

12

第十二讲 分式方程进阶

八年级数学

平行线教育线上课程
2020 年

PARALLEL EDUCATION

宁可少些，但要好些。

—— 高斯

第十二讲 分式方程进阶

智慧导航

1. 分式方程的定义

分母中含有未知数的方程叫做分式方程

2. 解分式方程

一般步骤：一化、二解、三检验

- a. 方程两边同时乘最简公分母，约去分母，化为整式方程；
- b. 解整式方程；
- c. 检验（把整式方程的根代入最简公分母，若等于零，则为增根；若不等于零，则为原方程的解）。

3. 分式方程的增根问题

- （1）增根的定义：使原方程最简公分母为零的整式方程的根
- （2）增根的两个条件：
 - a. 增根是去分母后整式方程的根；
 - b. 增根使最简公分母为零。

4. 分式方程的无解问题

无解的两种可能：

- a. 所给分式方程去分母后所得整式方程无解；
- b. 所给分式方程去分母后所得整式方程的解全部是增根。

智慧基石

例1

1. 解分式方程

$$(1) \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{3}{x^2-4}$$

解: $2x-4-x-2=3$
 $x=9$

当 $x=9$ 时, $x^2-4 \neq 0$

$\therefore x=9$ 是方程的解

$$(3) \frac{2x}{x-2} = x-2 + \frac{4}{x-2}$$

解: $2x = x^2 - 4x + 4 + 4$
 $0 = x^2 - 6x + 8$

$$0 = (x-4)(x-2)$$

解得 $x_1=2, x_2=4$

当 $x_1=2$ 时, $x-2=0$

当 $x_2=4$ 时, $x-2 \neq 0$

$\therefore x=2$ 是增根

$x=4$ 是方程的解

练一练

解分式方程

$$(1) \frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2x+6}$$

解: $4+3x+9=7$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

当 $x=-2$ 时, $2(x+3) \neq 0$

$\therefore x=-2$ 是方程的解

$$x(x+1)(x-1)$$

$$(2) \frac{7}{x^2+x} + \frac{5}{x^2-x} = \frac{6}{x^2-1}$$

解: $7(x-1)+5(x+1)=6x$

$$7x-7+5x+5=6x$$

$$6x=2$$

$$x=\frac{1}{3}$$

当 $x=\frac{1}{3}$ 时, $x(x^2-1) \neq 0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 是方程的解

$$(4) \frac{x}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3}$$

解: $x^2-3x+6=x+3$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-3)(x-1)=0$$

解得 $x_1=1, x_2=3$

当 $x_1=1$ 时, $x^2-9 \neq 0$

当 $x_2=3$ 时, $x^2-9=0$

$\therefore x=3$ 是增根

$x_2=1$ 是方程的解

$$(2) \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$$

解: $x^2+x-x+1=x+3$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

解得: $x_1=-1, x_2=2$

当 $x_1=-1$ 时, $x-1=0$

当 $x_2=2$ 时, $x^2-1 \neq 0$

$\therefore x=-1$ 是增根

$x_2=2$ 是方程的解

例2

1. 解分式方程

$$(1) \frac{12}{x^2-9} - \frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+3}$$

解: $12 - 2x - 6 = x - 3$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

当 $x=3$ 时, $x^2-9=0$

$\therefore x=3$ 是增根

方程无解

$$(2) \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

解: $x^2 + 2x - x^2 - x + 2 = 3$

$$x = 1$$

当 $x=1$ 时, $(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 是增根

方程无解

练一练

解分式方程

$$(1) \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$$

解: $2x-2+3x+3=6$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

当 $x=1$ 时, $x^2-1=0$

$\therefore x=1$ 是增根

方程无解

$$(2) \frac{5x+2}{x^2+x} = \frac{3}{x+1}$$

解: $5x+2=3x$

$$x = -1$$

当 $x=-1$ 时, $x^2+x=0$

$\therefore x=-1$ 是增根

方程无解

例3

1. 若关于 x 的分式方程 $\frac{x+m}{x-2} + \frac{3m}{4-2x} = 3$ 的解为正实数，求实数 m 的取值范围为

$$m < 12 \text{ 且 } m \neq 4 \quad \frac{\frac{x+m}{x-2} - \frac{3m}{2(x-2)}}{= 3} \quad m < 12 \text{ 且 } m \neq 4$$

$$2x + 2m - 3m = 6x - 12$$

$$4x = 12 - m$$

$$x = \frac{12-m}{4} > 0$$

$$\text{且 } x = \frac{12-m}{4} \neq 2$$

2. 若方程 $\frac{3}{x+3} = \frac{2}{x+k}$ 有负数根，则 k 的取值范围是 (B)

- A. $k < 2$ B. $k > 2$ 且 $k \neq 3$ C. $k \leq 2$ D. $k \geq 2$

$$3x + 3k = 2x + 6$$

$$x = 6 - 3k < 0 \Rightarrow k > 2$$

$$6 - 3k + 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$$

$$6 - 3k + k \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$$

练一练

1. 从 -3 、 -2 、 -1 、 0 、 1 、 3 这六个数中，随机抽取一个数，记为 a 。关于 x 的方程

$$\frac{2x+a}{x-1} = 1 \text{ 的解是负数，那么这 6 个数中所有满足条件的 } a \text{ 的值有 } 0, -1, 3$$

$$2x + a = x - 1$$

$$x = -1 - a < 0 \Rightarrow a > -1$$

$$-1 - a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$$

2. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3} - 2 = \frac{k}{x-3}$ 有一个正数解，则 k 的取值范围为

$$k < 6 \text{ 且 } k \neq 3$$

$$x - 2x + 6 = k$$

$$x = 6 - k > 0 \Rightarrow k < 6$$

$$6 - k - 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$$

例4

1. 关于 x 的方程 $\frac{3x-2}{x+1} - \frac{m}{x+1} = 2$ 有增根, 则 m 的值为 (D)

A. 2

B. -7

C. 5

D. -5

$$3x-2-m=2x+2$$

$$x=4+m=-1 \Rightarrow m=-5$$

2. 如果解关于 x 的方程 $\frac{x-6}{x-5} + 1 = \frac{m}{x-5}$ (m 为常数) 时产生增根, 那么 m 的值为 (A)

A. -1

B. 1

C. 2

D. -2

$$x-6+x-5=m$$

$$2x=11+m$$

$$x = \frac{11+m}{2} = 5$$

$$\Rightarrow 11+m=10 \Rightarrow m=-1$$

练一练

1. 若分式方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{a}{x^2-1}$ 要产生增根, 则 $a = \underline{2}$.

$$x+1=a$$

$$x=a-1 \Rightarrow a-1=1 \Rightarrow a=2$$

$$a-1=-1 \Rightarrow a=0 \text{ 无解}$$

2. 关于 x 的分式方程 $\frac{5x}{x-1} + 3 = \frac{2m-1}{x-1}$ 有增根, 则 m 的值为 (C)

A. -1

B. 1

C. 3

D. 4

$$5x+3x-3=2m-1$$

$$8x=2+2m$$

$$x = \frac{1+m}{4} = 1 \Rightarrow m=3$$

例 5

1. 若分式方程: $2 - \frac{1-kx}{x-2} = \frac{1}{2-x}$ 无解, 则 $k = \underline{-2 \text{ 或 } 0}$

$$2x - 4 - 1 + kx = -1$$

$$\textcircled{1} (2+k)x = 4 \Rightarrow k = -2$$

$$\textcircled{2} x=2 \text{ 时}, k=0$$

2. 若关于 x 的分式方程 $\frac{6}{x-1} = \frac{x+3}{x(x-1)} - \frac{k}{x}$ 无解, 则 k 的值为 $\underline{-5 \text{ 或 } -3}$

$$6x = x+3 - kx + k$$

$$\textcircled{1} (5+k)x = 3+k \Rightarrow k = -5$$

$$\textcircled{2} x=0, k=3$$

$$\textcircled{3} x=1, 5+k \neq 3+k$$

练一练

$$-\frac{x+m}{(x-1)(x+2)} + \frac{x}{x-2} = 1$$

- (1) 若关于 x 的分式方程 $\frac{x+m}{4-x^2} + \frac{x}{x-2} = 1$ 无解, 则 m 的值是 (A)

A. 2 或 6

B. 2

C. 6

D. 2 或 -6

$$-x - m + x^2 + 2x = x^2 - 4$$

$$x = m - 4$$

$$x=2 \text{ 时}, m=6$$

$$x=-2 \text{ 时}, m=2$$

- (2) 若关于 x 的分式方程 $\frac{x-a}{x+1} = a$ 无解, 则 a 的值为 (D)

A. 1

B. -1

C. 1 或 0

D. 1 或 -1

$$x - a = ax + a$$

$$\textcircled{1} (1-a)x = 2a \Rightarrow a=1$$

$$\textcircled{2} x=-1, -1+a=2a \Rightarrow a=-1$$

例 6

1. 小玲每天骑自行车或坐公交车上学，她上学的路程为 20 千米，坐公交车的平均速度是骑自行车的平均速度的 3 倍，坐公交车比骑自行车上学早到 40 分钟，设小玲骑自行车的平均速度为 x 千米/小时，根据题意，下面列出的方程正确的是 (C)

A. $\frac{20}{x} - \frac{20}{3x} = 40$

B. $\frac{20}{3x} - \frac{20}{x} = 40$

C. $\frac{20}{x} - \frac{20}{3x} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{20}{3x} - \frac{20}{x} = \frac{2}{3}$

练一练

- 某工厂计划生产 300 个零件，由于采用新技术，实际每天生产零件的数量是原计划的 2 倍，因此提前 5 天完成任务。设原计划每天生产零件 x 个，根据题意，所列方程正确的是 (C)

A. $\frac{300}{x} - \frac{300}{x+2} = 5$

B. $\frac{300}{2x} - \frac{300}{x} = 5$

C. $\frac{300}{x} - \frac{300}{2x} = 5$

D. $\frac{300}{x+2} - \frac{300}{x} = 5$

智慧高峰

1. 解分式方程 (换元法)

$$(1) \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{x}{x+1} - 2 = 0$$

解: 令 $\frac{x}{x+1} = y$, 则

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

$$y = -1 \text{ 或 } 2$$

$$\textcircled{1} \frac{x}{x+1} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \frac{x}{x+1} = 2 \Rightarrow x = -2$$

$$(2) \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^2} - 8 = 0$$

解: 令 $y = \frac{1}{x^2}$, 则

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y-4)(y+2) = 0$$

$$y = -2 \text{ (舍)} \text{ 或 } 4$$

$$\text{则 } \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

智慧攻略

1. 分式方程重难点

解分式方程的一般步骤：一化（去分母）、二解、三检验

2. 分式方程易错点

解分式方程后一定要检验，讨论方程的根是存在增根的情况

3. 分式方程应用

关键：找等量关系列分式方程

智慧磨炼

1. 解分式方程

(1) $\frac{x}{2x-3} + \frac{5}{3-2x} = 4$

解: $x-5 = 8x-12$
 $7x = 7$
 $x = 1$
 当 $x=1$ 时, $2x-3 \neq 0$
 $\therefore x=1$ 是方程的解

(2) $\frac{x}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$

解: $x^2+x-4 = x^2-4$
 $1x = 0$
 $x = 0$
 当 $x=0$ 时, $x^2-4 \neq 0$
 $\therefore x=0$ 是方程的解

(3) $\frac{3}{x(x+1)} = 1 - \frac{3}{x+1}$

解: $3 = x^2+x-3x$
 $x^2-x-3=0$
 $(x-3)(x+1)=0$
 $x = -1$ 或 3

当 $x=-1$ 时, $x(x+1)=0$
 当 $x=3$ 时, $x(x+1) \neq 0$
 $\therefore x=-1$ 是增根

$x=3$ 是方程的解

(4) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$

解: $2x+2-3x+3 = x+3$
 $1x = 2$
 $x = 1$
 当 $x=1$ 时, $x^2-1=0$
 \therefore 方程无解

2. 若分式方程 $\frac{x}{x-4} = 2 + \frac{a}{x-4}$ 的解为正数, 则 a 的取值范围是 $a < 8$ 且 $a \neq 4$.

$$x = 2x - 8 + a$$

$$x = 8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$$

$$8 - a \neq 4 \Rightarrow a \neq 4$$

增根

3. 若分式方程 $\frac{3x-a}{x^2-2x} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x}$ 去分母后所得整式方程的解不是原分式方程的解，则实数 a 的取值是 (A)

A. 4 或 8

B. 4

C. 8

D. 0 或 2

$$3x - a + x = 2x - 4$$

$$2x = a - 4$$

$$x = \frac{a-4}{2}$$

$$\textcircled{1} x=0, \frac{a-4}{2}=0 \Rightarrow a=4$$

$$\textcircled{2} x=2, \frac{a-4}{2}=2 \Rightarrow a=8$$

4. 关于 x 的分式方程 $\frac{7x}{x-1} + 5 = \frac{2m-1}{x-1}$ 有增根，则 m 的值为 4.

$$7x + 5x - 5 = 2m - 1$$

$$12x = 4 + 2m$$

$$x = \frac{2+m}{6} = 1$$

$$\Rightarrow 2+m=6 \Rightarrow m=4$$

5. 若关于 x 的方程 $\frac{1}{x-4} + \frac{m}{x+4} = \frac{m+3}{x^2-16}$ 无解, 则 m 的值为 $-1, -\frac{1}{3}, 5$

$$x+4 + m(x-4) = m+3$$

$$(m+1)x = 5m-1$$

$$\textcircled{1} m = -1$$

$$\textcircled{2} x = 4, 4m+4 = 5m-1 \Rightarrow m = 5$$

$$\textcircled{3} x = -4, 4m+4 = -5m+1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

6. “儿童节”前夕, 某校社团进行爱心义卖活动, 先用 800 元购进第一批康乃馨, 包装后售完, 接着又用 400 元购进第二批康乃馨, 已知第二批所购数量是第一批所购数量的三分之一, 且康乃馨的单价比第一批的单价多 1 元, 设第一批康乃馨的单价是 x 元, 则下列方程中, 正确的是 (C)

A. $\frac{800}{x} + 1 = \frac{400}{x}$

B. $\frac{800}{x} = \frac{400}{x+1}$

C. $\frac{1}{3} \times \frac{800}{x} = \frac{400}{x+1}$

D. $800x = 3 \times 400(x+1)$

$$\frac{800}{x} \times \frac{1}{3} = \frac{400}{x+1}$$