

12

第十二讲 必胜策略

五年级数学

平行线教育线上课程

2020 年

PARALLEL EDUCATION

数学家本质上是个着迷者，不迷就没有数学。

努瓦列斯

第十二讲 必胜策略

智慧导航

1. 报数游戏
2. 移动棋子
3. 海盗分金

智慧基石

例 1

尼克和珍妮在玩报数游戏，两人轮流报数，规定每次最少报 1 个数，最多报 3 个数，谁先报到 30 谁赢，如果珍妮先报，有没有方法让珍妮一定获胜？

还原倒推：

报 30 赢，报 29 输，报 28 输，报 27 输，报 26 赢，报 25 输，报 24 输，报 23 输……

4 个一周期

$30 \div 4 = 7 \text{ (组)} \cdots \cdots 2 \text{ (个)}$

珍妮先报 2 个数，接下来每组和尼克凑 4 个数，一定获胜。

练一练

桌子上有 30 根火柴，尼克、珍妮轮流取，规定每次可取 1 根或者 2 根火柴，取走最后一根火柴的人为胜者，如果尼克后取，有没有方法让尼克一定获胜？

还原倒推：

取 30 赢，取 29 输，取 28 输，取 27 赢，取 26 输，取 25 输……

3 根一周期

$30 \div 3 = 10 \text{ (组)}$

珍妮先取，尼克后取，每组和珍妮凑 3 根，一定获胜。

例 2

桌上放着 63 根火柴，甲、乙两人轮流每次取走 1 根至 3 根。规定谁取走最后一根谁就获胜。如果甲先取，是否有必胜的方法？

还原倒推：

取 63 赢，取 62 输，取 61 输，取 60 输，取 59 赢，取 58 输，取 57 输，取 56 输……

4 根一周期

$63 \div 4 = 15 \text{ (组)} \cdots \cdots 3 \text{ (根)}$

甲先取 3 根，接下来每组和乙凑 4 根，一定获胜。

练一练

桌上放着 63 根火柴，甲、乙两人轮流每次取走 1 根至 3 根。规定谁取走最后一根火柴谁就算输，还是甲先取，是否有必胜的方法？

取 63 输，相当于取 62 赢

还原倒推：

取 62 赢，取 61 输，取 60 输，取 59 输，取 58 赢，取 57 输，取 56 输，取 55 输……

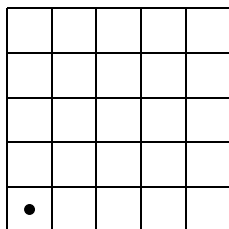
4 根一周期

$62 \div 4 = 15 \text{ (组)} \cdots \cdots 2 \text{ (根)}$

甲先取 2 根，接下来每组和乙凑 4 根，一定获胜。

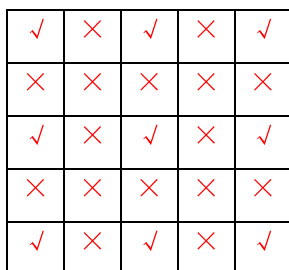
例 3

如图所示，在一个 5×5 的棋盘上有一枚棋子，它放在左下角的方格里，尼克、珍妮两人轮流移动这枚棋子，每次只能向上、向右、或者向右上方移动一格，谁能把棋子移到右上角谁就获胜。如果要获胜，应采取什么办法？



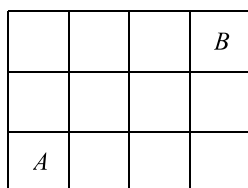
还原倒推：

先移动的输，后移动的赢，只走√的格子。



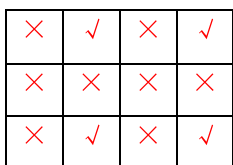
练一练

如图所示，在方格 A 中放有一枚棋子，尼克、珍妮两人轮流移动这枚棋子，只能向上、向右或向右上方走一格，最终将棋子走到方格 B 的人获胜。如果尼克先走，有没有必胜策略？



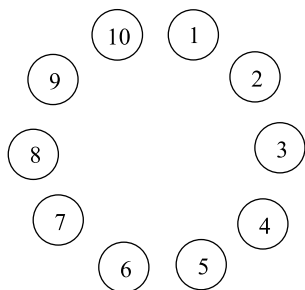
还原倒推：

先移动的赢，只走√的格子。



例 4

用 10 枚硬币摆成一个圆圈，尼克、珍妮轮流从中取走一枚或者两枚，如果取走两枚，两枚原来必须是相邻的。谁取走最后一枚谁就获胜，尼克应该采取什么样的策略才能获胜？

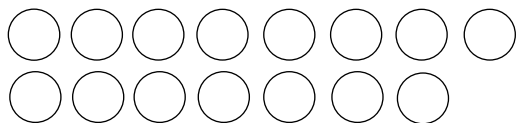


对称思想

让对方先取，不管对方怎么取，自己在圆心对称的位置取同样多枚。

练一练

如图摆放着两行硬币，尼克、珍妮两人轮流取硬币，每次只能在一行里面任意取，取几枚不限，取得最后一枚硬币的人获胜。怎样才能获胜？



对称思想

先取的获胜，先取第一行中的一个，然后不管对方怎么取，自己在另外一行取同样多枚。

例 5

在纸上写有一行若干个“—”号，尼克、珍妮两人轮流将其中一个或相邻的两个“—”号改成“+”号。谁能改到最后一个“—”号，谁就获胜。如果有 11 个“—”号，且规定尼克先改，有没有必胜策略？

对称思想

先改最中间一个，然后不管对方怎么改，自己都改对称位置的部分。

练一练

在纸上写有一行若干个“—”号，尼克、珍妮两人轮流将其中一个或相邻的两个“—”号改成“+”号。谁能改到最后一个“—”号，谁就获胜。如果有 12 个“—”号，且规定尼克先改，有没有必胜策略？

对称思想

先改最中间两个，然后不管对方怎么改，自己都改对称位置的部分。

例 6

黑板上写着一排相连的自然数 $1, 2, 3, \dots, 50$. 甲、乙两人轮流划掉连续的 2 个数. 规定在谁划过之后另一人再也划不成了, 谁就算取胜. 问: 甲有必胜的策略吗?

甲先划, 把中间 25、26 这两个数划去, 就将 1 到 50 这 50 个数分成了两组, 每组有 24 个数. 这样, 只要乙在某一组里有数字可划, 那么甲在另一组里相对称的位置上就总有数字可划. 因此, 若甲先划, 且按上述策略去进行, 则甲必能获胜.

练一练

有两堆火柴, 其中一堆有 25 根, 另一堆有 38 根火柴. 两人轮流从两堆里的其中一堆里拿, 拿的根数不限, 谁拿到最后的部分谁获胜. 那么谁将必胜? 获胜的策略是什么?

先拿的必胜.

先拿的只需先从 38 根的那堆拿 13 根, 就将火柴分成一样多的两堆, 这样, 只要后拿的人在某一堆里有火柴可拿, 那么先拿的人在另一堆里拿相同的根数. 因此, 先拿的人按上述策略去进行, 必能获胜.

智慧高峰

有 5 个海盗抢得 100 枚金币，在如何分赃问题上争吵不休，于是他们决定：

(1) 抽签决定各人的号码【1、2、3、4、5】。

(2) 由 1 号提出分配方案，然后 5 人表决，如果方案超过半数同意就被通过。否则他将被扔进大海喂鲨鱼。

(3) 1 号死后，由 2 号提方案，4 人表决。当且仅当超过半数同意时方案通过，否则 2 号同样被扔进大海。

(4) 依次类推，直到找到一个每个人都接受的方案。如果只剩下 5 号，他当然接受一人独吞的结果。

假定海盗都是理性的，判决都能执行，那么，如果你是第一个强盗，你该如何提出分配方案才能使自己的收益最大化？

海盗分金

剩 4 号、5 号：4 号必死，5 号 100 枚

剩 3 号、4 号、5 号：3 号 100 枚，4 号 0 枚，5 号 0 枚

剩 2 号、3 号、4 号、5 号：2 号 98 枚，3 号 0 枚，4 号 1 枚，5 号 1 枚

剩 1 号、2 号、3 号、4 号、5 号：1 号 97 枚，2 号 0 枚，3 号 1 枚，4 号 2 枚，5 号 0 枚

或 1 号 97 枚，2 号 0 枚，3 号 1 枚，4 号 0 枚，5 号 2 枚

智慧攻略

1. 学会并掌握报数游戏中的规律，会制定相应的必胜策略
2. 运用倒推法和对称思想设计必胜策略，归纳取胜方法

智慧磨炼

1. 桌子上有 36 根火柴，尼克、珍妮轮流取，规定每次可取 1 根或者 2 根火柴，取走最后一根火柴的人为胜者，如果尼克后取，有没有方法让尼克一定获胜？

珍妮先取，尼克后取，每组和珍妮凑 3 根，一定获胜。

2. 尼克和珍妮在玩报数游戏，两人轮流报数，规定每次最少报 1 个数，最多报 3 个数，谁先报到 365 谁赢，如果珍妮先报，有没有方法让珍妮一定获胜？

$$365 \div 4 = 91 \text{ (组)} \cdots \cdots 1 \text{ (个)}$$

珍妮先报 1 个数，接下来每组和尼克凑 4 个数，一定获胜。

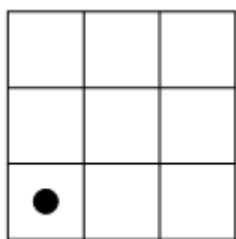
3. 有 2019 粒纽扣，两人轮流从中取几粒，但每人至少取 1 粒，最多取 4 粒，谁取到最后 1 粒，就算谁输。问：保证一定获胜的对策是什么？

$$2019 - 1 = 2018 \text{ (粒)}$$

$$2018 \div 5 = 403 \text{ (组)} \cdots \cdots 3 \text{ (粒)}$$

先取的获胜。先取 3 粒，接下来每组和另一个人凑 5 粒，一定获胜。

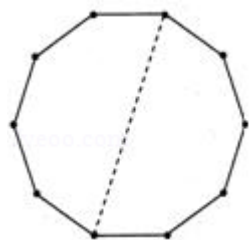
4. 如图所示，在一个 3×3 的棋盘上有一枚棋子，它放在左下角的方格里，尼克、珍妮两人轮流移动这枚棋子，每次只能向上、向右、或者向右上方移动一格，谁把棋子移到右上角谁就获胜。如果要获胜，应采取什么办法？



后移动的获胜，直走 \checkmark 的方格。

\checkmark	\times	\checkmark
\times	\times	\times
\checkmark	\times	\checkmark

5. 甲、乙两人依次在一个正十边形中画对角线（不相邻的两个顶点的连线），规定新画的不能和画好的交叉，到最后谁不能画就算输，甲先画，如果画法都合理，谁必胜？



甲必胜。

甲先沿对称轴画一条对角线，把正十边形分成了对称的两部分，只要乙能画，甲就能在另一部分里对称的画一条。