09

第九讲

几何变换之旋转

八年级数学

平行线教育线上课程
2020 年

PARALLEL EDUCATION

数学是一种别具匠心的艺术。

——哈尔莫斯

第九讲 几何变换之旋转

智慧导航

1．旋转的三要素

①旋转中心②旋转方向③旋转角

2．旋转的性质

①对应线段相等、对应角相等.

②对应点到旋转中心的距离相等.

③任意一组对应点于旋转中心的连线所成的角等于旋转角.

④对应边所在直线所成的角等于旋转角或旋转角的补角.

⑤旋转中心在对应点所连线段的中垂线上.

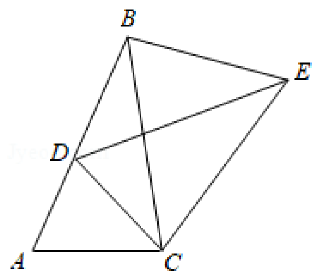
3．常见的旋转结构

①手拉手结构　②斜直角结构　③半角结构

智慧基石

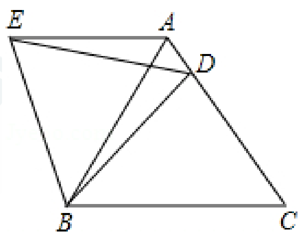
例1

（1）如图，将$\triangle ABC$绕点C顺时针旋转得到$\triangle DEC$，使点A的对应点D恰好落在边AB上，点B的对应点为E，连接BE，其中有：①$AC=AD$；②$AB\perp EB$；③$BC=DE$；④$\angle A=\angle EBC$，四个结论，则结论一定正确的有(A)个.



A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

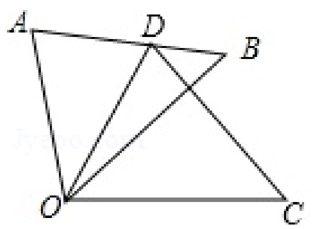
（2）在等边$\triangle ABC$中，D是边AC上一点，连接BD，将$\triangle BCD$绕点B逆时针旋转$60°$，得到$\triangle BAE$，连接ED，若$BC=5$，$BD=4$，则以下四个结论中：①$\triangle BDE$是等边三角形；②$AE//BC$；③$\triangle ADE$的周长是9；④$\angle ADE=\angle BDC$．其中正确的序号是(　D　)



A．②③④　　B．①③④　　C．①②④　　D．①②③

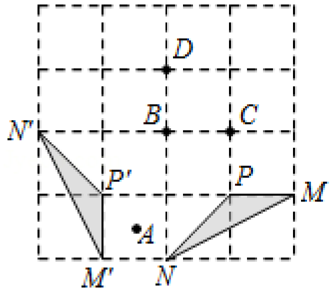
练一练

1. 如图，$\triangle ODC$是由$\triangle OAB$绕点O顺时针旋转$30°$后得到的图形，若点D恰好落在AB上，且$\angle ADO$的度数为(　C　)



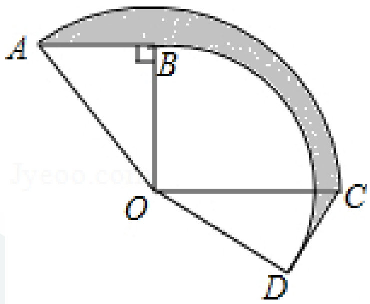
A．$30°$　　B．$60°$　　C．$75°$　　D．$80°$

2．如图，在正方形网格中，$\triangle MPN$ 绕某一点旋转某一角度得到$\triangle M'P'N'$，则旋转中心可能是_____点 B______.



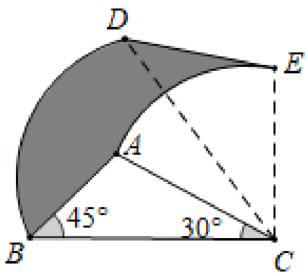
例 2

1． 如图在 $Rt\triangle AOB$ 中，$\angle ABO=90^\circ$，将 $Rt\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转120° 得 $Rt\triangle COD$、已知 $AB=1$，那么图中阴影部分的面积为____$\frac{1}{3}\pi$_____.（结果保留 π）



练一练

如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=45^\circ$，$\angle ACB=30^\circ$，$AB=2$，将 ΔABC 绕点 C 顺时针旋转60° 得$\triangle CDE$，则图中线段 AB 扫过的阴影部分的面积为____$\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$_____.



例 3

1. 如图 1，点 C 是线段 AB 上一点，分别以 AC 和 BC 为边在线段 AB 的同侧作等边 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$，连结 AE 和 BD，相交于点 F．

（1）求证：$AE=BD$；

（2）如图 2．固定 $\triangle BCE$ 不动，将等边 $\triangle ACD$ 绕点 C 旋转（$\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 不重叠），试问 $\angle AFB$ 的大小是否变化？请说明理由；

（3）在 $\triangle ACD$ 旋转的过程中，以下结论：① $CG=CH$；② $GF=HF$； ③ FC 平分分 $\angle GCH$；④ FC 平分 $\angle GFH$；

一定正确的有__④__（填写序号，不要求证明）．

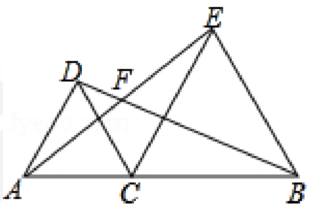


图1

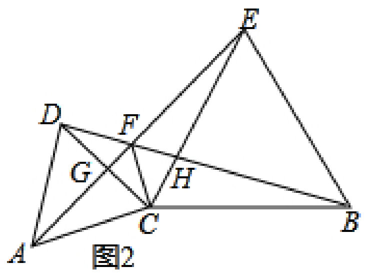


图2

【解答】（1）证明：如图 1 中，

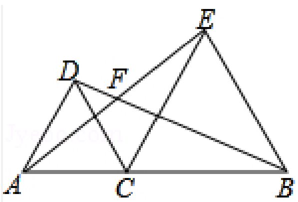


图1

$\because \Delta ADC$， ΔECB 都是等边三角形，

$\therefore CA=CD$， $CE=DB$， $\angle ACD=\angle ECB=60^\circ$，

$\therefore \angle ACE=\angle DCB=120^\circ$，

$\therefore \Delta ACE\cong \Delta DCB(SAS)$，

$\therefore AE=BD$．

（2）如图 2 中，

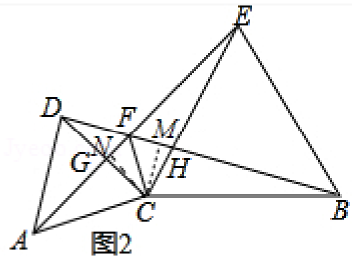


图2

$\because \Delta ADC$， ΔECB 都是等边三角形，

$\therefore CA = CD$， $CE = DB$， $\angle ACD = \angle ECB = 60°$，

$\therefore \angle ACE = \angle DCB = 120°$，

$\therefore \Delta ACE \cong \Delta DCB(SAS)$，

$\therefore \angle EAC = \angle BDC$，

$\because \angle AGC = \angle DGF$，

$\therefore \angle DFG = \angle ACD = 60°$，

$\therefore \angle AFB = 120°$.

（3）作 $CM \perp BD$ 于 M， $CN \perp AE$ 于 N.

$\because \Delta AEC \cong \Delta DBC$，

$\therefore CM = CN$ （全等三角形对应边上的高相等），

$\because CM \perp FB$， $CN \perp FA$，

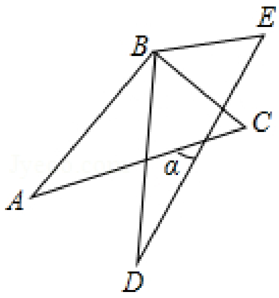
$\therefore \angle CFM = \angle CFN$，

故④正确，

故答案为④.

练一练

1．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=30^{\circ}$，将$\triangle ABC$绕着B点逆时针旋转40°，到$\triangle BDE$的位置，则$\angle \alpha$的度数是(　A　)



A．40°　　B．30°　　C．20°　　D．10°

2．**（1）问题发现**

如图，$\triangle ACB$和$\triangle DCE$均为等边三角形，点A，D，E在同一直线上，连接BE．

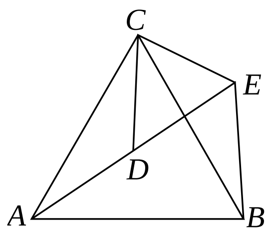
填空：

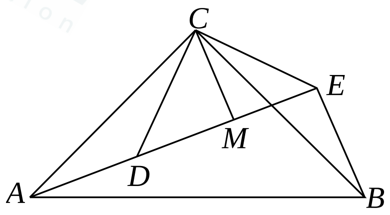
① $\angle AEB$的度数为____；

② 线段AD，BE之间的数量关系为____．

（2）拓展探究

如图，$\triangle ACB$和$\triangle DCE$均为等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle DCE=90^{\circ}$，点$A$，$D$，$E$在同一直线上，$CM$为$\triangle DCE$中$DE$边上的高，连接$BE$，请判断$\angle AEB$的度数及线段$CM$，$AE$，$BE$之间的数量关系，并说明理由．





【解答】解：（1）①$60^{\circ}$．

② $AD=BE$．

（2）$\angle AEB=90^{\circ}$，$AE=BE+2CM$．

理由：如图2，

$\because \Delta ACB$和ΔDCE均为等腰直角三角形，

$\therefore CA=CB$，$CD=CE$，$\angle ACB=\angle DCE=90^{\circ}$．

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$.

在 ΔACD 和 ΔBCE 中，

$$\begin{cases} CA=CB \\ \angle ACD=\angle BCE \\ CD=CE \end{cases}$$

$\therefore \Delta ACD \cong \Delta BCE(SAS)$.

$\therefore AD=BE$， $\angle ADC=\angle BEC$.

$\because \Delta DCE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle CDE=\angle CED=45^\circ$.

$\because$ 点 A， D， E 在同一直线上，

$\therefore \angle ADC=135^\circ$.

$\therefore \angle BEC=135^\circ$.

$\therefore \angle AEB=\angle BEC-\angle CED=90^\circ$.

$\because CD=CE$， $CM\perp DE$，

$\therefore DM=ME$.

$\because \angle DCE=90^\circ$，

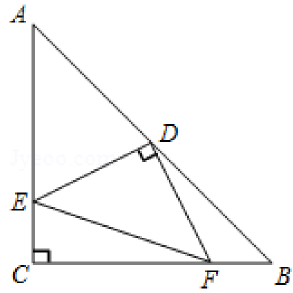
$\therefore DM=ME=CM$.

$\therefore AE=AD+DE=BE+2CM$.

例 4

1．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，点 D 为 AB 的中点，若直角 EDF 绕点 D 旋转，分别交 AC 于点 E，交 BC 于点 F，则下列说法正确的个数有（　D　）

①$AE=CF$；②$EC+CF=\sqrt{2}AD$；③$DE=DF$；④若△ECF 的面积为一个定值，则 EF 的长也是一个定值．



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

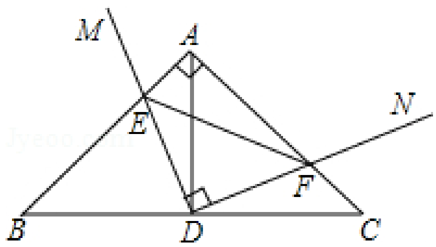
练一练

如图，Rt△ABC 中，$AB=AC$，点 D 为 BC 中点．$\angle MDN=90°$，$\angle MDN$ 绕点 D 旋转，DM、DN 分别与边 AB、AC 交于 E、F 两点．下列结论：

① △DEF 是等腰直角三角形；②$AE=CF$；③△$BDE\cong$△ADF；④$BE+CF=EF$；

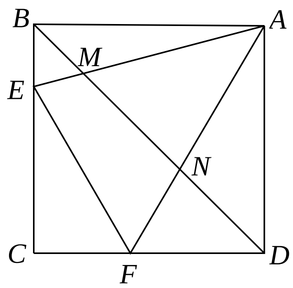
⑤$S_{四边形AEDF}=\frac{1}{4}AD^2$，

其中正确结论是__①②③__（填序号）



例5

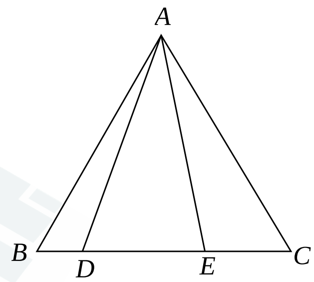
1.（1）如图，点 E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的点，$\angle EAF=45°$，连接 EF，则 EF、BE、FD 之间的数量关系是：__________．连结 BD，交 AE、AF 于点 M、N，且 MN、BM、DN 之间满足的数量关系__________；



（2）如图在△ABC 中，$AB=AC$，点 D、E 分别为 BC 边上的两点．

①若∠$BAC=60°$，∠$DAE=30°$时，BD、DE、EC 应满足的等量关系是__________；

③ 若∠$BAC=\alpha$，（$0°<\alpha<90°$），∠$DAE=\frac{1}{2}\alpha$ 时，$BD+EC$______DE（填写>、<或=）



【解答】解：（1）$EF=BE+FD$

$MN^2=BM^2+DN^2$

①BD、DE、EC 关系式为：$DE^2=BD^2+BD\cdot EC+EC^2$．

理由：如图2，把△ABD 绕点 A 逆时针旋转 60°得到△ACF，连接 EF，作 $FG\perp EC$ 的延长线于点 G．

∴△ABD≌△ACF，∠$FGC=90°$

∴$AD=AF$，$BD=CF$，∠BAD=∠CAF，∠$B=ACF$．

∵∠$BAC=60°$，$AB=AC$，

∴△ABC 是等边三角形，

∴∠B=∠$ACB=60°$．

∴∠$ACF=60°$，

∴∠ACF+∠$ACB=60°+60°=120°$，

即∠$ECF=120°$，

∴∠$FCG=60°$，

$\therefore \angle CFG=30^\circ$，

$\therefore CG=\frac{1}{2}CF$，

在 Rt△CFG 中，由勾股定理，得

$FG=\frac{\sqrt{3}}{2}CF$.

$\because \angle DAE=30^\circ$，

$\therefore \angle BAD+\angle EAC=30^\circ$，

$\therefore \angle CAF+\angle EAC=30^\circ$，

即$\angle EAF=30^\circ$．

$\therefore \angle DAE=\angle FAE$.

在△ADE 和△AFE 中

$$\begin{cases} AD=AE \\ \angle DAE=\angle FAE, \\ \angle AE=AE \end{cases}$$

$\therefore$△ADE≌△AFE（SAS），

$\therefore DE=EF$.

在 Rt△EGF 中，由勾股定理，得

$EF^2=EG^2+FG^2$，

$\therefore EF^2=(EC+CG)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}CF)^2$，

$\therefore EF^2=(EC+\frac{1}{2}CF)^2+\frac{3}{4}CF^2$，

$=EC^2+EC\cdot CF+\frac{1}{4}CF^2+\frac{3}{4}CF^2$，

$=CE^2+EC\cdot CF+CF^2$，

$\therefore DE^2=CE^2+EC\cdot BD+BD^2$.

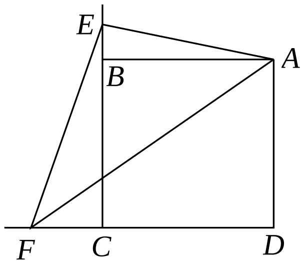
故答案为：$DE^2=CE^2+EC\cdot BD+BD^2$；

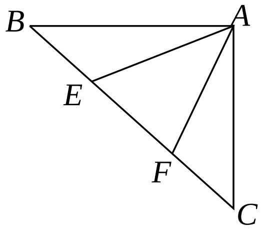
（3）$>$

练一练

（1）如图，点 E、F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB、DC 的延长线上，$\angle EAF=45°$，连接 EF，请直接写出 EF、BE、DF 之间的数量关系；

（2）如图，如图，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 E、F 在边 BC 上，且$\angle EAF=45°$，若 $BE=1$，$CF=2$，求 EF 的长．





【解答】解：（1）$DF=EF+BE$．

理由：如图 2 所示．

∵$AB=AD$，

∴把$\triangle ABE$绕点 A 逆时针旋转 90° 至$\triangle ADG$，可使 AB 与 AD 重合，

∵$\angle ADC=\angle ABE=90°$，

∴点 C、D、G 在一条直线上．

∴$EB=DG$，$AE=AG$，$\angle EAB=\angle GAD$．

又∵$\angle BAG+\angle GAD=90°$，

∴$\angle EAG=\angle BAD=90°$．

∵$\angle EAF=45°$，

∴$\angle FAG=\angle EAG-\angle EAF=90°-45°=45°$．

∴$\angle EAF=\angle GAF$．

在$\triangle EAF$和$\triangle GAF$中，

$$\begin{cases} EA=GA \\ \angle EAF=\angle GAF, \\ EF=FG \end{cases}$$

∴$\triangle EAF\cong\triangle GAF$．

∴$EF=FG$．

∵$FD=FG+DG$，

∴$DF=EF+BE$．

（2）∵$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，

∴将$\triangle ABE$绕点 A 顺时针旋转 90° 得$\triangle ACG$，

连 FG，如图 3，

∴$AG=AE$，$CG=BE$，$\angle 1=\angle B$，$\angle EAG=90°$，

∴$\angle FCG=\angle ACB+\angle 1=\angle ACB+\angle B=90°$，

∴$FG^2=FC^2+CG^2=BE^2+FC^2$；

又∵$\angle EAF=45°$，而$\angle EAG=90°$，

∴$\angle GAF=90°-45°=45°$，

在△AGF与△AEF中，$\begin{cases} AE=AG \\ \angle EAF=\angle FAG \\ AF=AF \end{cases}$，

∴△AGF≌△AEF，

∴$FG=EF$，

∴$EF^2=BE^2+FC^2=1^2+2^2=5$．

∴$EF=\sqrt{5}$．

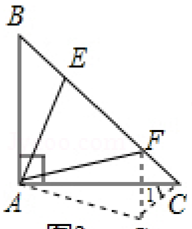


图3

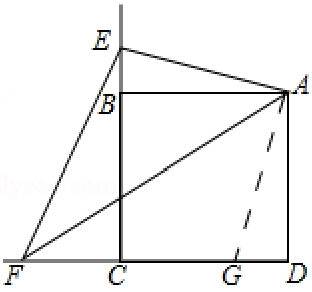
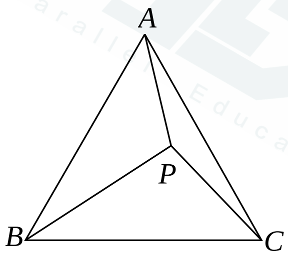
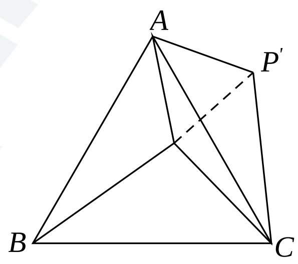


图2

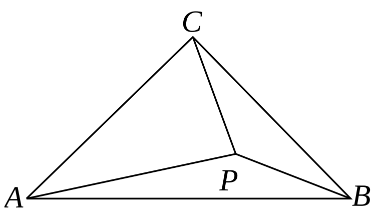
例 6

1．问题背景：如图设 P 是等边△ABC 内一点，$PA=6$，$PC=8$，$PB=10$，求∠APB 的度数．小君研究这个问题的思路是：将△ABP 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到△ACP'，易证：△APP' 是等边三角形，△PCP' 是直角三角形，所以∠APB＝∠APP'＋∠CPP'＝150°

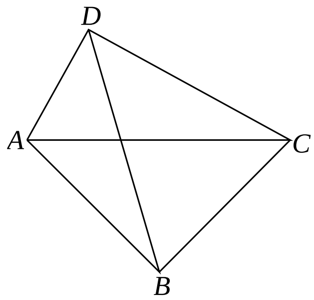




简单应用：（1）如图，在等腰直角△ABC 中，∠ACB＝90°．P 为△ABC 内一点，且 $PA=5$，$PB=3$，$PC=2\sqrt{2}$，则∠BPC＝__135__°．°



拓展延伸： 如图，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，$AB=BC$．求证：$\sqrt{2}BD=AD+DC$．



【解答】解：拓展延伸：

在 ΔABC 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=BC$，

将 ΔABD 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到 $\Delta BCD'$，

$\therefore BD'=BD$，$CD'=AD$，$\angle BCD'=\angle BAD$，

$\because \angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，

$\therefore \angle BAD+\angle BCD=180^\circ$，

$\therefore \angle BCD+\angle BCD'=180^\circ$，

$\therefore$ 点 D' 在 DC 的延长线上，

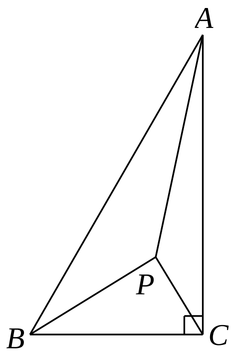
$\therefore DD'=CD+CD'=CD+AD$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{DBD}'$ 中，$DD'=\sqrt{2}BD$，

$\therefore \sqrt{2}BD=CD+AD$；

智慧高峰

1．如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\angle ABC=60^{\circ}$，$BC=2$，在其内部是否存在一点 P，使得 $PA+PB+PC$ 的值最小，并求出最小值．



【解答】解：$2\sqrt{7}$

智慧攻略

1．手拉手结构特征：

①等线段（两组）

②共端点

③夹角相等

2．大角夹半角结构特征：

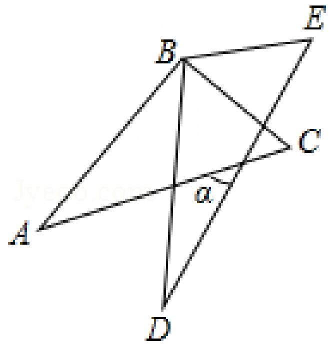
①等线段（一组）共端点

②大角夹半角

③对角互补或不互补

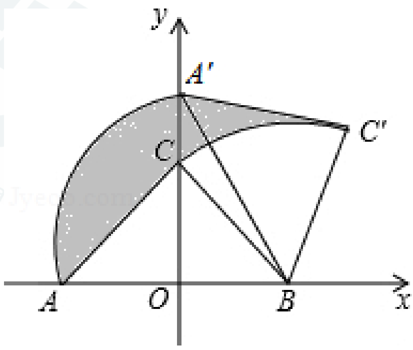
智慧磨炼

1． 如图，在△ABC 中，$\angle C=60^\circ$，将 ΔABC 绕着 B 点逆时针旋转 35°，到△BDE 的位置，则 $\angle a$ 的度数是（　A　）

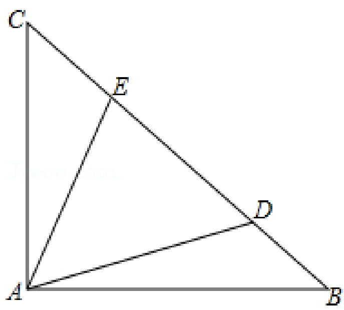


A．35°　　B．30°　　C．20°　　D．10°

2． 如图，Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，在以 AB 的中点 O 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴建立的平面直角坐标系中，将△ABC 绕点 B 顺时针旋转，使点 A 旋转至 y 轴的正半轴上的点 A' 处，若 $AO=OB=2$，则图中阴影部分面积为___$\frac{4\pi}{3}$___.



3． 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AC=AB$，$\angle DAE=45^\circ$，且 $BD=3$，$CE=4$，则△ADE 的面积为____15____.



4. 如图 1，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 是等腰直角三角形，且 $\angle ABC=\angle DBE=90^\circ$， D 点在 AB 上，连接 AE 与 CD 的延长线交于点 F，

（1）直接写出线段 AE 与 CD 的数量关系为____________.

（2）若将图 1 中的 $\triangle DBE$ 绕点 B 逆时针旋转一个锐角，如图 2 所示，问图 2 中的线段 AE、CD 之间有怎样的数量和位置关系？

（3）拓展：若将图 1 中的 ΔDBE 绕点 B 逆时针旋转一个锐角，将“$\angle ABC=\angle DBE=90^\circ$”改为“$\angle ABC=\angle DBE=\alpha$（$\alpha$ 为锐角）”，其他条件均不变，如图 3 所示，问：线段 AE、CD 所在直线的夹角大小是否随着图形的旋转而发生变化？若不变，其值多少？

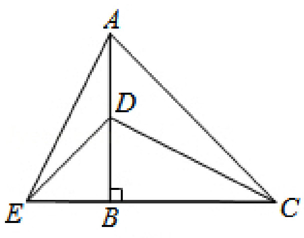


图1

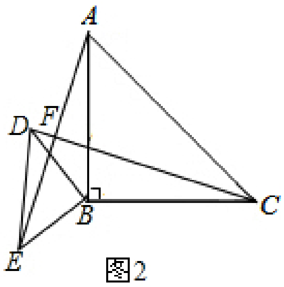


图2

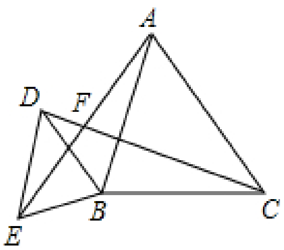


图3

【解答】解：（1）结论： $AE=CD$.

理由：如图 1 中，

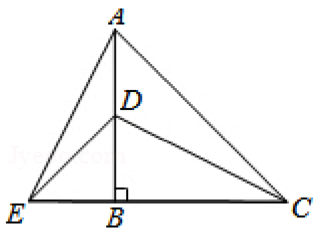


图1

在 ΔAEB 和 ΔCDB 中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle DBC \\ BE=BD \end{cases},$$

$\therefore \Delta AEB\cong\Delta CDB(SAS)$

$\therefore AE=CD$.

（2）结论： $AE=CD$， $AE\perp CD$，

理由：如图 2 中，设 AB 交 CD 于 O.

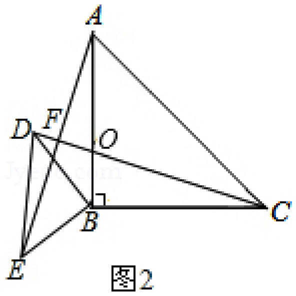


图2

$\because \angle DBE = \angle ABC = 90^\circ$，

$\therefore \angle ABE = \angle DBC$，

在 ΔAEB 和 ΔCDB 中，

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABE = \angle DBC \\ BE = BD \end{cases}，$$

$\therefore \Delta AEB \cong \Delta CDB(SAS)$，

$\therefore AE = CD$，　$\angle EAB = \angle DCB$，

$\because \angle DCB + \angle COB = 90^\circ$，　$\angle AOF = \angle COB$，

$\therefore \angle FOA + \angle FAO = 90^\circ$，

$\therefore \angle AFC = 90^\circ$，

$\therefore AE \perp CD$．

（3）线段 AE 、CD 所在直线的夹角大小不变，$\angle AFC = \alpha$ ．

理由：如图 3 中，设 AB 交 CD 于 O ．

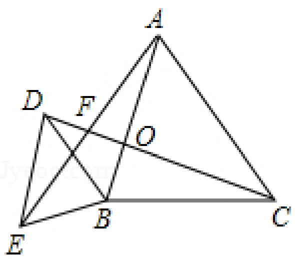


图3

$\because \angle DBE = \angle ABC = \alpha$，

$\therefore \angle ABE = \angle DBC$，

在 ΔAEB 和 ΔCDB 中，

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABE = \angle DBC \\ BE = BD \end{cases},$$

$\therefore \Delta AEB \cong \Delta CDB(SAS)$,

$\therefore \angle EAB = \angle DCB$,

$\because \angle AOF = \angle COB$,

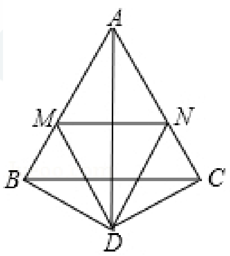
$\therefore \angle AFO = \angle ABC = \alpha$.

5. 如图，△*ABC* 是正三角形，△*BDC* 是顶角∠*BDC*＝120° 的等腰三角形，以 *D* 为顶点作一个 60° 角，使角的两边分别交 *AB*、*AC* 边于 *M*、*N* 两点，连接 *MN*.

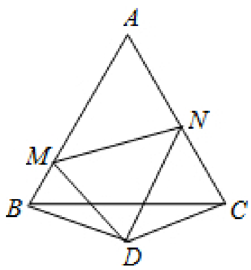
①当 *MN*∥*BC* 时，求证：*MN*＝*BM*+*CN*；

②当 *MN* 与 *BC* 不平行时，则①中的结论还成立吗？为什么？

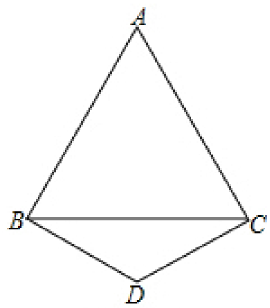
③若点 *M*、*N* 分别是射线 *AB*、*CA* 上的点，其它条件不变，再探线段 *BM*、*MN*、*NC* 之间的关系，在图③中画出图形，并说明理由.



图①



图②



图③

【解答】证明：①∵△*ABC* 是正三角形，*MN*∥*BC*，

∴△*AMN* 是等边三角形，

∴*AM*＝*AN*，

则 *BM*＝*NC*，

∵△*BDC* 是顶角∠*BDC*＝120° 的等腰三角形，

∴∠*DBC*＝∠*DCB*＝30°，

∴∠*DBM*＝∠*DCN*＝90°，

∵在△*BDM* 和△*CDN* 中，

$$\begin{cases} BM=NC \\ \angle MBD=\angle DCN \\ BD=DC \end{cases}$$

∴△*BDM*≌△*CDN*（*SAS*），

∴*DM*＝*DN*，∠*BDM*＝∠*CDN*，

∵$\angle MDN=60°$，

∴$\triangle DMN$ 是等边三角形，$\angle BDM=\angle CDN=30°$，

∴$NC=BM=\frac{1}{2}DM=\frac{1}{2}MN$，

∴$MN=MB+NC$；

②成立．理由如下：

证明：延长 AC 至 E，使 $CE=BM$，连接 DE，

∵$\triangle BDC$ 是顶角$\angle BDC=120°$ 的等腰三角形，$\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴$\angle BCD=30°$，

∴$\angle ABD=\angle ACD=90°$，

即$\angle ABD=\angle DCE=90°$，

∵在$\triangle DCE$ 和$\triangle DBM$ 中，

$$\begin{cases} EC=BM \\ \angle DCE=\angle BMD, \\ DE=BD \end{cases}$$

∴$\triangle DCE\cong\triangle DBM$（$SAS$），

∴$\angle BDM=\angle CDE$，

又∵$\angle BDC=120°$，$\angle MDN=60°$，

∴$\angle BDM+\angle NDC=\angle BDC-\angle MDN=60°$，

∴$\angle CDE+\angle NDC=60°$，即$\angle NDE=60°$，

∴$\angle MDN=\angle NDE=60°$

∴$DM=DE$（上面已经全等）

∵在$\triangle DMN$ 和$\triangle DEN$ 中

$$\begin{cases} DM=DE \\ \angle MDN=\angle NDE \\ DN=DN \end{cases}$$

∴$\triangle DMN\cong\triangle DEN$（$SAS$），

∴$BM+CN=NM$．

③$MN=CN-BM$

证明：在 CA 上截取 $CE=BM$，

∵$\triangle ABC$ 是正三角形，

∴$\angle ACB=\angle ABC=60°$，

又∵$BD=CD$，$\angle BDC=120°$，

∴$\angle BCD=\angle CBD=30°$，

$\therefore \angle MBD=\angle ECD=90°$，

又$\because CE=BM$，$BD=CD$，

$\because$在$\triangle BMD$和$\triangle CED$中，

$$\begin{cases} CE=BM \\ \angle MBD=\angle DCE, \\ BD=CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BMD\cong\triangle CED$（$SAS$），

$\therefore DE=DM$，$\angle EDC=\angle BDM$，

$\because \angle MDN=\angle MDB+\angle BDN=60°$，

$\therefore \angle BDN+\angle CDE=60°$，

$\therefore \angle NDE=\angle MDN=60°$，

$\because$在$\triangle MDN$和$\triangle EDN$中，

$$\begin{cases} ND=ND \\ \angle EDN=\angle MDN, \\ MD=ED \end{cases}$$

$\therefore \triangle MDN\cong\triangle EDN$（$SAS$），

$\therefore MN=NE=NC-CE=NC-BM$