11

第十一讲

分式恒等变形

八年级数学

平行线教育线上课程

2020 年

PARALLEL EDUCATION

天才在于积累，

聪明在于勤奋。

——华罗庚

第11讲

第十一讲 分式恒等变形

智慧导航

1．分式恒等变形的依据

①分式的基本性质

②分式的运算法则

2．分式恒等变形题型

①整体代入

②取倒法

③恰当的引入参数

③待定系数法

⑥拆分变形

智慧基石

例 1

1．下列各式与$\frac{x}{x-y}$相等的是（ B ）

A．$\frac{x^2}{(x-y)^2}$　　B．$\frac{x^2-xy}{(x-y)^2}$　　C．$\frac{2x}{2x-y}$　　D．$\frac{-x}{x+y}$

练一练

1．下列各式中，从左到右的变形正确的是（ C ）

A．$\frac{x+1}{y+1}=\frac{x}{y}$　　B．$\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}$　　C．$\frac{xy}{y^2}=\frac{x}{y}$　　D．$\frac{x}{y}=\frac{x^2}{y^2}$

2．若把分式$\frac{3x+4y}{2x-5y}$中的x、y都扩大4倍，则该分式的值(A)

A．不变　　B．扩大4倍　　C．缩小4倍　　D．扩大16倍

例 2

1．计算$(\frac{x^2+1}{x^2-3x}-\frac{x^2-1}{x^2-2x-3})\div\frac{x+1}{x}$．

解：原式$=[\frac{x^2+1}{x(x-3)}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}]\cdot\frac{x}{x+1}$

$=[\frac{x^2+1}{x(x-3)}-\frac{x(x-1)}{x(x-3)}]\cdot\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x+1}{x(x-3)}\cdot\frac{x}{x+1}$

$=\frac{1}{x-3}$

练一练

计算：$(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4})\div\frac{x-4}{2x}$

解：原式 $=[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}]\cdot\frac{2x}{x-4}$

$=\frac{x^2-4-x^2+x}{x(x-2)^2}\cdot\frac{2x}{x-4}$

$=\frac{x-4}{(x-2)^2}\cdot\frac{2}{x-4}$

$=\frac{2}{(x-2)^2}$

例 3

1. 若 $x+y=-4$，$xy=-3$，求 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$ 的值.

解：原式 $=\frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)}$

$=\frac{x+y+2}{xy+x+y+1}$

$\because x+y=-4$，$xy=-3$

$\therefore$ 原式 $=\frac{-4+2}{-3-4+1}$

$=\frac{-2}{-6}$

$=\frac{1}{3}$

2. 若分式 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则 $\frac{2x-14xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值为(D)

$y-x=3xy$

$x-y=-3xy$ 代入

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

练一练

已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，那么 $\frac{2a+3ab+2b}{a-ab+b}=$(B)

$a+b=2ab$ 代入

A．6　　B．7　　C．9　　D．10

例 4

1. 若 $x^2-3x+1=0$，求 $x+\frac{1}{x}$，$x^2+\frac{1}{x^2}$，$x-\frac{1}{x}$ 的值.

解：$\because x^2-3x+1=0$

$\therefore x\neq0$

$\therefore \frac{x^2-3x+1}{x}=0$

即 $x-3+\frac{1}{x}=0$

$\therefore x+\frac{1}{x}=3$

$\because x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$=3^2-2$

$=7$

$\because (x-\frac{1}{x})^2=(x+\frac{1}{x})^2-4$

$=3^2-4$

$=5$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}$

2. 若 $x^2-3x+1=0$，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

解：$\because x^2-3x+1=0$

$\therefore x\neq0$

$\therefore \frac{x^2-3x+1}{x}=0$

即 $x-3+\frac{1}{x}=0$

$\therefore x+\frac{1}{x}=3$

$\because x\neq0$

$\therefore x^2\neq0$

分式基本性质法：

$\therefore$ 原式 $=\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}}$

$=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2+1}$

$=\frac{1}{3^2-1}$

$=\frac{1}{8}$

倒数法：

$\because x^2\neq0$

$\therefore \frac{x^4+x^2+1}{x^2}$

$=x^2+1+\frac{1}{x^2}$

$=(x+\frac{1}{x})^2-2+1$

$=3^2-1$

$=8$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{8}$

3. 若 $\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$，求 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

解: $\because \dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x\neq 0$

$\therefore \dfrac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2-x+1}{x}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{x-1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\because x\neq 0$

$\therefore x^2\neq 0$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}}$

$=\dfrac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

$=\dfrac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2+1}$

$=\dfrac{1}{3^2-1}$

$=\dfrac{1}{8}$

倒数法:

$\because x\neq 0$

$\therefore \dfrac{x^2-x+1}{x}=2$

$\therefore x-1+\dfrac{1}{x}=2$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\because x\neq 0$

$\therefore x^2\neq 0$

$\therefore \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$

$=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$

$=(x+\dfrac{1}{x})^2-2+1$

$=3^2-1$

$=8$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{8}$

练一练

已知 $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$，试求分式 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值

解: $\because \dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore x\neq 0,\ x^2\neq 0$

$\therefore \dfrac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2+x+1}{x}}=\dfrac{1}{4}$

即 $\dfrac{1}{x+1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}+1=4$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\because x^2\neq 0$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}}$

$=\dfrac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

$=\dfrac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2+1}$

$=\dfrac{1}{3^2-1}$

$=\dfrac{1}{8}$

倒数法:

$\because x\neq 0$

$\therefore \dfrac{x^2+x+1}{x}=4$

$\therefore x+1+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=3$

$\because x\neq 0$

$\therefore x^2\neq 0$

$\therefore \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$

$=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$

$=(x+\dfrac{1}{x})^2-2+1$

$=3^2-1$

$=8$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{8}$

例 5

1. 若 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$，求 $\dfrac{2xy+3yz+4zx}{x^2+y^2+z^2}$ 的值.

设"k"法

解: 设 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=k$

$\therefore x=2k$

$y=3k$

$z=4k$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{2\cdot 2k\cdot 3k+3\cdot 3k\cdot 4k+4\cdot 4k\cdot 2k}{(2k)^2+(3k)^2+(4k)^2}$

$=\dfrac{(12+36+32)k^2}{(4+9+16)k^2}=\dfrac{80}{29}$

可用特值法

2. 若 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{c}{a+b}$，则 $\dfrac{2a+2b+c}{a+b-3c}=$ $\underline{\frac{1}{4}\text{或}-5}$.

设"k"法

解: 设 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{c}{a+b}=k$

$\therefore a=(b+c)k$

$b=(a+c)k$

$c=(a+b)k$

$\therefore (a+b+c)=2k(a+b+c)$

① 当 $a+b+c=0$ 时

$\therefore a+b=-c$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{-2c+c}{-c-3c}=\dfrac{1}{4}$

② 当 $a+b+c\neq 0$ 时

$\therefore 2k=1$

$k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{c}{a+b}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=2c$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{4c+c}{2c-3c}=-5$

练一练

若 $a:b:c=3:4:5$，则 $\dfrac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$ 的值为 $\underline{\frac{47}{50}}$.

解: $\because a:b:c=3:4:5$

$\therefore$ 设 $a=3k,\ b=4k,\ c=5k$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{3k\cdot 4k+4k\cdot 5k+3k\cdot 5k}{(3k)^2+(4k)^2+(5k)^2}$

$=\dfrac{(12+20+15)k^2}{(9+16+25)k^2}$

$=\dfrac{47}{50}$

也可用特值法

智慧高峰

1. 已知 $a^2+4a+1=0$，且 $\frac{a^4+ma^2+1}{3a^3+ma^2+3a}=5$，求 m 的值.

解：$\because a^2+4a+1=0$

$\therefore a\neq 0, a^2\neq 0$

$\therefore \frac{a^2+4a+1}{a}=0$

即 $a+4+\frac{1}{a}=0$

$\therefore a+\frac{1}{a}=-4$

$\because a^2\neq 0$

$\therefore \frac{\frac{a^4+ma^2+1}{a^2}}{\frac{3a^3+ma^2+3a}{a^2}}=5$

即 $\frac{a^2+m+\frac{1}{a^2}}{3a+m+\frac{3}{a}}=5$

$\therefore \frac{(a+\frac{1}{a})^2-2+m}{3(a+\frac{1}{a})+m}=5$

$\because a+\frac{1}{a}=-4$

$\therefore \frac{m+14}{m-12}=5$

$\therefore m+14=5m-60$

$4m=74$

$m=\frac{37}{2}$

2. 已知实数 a、b、c 满足 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}$；则 $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}=$ <u>-1 或 8</u>.

智慧攻略

1. 用待定系数法求字母的值
2. 拆分变形或拆项变形

智慧磨炼

1. 已知 $\frac{m}{x+2}$ 与 $\frac{n}{x-2}$ 的和等于 $\frac{4x}{x^2-4}$，求 m、n 的值

解：$\because \frac{m}{x+2}+\frac{n}{x-2}$

$=\frac{m(x-2)+n(x+2)}{x^2-4}$

$=\frac{(m+n)x+2n-2m}{x^2-4}$

$\therefore \frac{(m+n)x+2n-2m}{x^2-4}=\frac{4x}{x^2-4}$

$\therefore \begin{cases} m+n=4 \\ 2n-2m=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$

2. 已知 $\frac{3x-2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$，求 A、B 的值.

解：$\because \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

$=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x+1)(x-1)}$

$\therefore \frac{(A+B)x+(A-B)}{(x+1)(x-1)}=\frac{3x-2}{(x+1)(x-1)}$

$\therefore \begin{cases} A+B=3 \\ A-B=2 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} A=\frac{5}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$

3. $\frac{1}{a^2+a}+\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{1}{a^2+7a+12}=$ <u>$\frac{4}{a^2+4a}$</u>.

$=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}$

$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+4}$

$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+4}$

$=\frac{a+4-a}{a(a+4)}$

$=\frac{4}{a^2+4a}$