

第 11 讲 中考必对专题之化简求值参考答案

【智慧基石】

【类型一：直接带入求值】

【例 1】先化简，再求值： $\left(\frac{a-1}{a^2-4a+4}-\frac{a+2}{a^2-2a}\right)\div\left(\frac{4}{a}-1\right)$ ，其中 $a=2-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= \left[\frac{a-1}{(a-2)^2} - \frac{a+2}{a(a-2)} \right] \div \frac{4-a}{a} \\ &= \frac{a(a-1)-(a-2)(a+2)}{a(a-2)^2} \cdot \frac{a}{4-a} \\ &= \frac{1}{(a-2)^2}\end{aligned}$$

$$\text{当 } a=2-\sqrt{3} \text{ 时，原式} = \frac{1}{3}$$

【练一练】已知 $x=\sqrt{5}-2$ ，求代数式 $\left(\frac{x-2}{x^2+2x}-\frac{x-1}{x^2+4x+4}\right)\div\frac{x-4}{3x^2+6x}$ 的值。

$$\begin{aligned}\text{解：} & \left(\frac{x-2}{x^2+2x}-\frac{x-1}{x^2+4x+4}\right)\div\frac{x-4}{3x^2+6x} \\ &= \left(\frac{x-2}{x(x+2)}-\frac{x-1}{(x+2)^2}\right)\times\frac{3x(x+2)}{x-4} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)-x(x-1)}{x(x+2)^2}\times\frac{3x(x+2)}{x-4} \\ &= \frac{x^2-4-x^2+x}{x(x+2)^2}\times\frac{3x(x+2)}{x-4} \\ &= \frac{x-4}{x(x+2)^2}\times\frac{3x(x+2)}{x-4} \\ &= \frac{3}{x+2}\end{aligned}$$

当 $x=\sqrt{5}-2$ 时，

$$\text{原式} = \frac{3}{\sqrt{5}-2+2} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

【类型二：所给条件复杂】

【例 2】化简求值 $1 - \frac{x-y}{x-2y} + \frac{x^2-y^2}{x^2-4xy+4y^2}$ ，其中实数 x, y 满足 $|2x-y+1| + 2\sqrt{3x-2y+4} = 0$ 。

解：由 $|2x-y+1| + 2\sqrt{3x-2y+4} = 0$ 得，

$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 3x-2y+4=0 \end{cases} \quad \text{解得：} \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

$$\text{原式} = \frac{x^2 - xy + y^2}{(x-2y)^2}$$

$$\text{当 } x=2, y=5 \text{ 时, 原式} = \frac{19}{64}$$

【练一练】已知 $|a+2| = -b^2$ ，求： $\frac{2a+3b}{2a-3b} + 2002b$ 的值。

解：由于 $|a+2| = -b^2 \geq 0$ ，而 $-b^2 \leq 0$ ， $\therefore b=0$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2a}{2a} + 0 = 1$$

【类型三：选数代入求值】

【例 3】先化简，再选择一个合适的 x 值代入求值： $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \div \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right) \cdot \frac{1}{x-1}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \frac{x+x+1}{x+1} \div \frac{1-x^2-3x^2}{1-x^2} \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{2x+1}{x+1} \div \frac{(1+2x)(1-2x)}{(1+x)(1-x)} \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1-x}{1-2x} \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1}{2x-1} \cdot \end{aligned}$$

取 $x=0$ ，则原式 $= -1$ 。

（注： x 可取除 $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ 外的任意实数）

【练一练】先化简 $(1 - \frac{1}{x-1}) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$ ，然后从 $-2 \leq x \leq 2$ 的范围内选取一个合适的整数作为 x 的值代入求值。

$$\text{解：原式} = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2} = \frac{x+1}{x-2}$$

满足 $-2 \leq x \leq 2$ 且为整数，若使分式有意义， x 只能取 $0, -2$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时，原式} = -\frac{1}{2} \quad (\text{或：当 } x=-2 \text{ 时，原式} = \frac{1}{4})$$

【类型四：整体代入求值；知二求二；代入消元】

【例 4】(1) 已知 $2a+b-1=0$ ，求代数式 $(a^2 - b^2) \left(\frac{a}{a+b} + 1 \right) \div (a-b)$ 的值。

$$\begin{aligned} \text{解：} & (a^2 - b^2) \left(\frac{a}{a+b} + 1 \right) \div (a-b) \\ &= (a-b)(a+b) \times \frac{2a+b}{a+b} \times \frac{1}{a-b} \\ &= 2a+b \\ &\because 2a+b-1=0, \therefore 2a+b=1. \\ &\therefore \text{原式}=1 \end{aligned}$$

(2) 若 $x + \frac{1}{x} = 5$ ，求 $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$ 的值。答案：24

(3) 若 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ (x, y, z 均不为 0)，则 $\frac{x+2y-z}{z}$ 的值为_____。答案：1

【练一练】(1) 已知 $x^2 - x - 1 = 0$ ，则 $\frac{x^4 + 2x + 1}{x^5} =$ _____。

$$\text{解：原式} = \frac{(x+1)^2 + 2x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + 4x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{x+1+4x+2}{x(3x+2)} = \frac{5x+3}{3x^2+2x} = \frac{5x+3}{3(x+1)+2x} = \frac{5x+3}{5x+3} = 1.$$

(2) 已知： $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，则 $x + \frac{1}{x} =$ _____； $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ _____。答案：3, 7

(3) 若 $a+6b=0$ ，则 $(1 - \frac{b}{a+2b}) \div \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 4b^2} =$ _____。答案： $\frac{8}{5}$

【类型五：不等式】

【例 5】先化简 $(\frac{x}{x-5} - \frac{x}{5-x}) \div \frac{2x}{x^2-25}$ ，然后从不等组 $\begin{cases} -x-2 \leq 3 \\ 2x < 12 \end{cases}$ 的解集中，选取一个你认为符合题意的 x 的值代入求值。

解：解不等式①，得 $x \geq -5$ ，

解不等式②，得 $x < 6$ ，

\therefore 不等式组的解集为 $-5 \leq x < 6$ ，

同时若使分式有意义， x 不能取 $0, \pm 5$ ；

$$\text{当 } x=1 \text{ 时，原式} = \frac{2x}{x-5} \cdot \frac{(x+5)(x-5)}{2x} = x+5 = 1+5 = 6.$$

（注：本题答案不唯一）

【练一练】先化简，再求值： $(1 - \frac{1}{x}) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$ ，其中 x 是不等式 $3(x+4) - 6 \geq 0$ 的负整数解。

$$\text{解：原式} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\text{由 } 3(x+4) - 6 \geq 0 \text{ 得： } x \geq -2,$$

$$\therefore \text{负整数解为： } x = -1 \text{ 和 } x = -2$$

当 $x = -1$ 时，原分式无意义；

$$\text{当 } x = -2 \text{ 时，原式} = \frac{1}{4}$$

【类型六：二次根式】

【例 6】已知 $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ， $y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ，求 $\frac{x^3 - xy^2}{x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3}$ 的值。

$$\text{解：化简为 } \frac{x-y}{xy(x+y)}, \text{ 且 } x = 5 + 2\sqrt{6}, y = 5 - 2\sqrt{6}, \text{ 代入求值得 } \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

【练一练】已知 $x = \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$ ， $y = \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}$ ，且 $19x^2 + 123xy + 19y^2 = 1985$ ，求 a 的值。

$$\text{解： } x + y = 4a + 2, xy = 1,$$

$$\text{代入方程： } x^2 + y^2 = 98,$$

$$\therefore (x+y)^2 = 100 \quad x+y=10$$

$$\therefore a = 2$$

【智慧高峰】

如果 $a+b+c=1$, $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} = 0$, 那么 $(a+1)^2 + (b+2)^2 + (c+3)^2$ 的值.

解: 令 $a+1=x$, $b+2=y$, $c+3=z$,

$$\text{则 } x+y+z=7, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+yz+zx}{xyz} = 0, \quad \therefore xy+yz+zx=0,$$

$$\therefore \text{原式} = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 49$$

【智慧磨练】

1. 已知 $a-b=2$, 求代数式 $\frac{a}{a-b} \times \left(a - \frac{2ab-b^2}{a} \right)$ 的值.

$$\text{解: 原式} = \frac{a}{a-b} \times \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{(a-b)^2}{a} = a-b=2.$$

2. 已知: $x^2-2=0$, 求代数式 $\frac{(x-1)^2}{x^2-1} + \frac{x^2}{x+1}$ 的值.

$$\text{解: 原式} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} + \frac{x^2}{x+1}$$

$$= \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2}{x+1}$$

$$= \frac{x^2+x-1}{x+1}.$$

$$\because x^2-2=0, \therefore x^2=2.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2+x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

3. 已知: $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, 求: $x^2y + xy^2$ 的值.

$$\text{解: 原式} = xy(x+y) = \sqrt{5}$$

4. 已知: $a=\sqrt{3}$, $b=-2\sqrt{3}$, 求 $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \div \frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$ 的值.

$$\text{解: 原式} = \frac{1}{a+b} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. 先化简, 再求值: $\left(\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} \right) \div \left(\frac{1}{xy+y^2} \right)$, 其中 $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $y=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

$$\text{解: } \left(\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} \right) \div \left(\frac{1}{xy+y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} + \frac{y}{x+y} \right) \div \left(\frac{1}{xy+y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) \cdot \left(\frac{y(x+y)}{1} \right)$$

$$= xy$$

当 $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}),$$

$$= (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 2$$