

09

第九讲 曲中有直

六年级数学

平行线教育线上课程
2020 年

PARALLEL EDUCATION

好高骛远的一无所得，埋头苦干的获得知识。

—— 佚名



第九讲 曲中有直

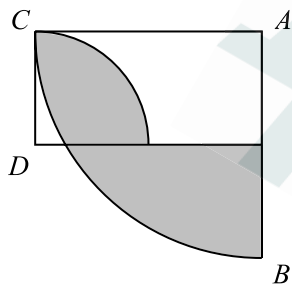
智慧导航

1. 定义法求周长
2. 整体思想解决几何问题
3. 多种求面积的方法（大减小，分块求，割补法等）

智慧基石

例 1

已知 $AB=6$ 厘米， $CD=3$ 厘米，求图中阴影部分的周长。



【解答】定义法

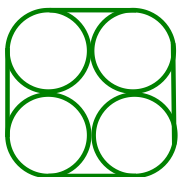
$$\frac{1}{4} \times 2 \times 3.14 \times 6 = 9.42 \text{ (厘米)}$$

$$\frac{1}{4} \times 2 \times 3.14 \times 3 = 4.71 \text{ (厘米)}$$

阴影部分的周长为： $4.71 + 9.42 + 3 + 3 = 20.13$ (厘米)

练一练

有 4 根直径都是 10 厘米的圆柱形木头，现用绳子把它们捆绑在一起，其切面如下图，至少需要绳子多少厘米？（接口长度忽略不计）



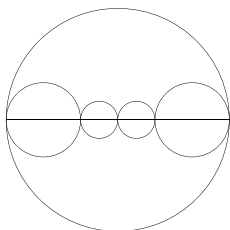
【解答】定义法

圆的周长+4条直径

$$10 \times 3.14 + 10 \times 4 = 71.4 (\text{厘米})$$

例2

一个周长为20厘米的大圆内有4个小圆，这些小圆的圆心都在大圆的一条直径上，则所有小圆的周长之和为多少厘米？



【解答】整体思想

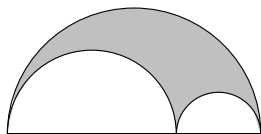
$$\pi d_1 + \pi d_2 + \pi d_3 + \pi d_4 = \pi d$$

在同一直径上的小圆的周长之和等于大圆的周长.

所以周长之和为20厘米.

练一练

在荷兰的小镇卡茨林赫弗尔 2013 年 6 月建成了一个由三个半圆组成的城市雕塑，三个半圆的直径分别为 $24.2m$ ， $19.3m$ ， $4.9m$ 。这个雕塑的原始图形来自于阿基米德《引理集》中的鞋匠刀形 (Arbelos)，即图中的阴影部分所示的图形。那么该城市雕塑中的鞋匠刀形的周长为多少米？（圆周率用 π 表示）。



【解答】整体思想

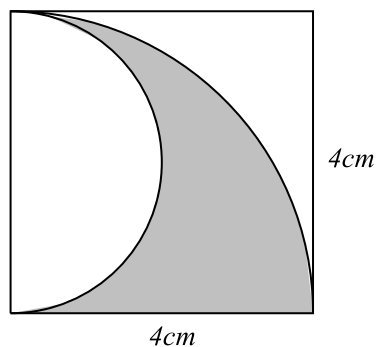
根据分析，阴影部分的周长由三个圆的半圆弧组成的，

鞋匠刀形的周长：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \pi \times 24.2 + \frac{1}{2} \times \pi \times 19.3 + \frac{1}{2} \times \pi \times 4.9 \\ &= \frac{1}{2} \times (24.2 + 19.3 + 4.9) \times \pi \\ &= 24.2\pi \text{ (米)} \end{aligned}$$

例 3

计算图形中阴影部分的面积.



【解答】大减小

$$3.14 \times 4^2 \times \frac{1}{4} - 3.14 \times (4 \div 2)^2 \div 2$$

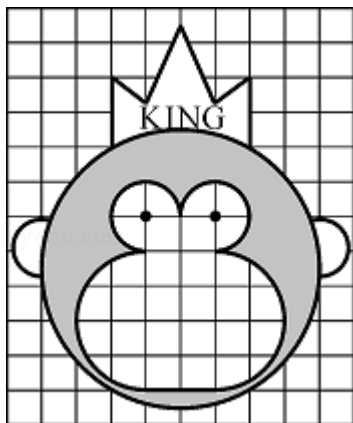
$$= 12.56 - 6.28$$

$$= 6.28 \text{ (平方厘米)}$$

答：阴影部分的面积是 6.28 平方厘米.

练一练

如图所示的网格图中，猴子 KING 的图片是由若干个圆弧和线段组成，其中最大的圆的半径是 4，则阴影部分的面积是多少？（圆周率取 3）



【解答】大减小

小方格的长度是 8 个小格代表 8，那么每一个就是 1.

大圆的面积为： $4 \times 4 \times 3 = 48$.

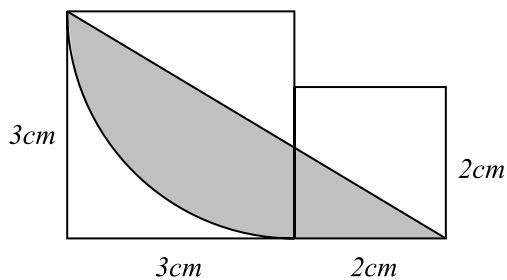
空格部分的面积分为半径为 2 的圆，和半径为 1 的圆的 1.5 倍和 2×5 的长方形.

空格的面积为 $3 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1.5 + 2 \times 5 = 26.5$

那么阴影的面积为： $48 - 26.5 = 21.5$

例4

求图中阴影部分面积。



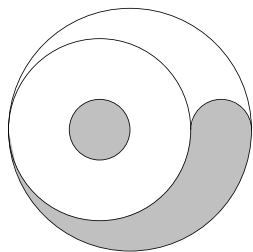
【解答】大减小，分块求

$$\begin{aligned} & 3 \times (3 + 2) \div 2 - (3 \times 3 - 3.14 \times 3^2 \div 4) \\ &= 7.5 - 1.935 \\ &= 5.565 \text{ (平方厘米)} \end{aligned}$$

答：阴影部分面积是 5.565 平方厘米。

练一练

如图所示，大、中、小三个圆的半径之比为 4:3:1，则阴影部分与空白部分的面积比是多少？



【解答】大减小，分块求

设三条半径分别为 4、3、1，则阴影部分面积为三部分：

小圆：面积为 $\pi \times 1^2 = \pi$ ，

小半圆：面积为 $\pi \times 1^2 \div 2 = \frac{\pi}{2}$ ，

小半圆底下部分：面积为 $\pi \times 4^2 \div 2 - \pi \times 3^2 \div 2 = \frac{7\pi}{2}$ ，

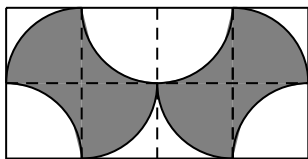
所以阴影部分的面积为： $\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = 5\pi$ ，

空白部分的面积为： $\pi \times 4^2 - 5\pi = 11\pi$ ，

所以涂有阴影的部分与未涂阴影部分的面积比是： $5\pi : 11\pi = 5:11$

例 5

如图中，大长方形的长是 40 厘米，长是宽的 2 倍。那么阴影面积是多少平方厘米？



【解答】割补法

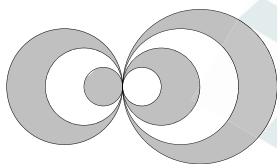
$$40 \div 2 = 20 \text{ (厘米)}$$

$$40 \times 20 \div 2 = 400 \text{ (平方厘米)}$$

答：阴影面积是 400 平方厘米。

练一练

如图，有四种大小不同的圆，直径从小到大依次为 5、10、15、20 厘米。那么，图中阴影部分面积之和是多少平方厘米？



【解答】割补法

阴影部分的面积和为最大的圆的面积

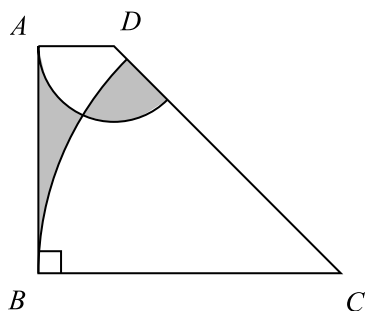
最大的圆的半径为 $20 \div 2 = 10$ (厘米)

面积为： $\pi r^2 = 100\pi = 314$ (平方厘米)

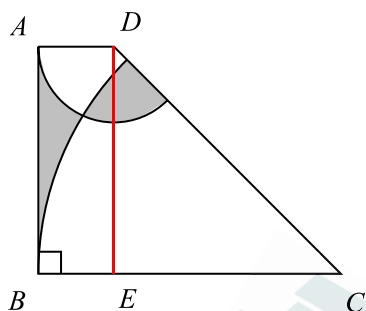
故答案为：314 平方厘米

例 6

如图，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，上底 AD 长为 20 厘米，下底 BC 长为 80 厘米，高 AB 长 60 厘米，分别以 D 和 C 为圆心，上底和下底为半径做扇形，那么图中阴影两部分的面积差是多少平方厘米？



【解答】同加同减差不变



过 D 点作 BC 的垂线，与 BC 相交于 E 点。

因为 $ABED$ 是一个长方形，

所以 $AB = ED = 60$ 厘米， $AD = BE = 20$ 厘米，则 $CE = 80 - 20 = 60$ 厘米，则有 $DE = EC$ 。

又因为 $DE \perp BC$ ，所以得到三角形 DEC 是一个等腰直角三角形，

$\angle C = 45^\circ$ ， $\angle ADC = 135^\circ$ 。

左边阴影部分加上上面空白部分后的面积：

$$(20 + 80) \times 60 \div 2 - \pi \times 80 \times 80 \div (360 \div 45) = 3000 - 800\pi \quad (\text{平方厘米})$$

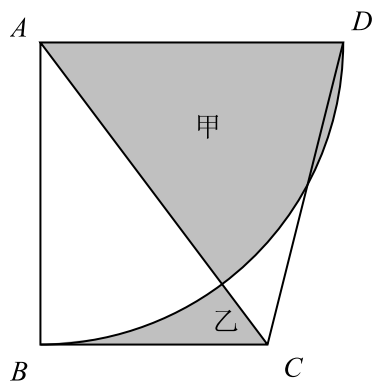
右边阴影部分加上上面空白部分后的面积： $\pi \times 20 \times 20 \div (360 \div 135) = 150\pi$ （平方厘米）

两者差： $3000 - 800\pi - 150\pi = 3000 - 950\pi = 3000 - 2983 = 17$ （平方厘米）

故答案为：17。

练一练

如图所示，扇形 ABD 的半径是 8 厘米，阴影部分甲比阴影部分乙大 26.24 平方厘米，则直角梯形 $ABCD$ 的面积是多少平方厘米？



【解答】同加同减差不变

$$3.14 \times 8^2 \div 4 - 26.24 = 24 \text{ (平方厘米)}$$

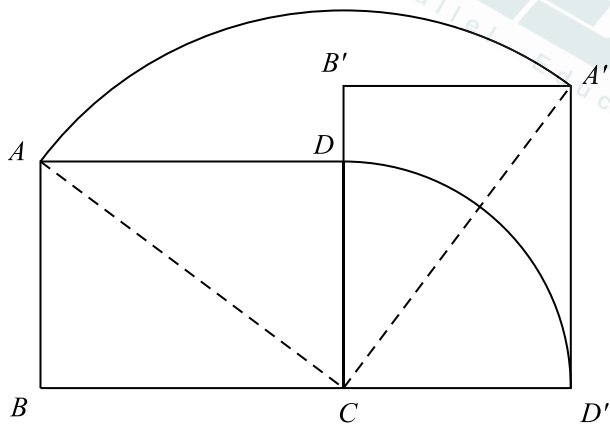
$$24 \times 2 \div 8 = 6 \text{ (厘米)}$$

$$(8+6) \times 8 \div 2 = 56 \text{ (平方厘米)}$$

故答案为：56.

智慧高峰

如图，长方形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $BC=4$ ．现在将 $ABCD$ 绕 C 点顺时针旋转 90° 到 $A'B'CD'$ ．则边 AD 扫过的面积是多少？（取 π 值为 3）



【解答】

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$3 \times 25 \div 4 - 3 \times 3^2 \div 4 = 12$$

故答案为：12.

智慧攻略

1. 重点:

- A. 定义法求周长
- B. 整体思想解决几何问题
- C. 求面积的方法（大减小，分块求，割补法等）

智慧磨炼

1. 如图，从甲地到乙地， A 、 B 两条路都是由半圆形组成的，甲乙两地的中点恰好是 O 点，这两条路的长度（ ）。



- A. 路线 A 长 B. 路线 B 长 C. 同样长 D. 无法比较

【解答】

设小圆的直径为 d ，则大圆的半径为 d ，

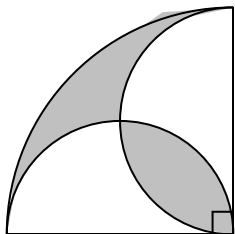
B 路线的长度为： $2\pi d \div 2 = \pi d$ ，

A 路线的长度为： $\pi d \div 2 + \pi d \div 2 = \pi d$ ；

所以 A 、 B 两条路的长度一样长。

故选：C。

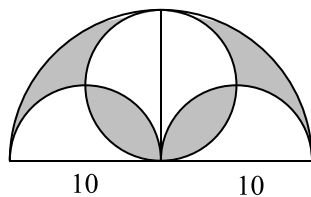
2. 如图由一个大扇形和两个半圆组成，大扇形的半径为 6 厘米，求阴影部分的周长。



【解答】

周长： $3.14 \times 6 + 2 \times 3.14 \times 6 \div 4 = 28.26$ （厘米）

3. 如图，半径为 10 的大半圆中有两个直径为 10 的小半圆和一个直径为 10 的圆，那么图中阴影部分的面积和为多少？

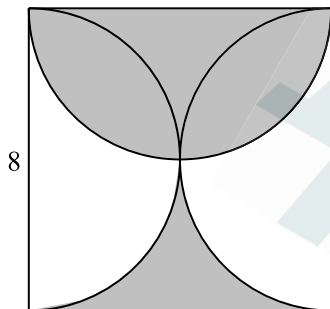


【解答】

$$3.14 \times 10^2 \div 2 - (10 \times 2) \times 10 \div 2 = 57$$

故答案为：57.

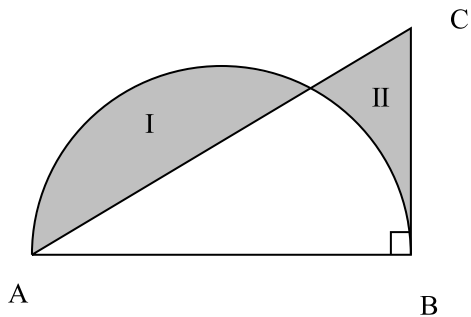
4. 求下面图中阴影部分的面积（单位：厘米）.



【解答】

$$8 \times 8 \div 2 = 32 \text{ (平方厘米)}$$

5. 三角形 ABC 是直角三角形， AB 是圆的直径，并且 $AB = 20\text{cm}$ ，如果阴影 I 的面积比 II 的面积大 17cm^2 ，那么 BC 的长度是多少？



【解答】

$\triangle ABC$ 的面积是：

$$3.14 \times (20 \div 2)^2 \div 2 - 17$$

$$= 314 \div 2 - 17$$

$$= 157 - 17$$

$$= 140 \text{ (平方厘米);}$$

BC 的长是:

$$140 \times 2 \div 20$$

$$= 280 \div 20$$

$$= 14 \text{ (厘米);}$$

答: BC 的长 14 厘米.

