

# 11

## 第十一讲 三角形中的全等结构

七年级数学

平行线教育线上课程  
2020 年

PARALLEL EDUCATION

在数学的领域中，提出问题的艺术比  
解答问题的艺术更为重要。

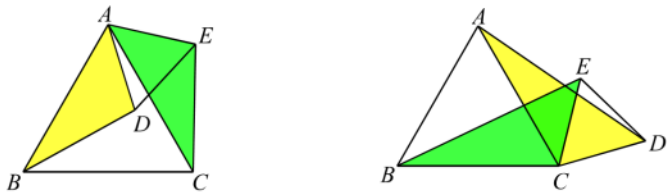
————— 康托尔

第十一讲 三角形中的全等结构

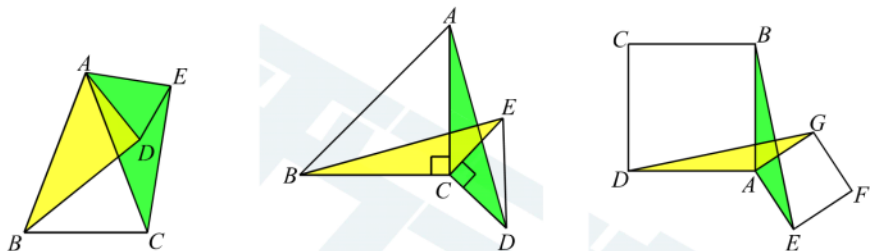
智慧导航

1. 旋转型全等

(1) 共顶点，双等边三角形.

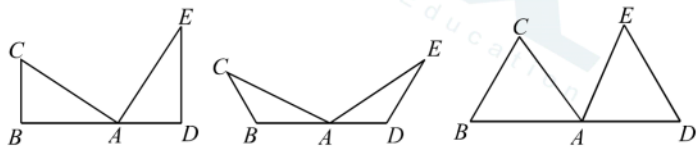


(2) 共顶点，双等腰三角形.

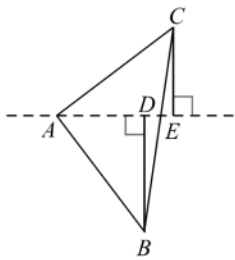


2. 一线三等角型全等

(1) 一线三等角型全等



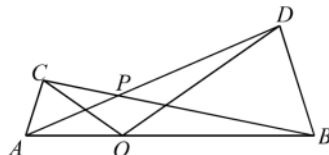
(2) 拓展:



## 智慧基石

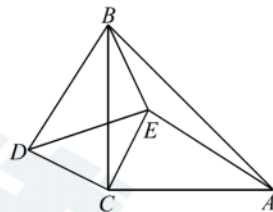
## 例 1

1. 如图, 点  $O$  为线段  $AB$  上的任意一点 (不与  $A$ 、 $B$  重合), 分别以  $AO$ 、 $BO$  为腰在  $AB$  的同侧作等腰  $\triangle AOC$  和  $\triangle BOD$ ,  $OA=OC$ ,  $OB=OD$ ,  $\angle AOC$  与  $\angle BOD$  都是锐角, 且  $\angle AOC = \angle BOD$ ,  $AD$  与  $BC$  相交于点  $P$ ,  $\angle COD = 110^\circ$ , 则  $\angle APB =$   $145^\circ$ .



## 练一练

如图所示,  $AC=BC$ ,  $DC=EC$ ,  $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$ , 且  $\angle EBD = 42^\circ$ , 则  $\angle AEB =$   $132^\circ$ .



## 例 2

1. 如图, 四边形  $ABCD$ 、 $DEFG$  都是正方形, 连接  $AE$ 、 $CG$ , 求证: (1)  $AE=CG$ ; (2)  $AE \perp CG$ .

证明: 由题意知,  $DA=DC$ ,  $DG=DE$ ,  
 $\angle ADC = \angle GDE = 90^\circ$

$$\therefore \angle ADC + \angle ADG = \angle GDE + \angle ADG$$

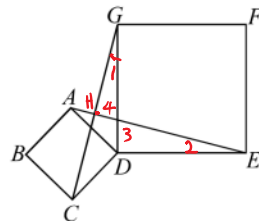
$$\text{即 } \angle CDG = \angle ADE$$

$\therefore$  在  $\triangle CDG$  和  $\triangle ADE$  中,

$$\begin{cases} DC=DA \\ \angle CDG=\angle ADE \\ DG=DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDG \cong \triangle ADE \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AE=CG, \angle 1=\angle 2$$



$$\therefore \angle 3 = \angle 4$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle GHE = 90^\circ$$

$$\therefore AE \perp CG$$

## 练一练

如图两个等边三角形  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCE$ ，连接  $AE$  和  $CD$ ，求证：(1)  $AE = CD$ ；

(2)  $AE$  和  $CD$  之间的夹角为  $60^\circ$ 。

证明：∵  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCE$  是等边三角形

$$\therefore AB = BD, BE = BC$$

$$\angle ABD = \angle EBC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DBC$$

在  $\triangle BAE$  和  $\triangle BDC$  中

$$\begin{cases} BA = BD \\ \angle ABE = \angle DBC \\ BE = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle BDC \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AE = CD$$

1. 如图，点  $E$  在  $AB$  上， $AC \perp AB$ ， $DB \perp AB$ ， $AC = BE$ ， $DE = CE$ ，求证： $BD = AE$ ；

$DE \perp CE$ 。

证明：∵  $AC \perp AB$ ， $DB \perp AB$

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$$

在  $\text{Rt}\triangle CAE$  和  $\text{Rt}\triangle EBD$  中，

$$\begin{cases} AC = BE \\ DE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CAE \cong \text{Rt}\triangle EBD \text{ (HL)}$$

$$\therefore BD = AE, \angle C = \angle 1$$

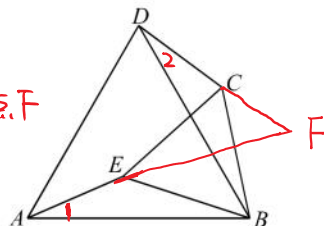
延长  $AE$ ， $DC$  交于点  $F$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle BDC$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \angle F = \angle ABD = 60^\circ$$

$\therefore AE$  和  $CD$  之间的夹角为  $60^\circ$



## 例3

2. 如图， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = OB$ ，直线  $l$  经过点  $O$ ，分别过  $A$ 、 $B$  两点作  $AC \perp l$  交于点  $C$ ，

$BD \perp l$  于点  $D$ 。求证： $AC = OD$ 。

证明：∵  $AC \perp l$ ， $BD \perp l$

$$\therefore \angle ACO = \angle BDO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A + \angle 1 = 90^\circ$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

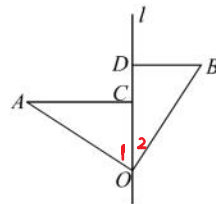
$$\therefore \angle A = \angle 2$$

∴ 在  $\triangle ACO$  和  $\triangle ODB$  中

$$\begin{cases} \angle ACO = \angle BDO \\ \angle A = \angle 2 \\ OA = OB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle ODB \text{ (AAS)}$$

$$\therefore AC = OD$$



## 练一练

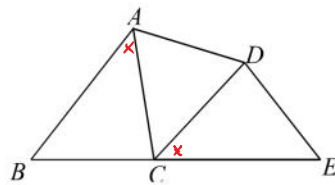
(1) 如图,  $B$ 、 $C$ 、 $E$  三点共线,  $AC=CD$ ,  $\angle B=\angle E=\angle ACD$ , 求证:  $\triangle ABC \cong \triangle CED$ .

证明:  $\because \angle B + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$   
 $\angle BCA + \angle ACD + \angle DCE = 180^\circ$   
 $\angle B = \angle ACD$   
 $\therefore \angle BAC = \angle DCE$

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle CED$  中

$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ \angle BAC = \angle DCE \\ AC = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED (AAS)$



(2) 如图, 在  $\triangle ABC$  两侧作正方形  $ABEF$  和  $ACDG$ ,  $EM \perp BC$  于  $M$ ,  $DN \perp BC$  于  $N$ .

求证:  $EM + DN = BC$ .

证明: 作  $AH \perp BC$  于点  $H$

$$\therefore \angle AHB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABH + \angle BAH = 90^\circ$$

由题意知  $BA = BE$ ,  $\angle ABE = 90^\circ$

$$\therefore \angle ABH + \angle EBM = 90^\circ$$

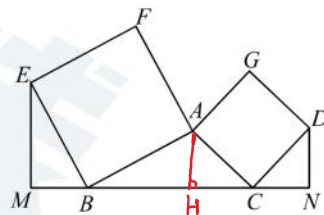
$$\therefore \angle EBM = \angle BAH$$

$\therefore$  在  $\triangle EMB$  和  $\triangle BHA$  中,

$$\begin{cases} \angle M = \angle BHA \\ \angle EBM = \angle BAH \\ BE = BA \end{cases}$$

$\therefore \triangle EMB \cong \triangle BHA (AAS)$

$$\therefore EM = BH$$



同理可得:  $\triangle AHC \cong \triangle CND$

$$\therefore CH = DN$$

$$\therefore BC = BH + CH$$

$$\therefore EM + DN = BC$$

## 智慧高峰

1. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ACB$ 为锐角, 点 $D$ 为射线 $BC$ 上一点, 连接 $AD$ , 以 $AD$ 为边且在 $AD$ 的右侧作正方形 $ADEF$ .

(1) 如果 $AB=AC$ ,  $\angle BAC=90^\circ$ . 当点 $D$ 在线段 $BC$ 上时(与点 $B$ 不重合), 如图2, 线段 $CF$ 、 $BD$ 所在直线的位置关系为  $CF \perp BD$  线段 $CF$ 、 $BD$ 的数量关系为  $CF=BD$ .

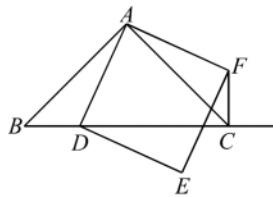


图1

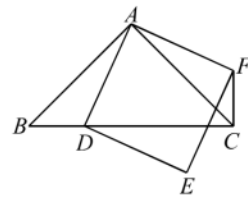


图2

(2) 当点 $D$ 在线段 $BC$ 的延长线上时, 如图3, (1)中的结论是否仍然成立, 并说明理由.

成立, 理由如下:

由题意知,  $AD=AF$ ,  $\angle DAF=90^\circ$

$$\because \angle BAC=90^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAF$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAF$ 中

$$\begin{cases} BA=CA \\ \angle BAD=\angle CAF \\ AD=AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore BD=CF, \angle B = \angle ACF$$

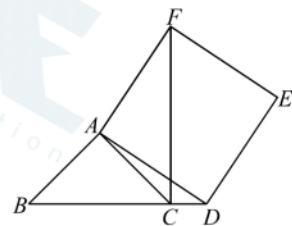


图3

$$\therefore \angle B + \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACF + \angle ACB = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle BCF = 90^\circ$$

$$\therefore CF \perp BD$$

$\therefore$  成立

## 智慧高峰

1. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ACB$ 为锐角, 点 $D$ 为射线 $BC$ 上一点, 连接 $AD$ , 以 $AD$ 为边且在 $AD$ 的右侧作正方形 $ADEF$ .

(1) 如果 $AB=AC$ ,  $\angle BAC=90^\circ$ . 当点 $D$ 在线段 $BC$ 上时(与点 $B$ 不重合), 如图2, 线段 $CF$ 、 $BD$ 所在直线的位置关系为  $CF \perp BD$  线段 $CF$ 、 $BD$ 的数量关系为  $CF=BD$ .

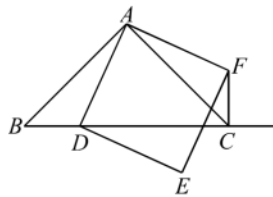


图1

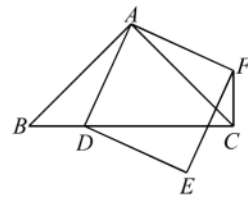


图2

(2) 当点 $D$ 在线段 $BC$ 的延长线上时, 如图3, (1)中的结论是否仍然成立, 并说明理由.

成立, 理由如下:

由题意知,  $AD=AF$ ,  $\angle DAF=90^\circ$

$$\because \angle BAC=90^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAF$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAF$ 中

$$\begin{cases} BA=CA \\ \angle BAD=\angle CAF \\ AD=AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore BD=CF, \angle B = \angle ACF$$

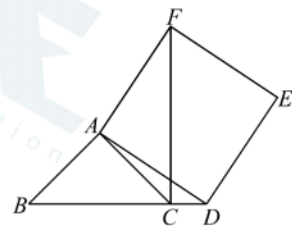


图3

$$\therefore \angle B + \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACF + \angle ACB = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle BCF = 90^\circ$$

$$\therefore CF \perp BD$$

$\therefore$  成立



2. 已知: 如图1,  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC$ ,  $AE$  是过  $A$  的一条直线, 且  $B$ 、 $C$  在  $AE$  的异侧,  $BD \perp AE$  于  $D$ ,  $CE \perp AE$  于  $E$ .

(1) 求证:  $BD = DE + CE$ ;

证明:  $\because BD \perp AE, CE \perp AE$

$$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CAE$$

在  $\triangle BAD$  和  $\triangle ACE$  中

$$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC \\ \angle ABD = \angle CAE \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle ACE (AAS)$$

$$AB = AC$$

$$\therefore BD = AE, CE = AD$$

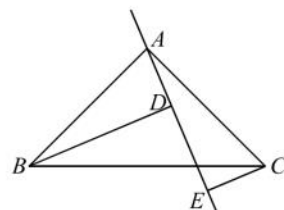


图1

(2) 若直线  $AE$  绕  $A$  点旋转到图2位置时 ( $BD < CE$ ), 其余条件不变, 问  $BD$  与  $DE$ 、 $CE$  的关系如何? 请予证明:  $\therefore BD = CE + DE$

关系如何? 请予证明:

$$DE = BD + CE$$

证明:  $\angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$

$$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CAE$$

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle CAE$  中

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle CEA \\ \angle ABD = \angle CAE \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\angle ABD = \angle CAE$$

$$AB = AC$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE (AAS)$$

$$\therefore BD = AE, CE = AD$$

$$\therefore DE = AD + AE$$

(3) 若直线  $AE$  绕  $A$  点旋转到图3位置时 ( $BD > CE$ ), 其余条件不变, 问  $BD$  与  $DE$ 、 $CE$  的关系如何? 请直接写出结果, 不须证明.  $\therefore DE = BD + CE$

的关系如何? 请直接写出结果, 不须证明.

$$DE = BD + CE$$

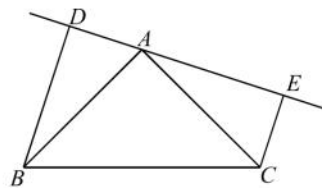


图2

图3

## 智慧攻略

1. 重点：旋转型全等和一线三等角型全等

2. 结构特征：

(1) 旋转型全等

- ① 共顶点、双等腰、顶角相等；
- ② 共顶点、双等边。

(2) 一线三等角：三个相等的角的顶点在同一条直线上。

## 智慧磨炼

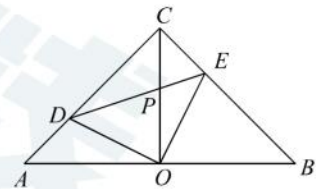
1. 如图，在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $O$ 是斜边 $AB$ 的中点，点 $D$ 、 $E$ 分别在直角边 $AC$ 、 $BC$ 上，且 $\angle DOE = 90^\circ$ ， $DE$ 交 $OC$ 于点 $P$ ，则下列结论：~~①~~图中全等的三角形只有两对；~~②~~ $\triangle ABC$ 的面积等于四边形 $CDOE$ 面积的2倍；~~③~~ $OD = OE$ ；~~④~~ $CE + CD = BC$ ，其中正确的结论有（ B ）

A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个



2. 已知: 如图1,  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC$ ,  $AE$  是过  $A$  的一条直线, 且  $B$ 、 $C$  在  $AE$  的异侧,  $BD \perp AE$  于  $D$ ,  $CE \perp AE$  于  $E$ .

(1) 求证:  $BD = DE + CE$ ;

证明:  $\because BD \perp AE, CE \perp AE$   
 $\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$   
 $\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$

$\because \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$

$\therefore \angle ABD = \angle CAE$

在  $\triangle BAD$  和  $\triangle ACE$  中

$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC \\ \angle ABD = \angle CAE \\ AB = AC \end{cases}$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle ACE (AAS)$

$\therefore BD = AE, CE = AD$

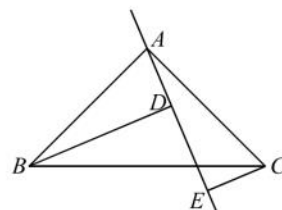


图1

(2) 若直线  $AE$  绕  $A$  点旋转到图2位置时 ( $BD < CE$ ), 其余条件不变, 问  $BD$  与  $DE$ 、 $CE$  的关系如何? 请予证明:  $\therefore BD = CE + DE$

关系如何? 请予证明:

$DE = BD + CE$

证明:  $\angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$

$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$

$\because \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$

$\therefore \angle ABD = \angle CAE$

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle CAE$  中

$\begin{cases} \angle ADB = \angle CEA \\ \angle ABD = \angle CAE \\ AB = AC \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE (AAS)$

$\therefore BD = AE, CE = AD$

$\therefore DE = AD + AE$

(3) 若直线  $AE$  绕  $A$  点旋转到图3位置时 ( $BD > CE$ ), 其余条件不变, 问  $BD$  与  $DE$ 、 $CE$  的关系如何? 请直接写出结果, 不须证明.  $\therefore DE = BD + CE$

的关系如何? 请直接写出结果, 不须证明.

$DE = BD + CE$

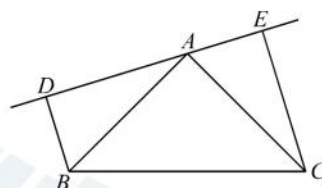


图2

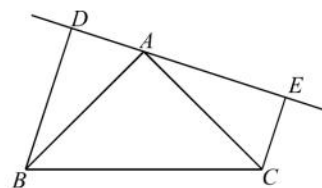


图3

## 智慧攻略

1. 重点：旋转型全等和一线三等角型全等

2. 结构特征：

(1) 旋转型全等

- ① 共顶点、双等腰、顶角相等；
- ② 共顶点、双等边。

(2) 一线三等角：三个相等的角的顶点在同一条直线上。

## 智慧磨炼

1. 如图，在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $O$ 是斜边 $AB$ 的中点，点 $D$ 、 $E$ 分别在直角边 $AC$ 、 $BC$ 上，且 $\angle DOE = 90^\circ$ ， $DE$ 交 $OC$ 于点 $P$ ，则下列结论：~~①~~图中全等的三角形只有两对；~~②~~ $\triangle ABC$ 的面积等于四边形 $CDOE$ 面积的2倍；~~③~~ $OD = OE$ ；~~④~~ $CE + CD = BC$ ，其中正确的结论有（ B ）

A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

