

14

第十四讲

中考高分专题之二次函数存在性 问题（一）

九年级数学

平行线教育线上课程
2020年

PARALLEL EDUCATION

新的数学方法和概念，
常常比解决数学问题本身更重要。

—— 华罗庚

第十四讲 中考高分专题之二次函数存在性问题（一）

智慧导航

1. 中考二次函数之三角形存在性问题常见题型

- (1) 等腰三角形；
- (2) 直角三角形；
- (3) 等腰直角三角形；
- (4) 全等三角形；
- (5) 相似三角形.

2. 处理思路

- (1) 分类：
 - ①三角形存在性问题：根据三角形自身特征进行分类，如等腰三角形（腰相等），直角三角形（ 90° ），等腰直角三角形（ 90° ）等；
 - ②全等相似存在性问题：根据对应关系进行分类（边/角）.
- (2) 画图：
 - ①根据可能性进行一定的预画图；
 - ②根据预画图进行分析找出几何关系；
 - ③根据对应几何关系进行计算.
- (3) 计算：

勾股定理；相似；等面积法；三线合一；三角函数等.

智慧基石

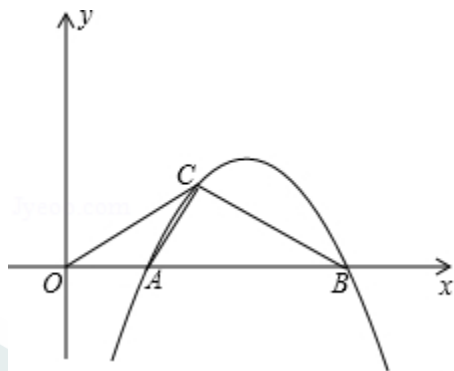
例1

1. 如图, 平面直角坐标系中, 点 A 、点 B 在 x 轴上 (点 A 在点 B 的左侧), 点 C 在第一象限, 满足 $\angle ACB$ 为直角, 且恰使 $\triangle OCA \sim \triangle OBC$, 抛物线 $y = ax^2 - 8ax + 12a (a < 0)$ 经过 A 、 B 、 C 三点.

(1) 求线段 OB 、 OC 的长.

(2) 求点 C 的坐标及该抛物线的函数关系式;

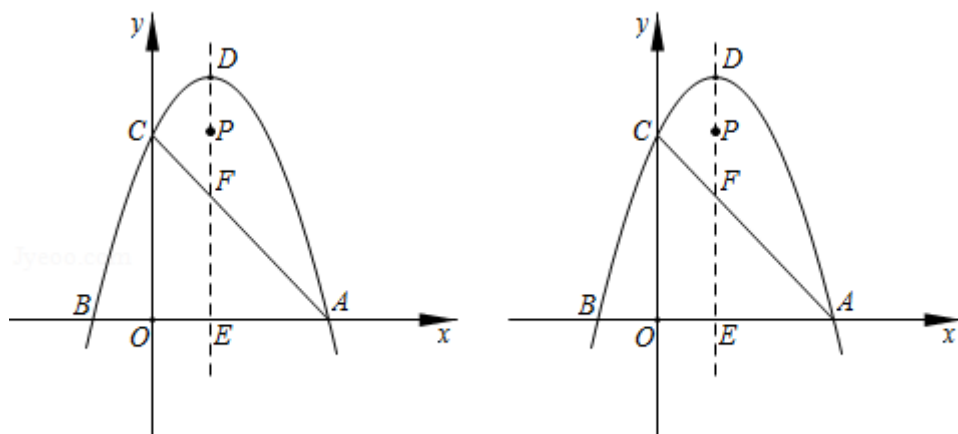
(3) 在 x 轴上是否存在点 P , 使 $\triangle BCP$ 为等腰三角形? 若存在, 求出所有符合条件的 P 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.



练一练

如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 交 x 轴于 A, B 两点（点 A 在点 B 的右侧），交 y 轴于点 C ，顶点为 D ，对称轴分别交 x 轴、线段 AC 于点 E, F 。

- (1) 求抛物线的对称轴及点 A 的坐标；
- (2) 连结 AD, CD ，求 $\triangle ACD$ 的面积；
- (3) 设动点 P 从点 D 出发，沿线段 DE 匀速向终点 E 运动，取 $\triangle ACD$ 一边的两端点和点 P ，若以这三点为顶点的三角形是等腰三角形，且 P 为顶角顶点，求所有满足条件的点 P 的坐标。



备用图

Parallel Education

例2

1. 如图, 矩形 $OABC$ 中, O 为原点, 点 A 在 y 轴上, 点 C 在 x 轴上, 点 B 的坐标为 $(4, 3)$,

抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 A , 与直线 AB 交于点 D , 与 x 轴交于 C, E 两点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 P 从点 C 出发, 在线段 CB 上以每秒 1 个单位长度的速度向点 B 运动, 与此同时,

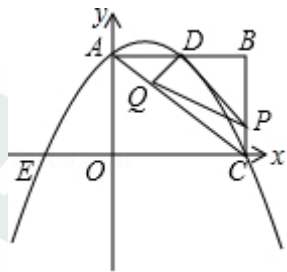
点 Q 从点 A 出发, 在线段 AC 上以每秒 $\frac{5}{3}$ 个单位长度的速度向点 C 运动, 当其中一点到达终点时, 另一点也停止运动. 连接 DP 、 DQ 、 PQ , 设运动时间为 t (秒).

达终点时, 另一点也停止运动. 连接 DP 、 DQ 、 PQ , 设运动时间为 t (秒).

① 当 t 为何值时, $\triangle DPQ$ 的面积最小?

② 是否存在某一时刻 t , 使 $\triangle DPQ$ 为直角三角形?

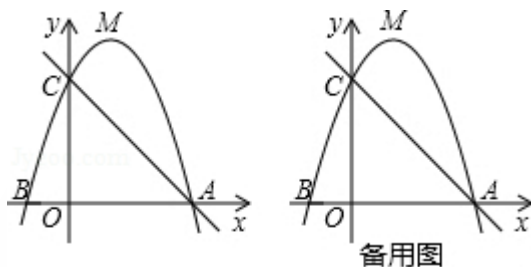
若存在, 直接写出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



练一练

如图，顶点为 M 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 $A(3, 0)$ ， $B(-1, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 C

- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 在直线 AC 的上方的抛物线上，有一点 P （不与点 M 重合），使 $\triangle ACP$ 的面积等于 $\triangle ACM$ 的面积，请求出点 P 的坐标；
- (3) 在 y 轴上是否存在一点 Q ，使得 $\triangle QAM$ 为直角三角形？若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。



Parallel Education

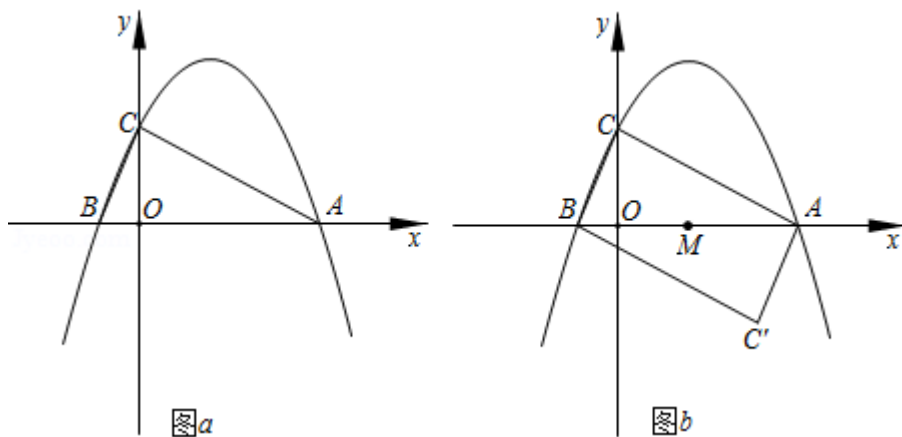
例3

1. 如图 *a*, 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(4, 0)$ 、 $C(0, 2)$, 与 x 轴的另一个交点为 B .

(1) 求出抛物线的解析式.

(2) 如图 *b*, 将 $\triangle ABC$ 绕 AB 的中点 M 旋转 180° 得到 $\triangle BAC'$, 试判断四边形 $BC'AC$ 的形状. 并证明你的结论.

(3) 如图 *a*, 在抛物线上是否存在点 D , 使得以 A 、 B 、 D 三点为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 全等? 若存在, 请直接写出点 D 的坐标; 若不存在请说明理由.



例4

1. 在平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 B ，与 y 轴交于点 C ，二次函数

$y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象经过 B ， C 两点，且与 x 轴的负半轴交于点 A 。

(1) 直接写出： b 的值为_____； c 的值为_____；点 A 的坐标为_____；

(2) 点 M 是线段 BC 上的一动点，动点 D 在直线 BC 下方的二次函数图象上。设点 D 的横坐标为 m 。

①如图1，过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M ，求线段 DM 关于 m 的函数关系式，并求线段 DM 的最大值；

②若 $\triangle CDM$ 为等腰直角三角形，直接写出点 M 的坐标_____。

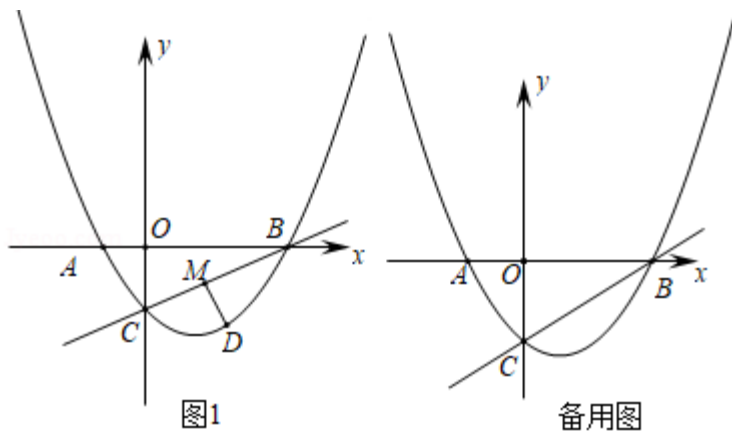


图1

备用图

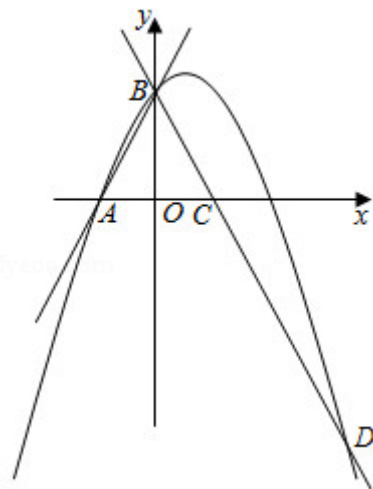
智慧高峰

1. 如图, 直线 $y=2x+2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 把 $\triangle AOB$ 沿 y 轴对折, 点 A 落到点 C 处, 过点 A 、 B 的抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与直线 BC 交于点 B 、 D .

(1) 求直线 BD 和抛物线的解析式;

(2) 在直线 BD 上方的抛物线上求一点 E , 使 $\triangle BDE$ 面积最大, 求出点 E 坐标;

(3) 在第一象限内的抛物线上, 是否存在一点 M , 作 MN 垂直于 x 轴, 垂足为点 N , 使得以 M 、 O 、 N 为顶点的三角形与 $\triangle BOC$ 相似? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



智慧攻略

二次函数问题的重难点:

重点: 对于存在性的发现(分类)及确定结果情况.

难点: 计算.



智慧磨炼

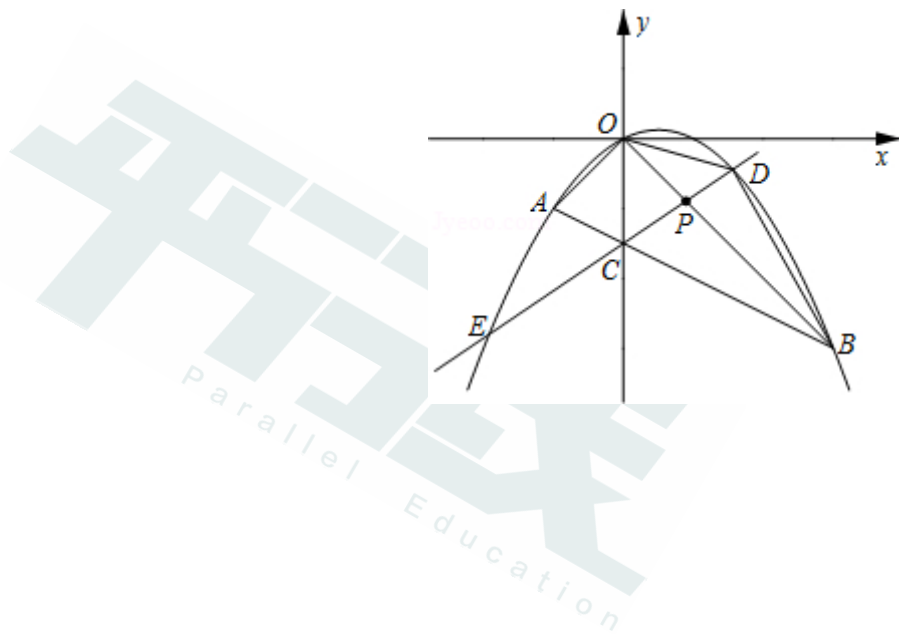
1. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 (m, m) , 点 B 的坐标为 $(n, -n)$, 抛物线经过 A 、 O 、 B 三点, 连接 OA 、 OB 、 AB , 线段 AB 交 y 轴于点 C . 已知实数 m 、 n ($m < n$) 分别是方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的两根.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 P 为线段 OB 上的一个动点 (不与点 O 、 B 重合), 直线 PC 与抛物线交于 D 、 E 两点 (点 D 在 y 轴右侧), 连接 OD 、 BD .

①求 $\triangle BOD$ 面积的最大值, 并写出此时点 D 的坐标;

②当 $\triangle OPC$ 为等腰三角形时, 请直接写出点 P 的坐标.



2. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点，与 y 轴相交于点 C ，且点 B 与点 C 的坐标分别为 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，点 M 是抛物线的顶点。

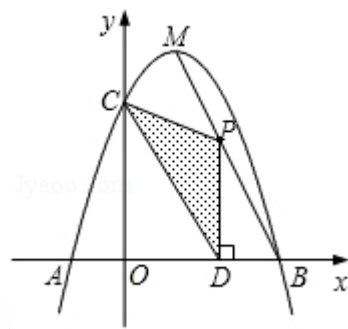
(1) 求二次函数的关系式；

(2) 点 P 为线段 MB 上一个动点，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D 。若 $OD = m$ ， $\triangle PCD$ 的面积为 S ，

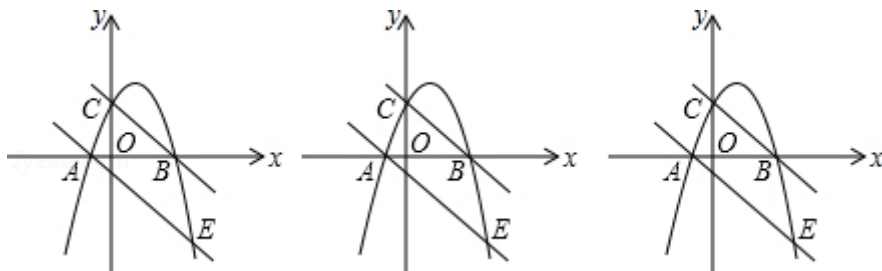
①求 S 与 m 的函数关系式，写出自变量 m 的取值范围。

②当 S 取得最值时，求点 P 的坐标；

(3) 在 MB 上是否存在点 P ，使 $\triangle PCD$ 为直角三角形？如果存在，请直接写出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由。



3. 如图，抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 经过 $A(-1, 0)$ ， B 两点，且与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，抛物线与直线 $y = -x - 1$ 交于 A ， E 两点.



- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 坐标轴上是否存在一点 Q ，使得 $\triangle AQE$ 是以 AE 为底边的等腰三角形？若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.
- (3) P 点在 x 轴上且位于点 B 的左侧，若以 P ， B ， C 为顶点的三角形与 $\triangle ABE$ 相似，求点 P 的坐标.

Parallel Education