“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

2020 年 02 月

一、（本题满分 40 分）

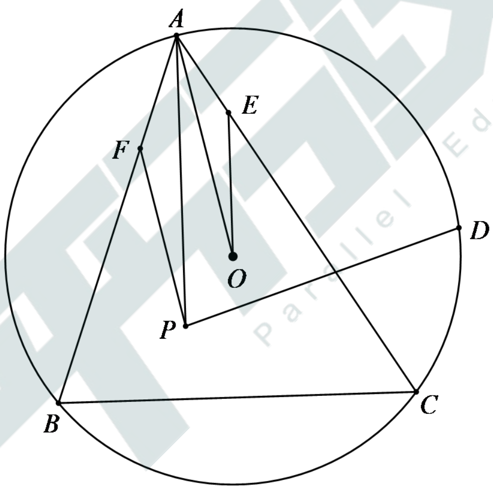
已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 3)$ 为等差数列，其公差 $d > 5$，且

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i - 3| = \sum_{i=1}^{n} |a_i - 4| = 2019.$$

求项数 n 的最大可能值.

二、（本题满分 40 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$，$\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内且 $AP \perp BC$，点 D（异于点 A）在 $\odot O$ 上且 $PA = PD$. 过点 O 作 BC 的垂线交 AC 于点 E，过点 P 作 AO 的平行线交 AB 于点 F. 求证：B, D, E, F 四点共圆.



三、（本题满分 50 分）

给定正整数 n，平面点集 $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x, y \leqslant 2n-1\}$. S 的子集 T 满足：若面积为 1 的正方形的四个顶点都在 S 中，则这四个顶点至多有 2 个在 T 中. 求 T 的元素个数的最大值.

四、（本题满分 50 分）

对正整数数列 $\{x_n\}$，定义集合

$$P(\{x_n\}) = \{p : 存在正整数\ k，使得\ p \mid x_k，其中\ p\ 是素数\}.$$

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个无穷正整数数列，$P(\{a_n\})$ 和 $P(\{b_n\})$ 都是有限集. 证明：存在无穷多个正整数 n 和两个 (不依赖于 n 的) 正整数 a, b，使得 $\frac{a_n}{a}$ 是某个正整数的 2019 次方，且 $\frac{b_n}{b}$ 是某个正整数的 2020 次方.