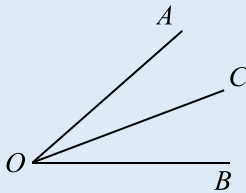
(3) 在 (2) 中, 把点 C 是线段 AB 上任意一点改为: 点 C 是直线 AB 上任意一点, 其它条件不变, 请求出线段 MN 的长度. (用含 a 、 b 的代数式表示)



考点 3 角度计算

知识小贴士

1. 从一个角的顶点引出的一条射线, 把这个角分成两个相等的角, 这条射线叫做这个角的平分线.



几何语言描述:

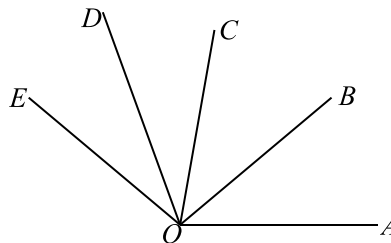
$\because OC$ 平分 $\angle AOB$

$\therefore \angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2} \angle AOB$



典例

1. 如图, OB 是 $\angle AOC$ 的角平分线, OD 是 $\angle COE$ 的角平分线, 如果 $\angle AOB = 40^\circ$, $\angle COE = 60^\circ$, 则 $\angle BOD$ 的度数为 ()

A. 50° B. 60° C. 65° D. 70° 

答案

D

解析

解: $\because OB$ 是 $\angle AOC$ 的角平分线, OD 是 $\angle COE$ 的角平分线, $\angle AOB = 40^\circ$, $\angle COE = 60^\circ$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOB = 40^\circ, \quad \angle COD = \frac{1}{2} \angle COE = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = \angle BOC + \angle COD = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$$

故选: D.



典例

2. 已知 $\angle AOB = 60^\circ$, 其角平分线为 OM , $\angle BOC = 20^\circ$, 其角平分线为 ON , 则 $\angle MON$ 的大小为 ()

A. 20° B. 40° C. 20° 或 40° D. 30° 或 10°

答案

C

解析

解： $\angle BOC$ 在 $\angle AOB$ 内部

$\because \angle AOB = 60^\circ$ ，其角平分线为 OM

$\therefore \angle MOB = 30^\circ$

$\because \angle BOC = 20^\circ$ ，其角平分线为 ON

$\therefore \angle BON = 10^\circ$

$\therefore \angle MON = \angle MOB - \angle BON = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ ；

$\angle BOC$ 在 $\angle AOB$ 外部

$\because \angle AOB = 60^\circ$ ，其角平分线为 OM

$\therefore \angle MOB = 30^\circ$

$\because \angle BOC = 20^\circ$ ，其角平分线为 ON

$\therefore \angle BON = 10^\circ$

$\therefore \angle MON = \angle MOB + \angle BON = 30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$ 。

故选：C。



小试牛刀

7. 如图， OM 是 $\angle AOC$ 的平分线， ON 是 $\angle BOC$ 的平分线。

(1) 如图 1，当 $\angle AOB$ 是直角， $\angle BOC = 60^\circ$ 时， $\angle MON$ 的度数是多少？

(2) 如图 2，当 $\angle AOB = \alpha$ ， $\angle BOC = 60^\circ$ 时，猜想 $\angle MON$ 与 α 的数量关系；

(3) 如图 3，当 $\angle AOB = \alpha$ ， $\angle BOC = \beta$ 时，猜想 $\angle MON$ 与 α 、 β 有数量关系吗？如果有，指出结论并说明理由。

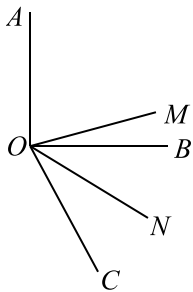


图 1

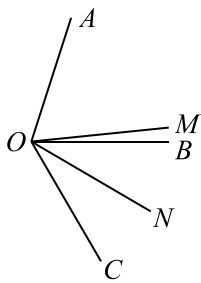


图 2

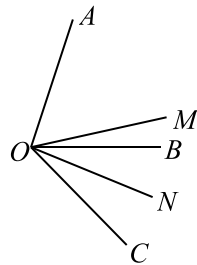
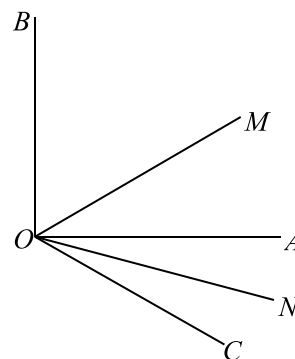


图 3

8. 已知：如图， $\angle AOB$ 是直角， $\angle AOC = 40^\circ$ ， ON 是 $\angle AOC$ 的平分线， OM 是 $\angle BOC$ 的平分线。

(1) 求 $\angle MON$ 的大小；

(2) 当锐角 $\angle AOC$ 的大小发生改变时， $\angle MON$ 的大小是否发生改变？为什么？





参考答案

1. 两点确定一条直线
2. 两点确定一条直线
3. 21
4. C
5. 18
6. 解: (1) 由 $AC=8$, M 是 AC 的中点, 得

$$MC = \frac{1}{2}AC = 4$$

由 $BC=12$, N 是 CB 的中点, 得

$$CN = \frac{1}{2}CB = 6$$

$$\therefore MN = MC + NC = 4 + 6 = 10$$

$$(2) MN = \frac{a+b}{2}$$

(3) ①当点 C 在 B 点的右边时, $AC=a$, $BC=b$, 点 M 、 N 分别是 AC 、 BC 的中点, 得

$$MC = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, \quad NC = \frac{1}{2}BC = \frac{b}{2}$$

$$\therefore MN = MC - NC = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

②当点 C 在 A 点的左边时, $AC=a$, $BC=b$, 点 M 、 N 分别是 AC 、 BC 的中点, 得

$$MC = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, \quad NC = \frac{1}{2}BC = \frac{b}{2}$$

$$\therefore MN = NC - MC = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\text{③点 } C \text{ 在线段 } AB \text{ 上时, } MN = MC + NC = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

7. 解: (1) 如图 1, $\because \angle AOB = 90^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$

$$\therefore \angle AOC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$\therefore OM$ 平分 $\angle AOC$, ON 平分 $\angle BOC$

$$\therefore \angle MOC = \frac{1}{2}\angle AOC = 75^\circ, \quad \angle NOC = \frac{1}{2}\angle BOC = 30^\circ$$

$$\therefore \angle MON = \angle MOC - \angle NOC = 45^\circ$$

$$(2) \text{ 如图 2, } \angle MON = \frac{1}{2}\alpha$$

理由是： $\because \angle AOB = \alpha$ ， $\angle BOC = 60^\circ$

$$\therefore \angle AOC = \alpha + 60^\circ$$

$\because OM$ 平分 $\angle AOC$ ， ON 平分 $\angle BOC$

$$\therefore \angle MOC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \alpha + 30^\circ, \quad \angle NOC = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ$$

$$\therefore \angle MON = \angle MOC - \angle NOC = \left(\frac{1}{2} \alpha + 30^\circ\right) - 30^\circ = \frac{1}{2} \alpha$$

(3) 如图 3， $\angle MON = \frac{1}{2} \alpha$ ，与 α 有关，与 β 的大小无关

理由： $\because \angle AOB = \alpha$ ， $\angle BOC = \beta$

$$\therefore \angle AOC = \alpha + \beta$$

$\because OM$ 是 $\angle AOC$ 的平分线， ON 是 $\angle BOC$ 的平分线

$$\therefore \angle MOC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

$$\angle NOC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \beta$$

$$\therefore \angle MON = \angle MOC - \angle NOC$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \beta$$

$$= \frac{1}{2} \alpha$$

$$\text{即 } \angle MON = \frac{1}{2} \alpha$$

8. 解：(1) $\because \angle AOB$ 是直角， $\angle AOC = 40^\circ$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOB + \angle AOC = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$$

$\because OM$ 是 $\angle BOC$ 的平分线， ON 是 $\angle AOC$ 的平分线

$$\therefore \angle MOC = \frac{1}{2} \angle BOC = 65^\circ, \quad \angle NOC = \frac{1}{2} \angle AOC = 20^\circ$$

$$\therefore \angle MON = \angle MOC - \angle NOC = 65^\circ - 20^\circ = 45^\circ$$

(2) 当锐角 $\angle AOC$ 的大小发生改变时， $\angle MON$ 的大小不发生改变

理由如下：

$$\because \angle MON = \angle MOC - \angle NOC = \frac{1}{2} \angle BOC - \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} (\angle BOC - \angle AOC) = \frac{1}{2} \angle AOB$$

又 $\angle AOB$ 是直角，不改变

$$\therefore \angle MON = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ$$