“根源杯”数学奥林匹克邀请赛参考答案

2020 年 02 月

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 集合 A, B, C 满足 $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B \subseteq \{1,2\}$. 满足要求的有序集合组 (A, B, C) 的个数为 ________.

答案： 10584.

解析： 对 $i = 1, 2$, 选取 A, B, C 中包含 i 的集合共有 $2^3 - 1 = 7$ 种可能 (这是因为 $i \in A \cup B \cup C$); 对 $j = 3, 4, 5$, 选取 A, B, C 中包含 j 的集合共有 $2^3 - 2 = 6$ 种可能 (这是因为 $j \in A \cup B \cup C, j \notin A \cap B \cap C$). 共有 $7^2 \times 6^3 = 10584$ 种可能情形.

2. 设 $\{a_n\}$ 是严格递增的无穷等差数列, 且其中三项 a_1, a_2, a_4 成等比数列. 已知对任意正整数 n, 均有 $\dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_4} + \dfrac{1}{a_8} + \cdots \dfrac{1}{a_{2^n}} < 4$, 则 $\{a_n\}$ 公差的取值范围是 ________.

答案： $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

解析： 设公差 $d > 0$，由条件有 $a_2^2 = a_1 a_4$，即 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$, 整理得 $a_1 = d$, 故 $a_n = nd$.

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2^n}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 4$$

对任意正整数 n 均成立，这等价于 $\dfrac{1}{d} \leqslant 4$, 即 $d \geqslant \dfrac{1}{4}$.

3. 甲乙两人进行比赛, 每局中甲获胜概率为 $\dfrac{1}{3}$, 乙获胜概率为 $\dfrac{2}{3}$, 先胜 5 局者获得冠军. 比赛不足 9 局就决出冠军的概率为 ________.

答案： $\dfrac{5441}{6561}$.

解析： 9 局之内一定能决出冠军, 第 9 局才决出冠军当且仅当前 8 局双方各胜 4 局, 概率为

$$\mathrm{C}_8^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1120}{6561},$$

故不足 9 局就决出冠军的概率为

$$1 - \frac{1120}{6561} = \frac{5441}{6561}.$$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A \sin C + \sin^2 C = \sin^2 B$. 若 $A = \dfrac{5}{9}\pi$, 则 $C =$ ________.

答案： $\dfrac{4\pi}{27}$.

解析： 设角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，$\triangle ABC$ 外接圆半径为 R. 由条件及正弦定理, $ac + c^2 = b^2$. 由余弦定理,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + ac}{2ab} = \frac{a + c}{2b} = \frac{(\sin A + \sin C)}{2 \sin B}.$$

故

$$\sin C = 2 \sin B \cos C - \sin A = 2 \sin B \cos C - \sin(B + C) = \sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin(B - C),$$

又 $B-C,C\in\left(-\frac{4}{9}\pi,\frac{4}{9}\pi\right)$, 则 $B-C=C$, $B=2C$. 结合 $B+C=\pi-A=\frac{4\pi}{9}$, 解得 $C=\frac{4\pi}{27}$.

5. 设 x,y 为非负实数, $x+y=1$, 则 $3\sqrt{25x^2+9}+2\sqrt{25y^2+4}$ 的最小值为 ________.

答案： $5\sqrt{13}$.

解析： 由 Cauchy 不等式,

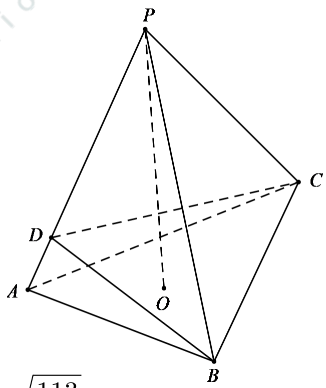
$$\begin{aligned}\text{原式}&=3\sqrt{25x^2+9}\cdot\frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{13}}+2\sqrt{25y^2+4}\cdot\frac{\sqrt{3^2+2^2}}{\sqrt{13}}\\&\geqslant 3\cdot\frac{10x+9}{\sqrt{13}}+2\cdot\frac{15y+4}{\sqrt{13}}=\frac{30(x+y)+35}{\sqrt{13}}=5\sqrt{13},\end{aligned}$$

当 $x=\frac{2}{5},y=\frac{3}{5}$ 时，原式取到最小值 $5\sqrt{13}$.

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 4, 三条侧棱 $PA=PB=PC=5$, 点 D 在线段 PA 上,$DA=1$. 则点 P 到平面 BCD 的距离为 ________.

答案： $\frac{144\sqrt{1585}}{1585}$.

解析： 作 $PO\perp$ 平面 ABC 于 O，则 $PO=4,OA=\sqrt{PA^2-PO^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.



由于 O 是正 $\triangle ABC$ 的中心，则 $AB=\sqrt{3}OA=3\sqrt{3}$，三棱锥体积

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=9\sqrt{3},$$

又 $PD=\frac{4}{5}PA$, 则 $V_{P-DBC}=\frac{4}{5}\cdot 9\sqrt{3}=\frac{36\sqrt{3}}{5}$.

设等腰 $\triangle PAB$ 的底角 $\angle PAB=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}AB}{PA}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$,

$$BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos\theta}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot1\cdot3\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{10}}=\sqrt{\frac{113}{5}}.$$

同理 $CD=\sqrt{\frac{113}{5}}$，等腰 $\triangle BDC$ 的底边 BC 上的高

$$h=\sqrt{BD^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{113}{5}-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{317}{20}},$$

$$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{317}{20}}=\frac{3\sqrt{951}}{4\sqrt{5}}.$$

故点 P 与平面 BCD 的距离 d 满足

$$d=\frac{3V_{P-DBC}}{S_{\triangle BDC}}=\frac{3\cdot\frac{36\sqrt{3}}{5}}{\frac{3\sqrt{951}}{4\sqrt{5}}}=\frac{144\sqrt{1585}}{1585}.$$

7. 椭圆长轴长为 4, 短轴长为 2, 点 M 在椭圆的长轴上, 且与椭圆中心距离为 x $(0\leqslant x\leqslant 2)$. 椭圆上的点到点 M 的距离最小值记为 $f(x)$, 则函数 $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的解析式为 ________.

答案： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{9-3x^2}}{3} & \left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{2}\right)\\ 2-x & \left(\dfrac{3}{2}<x\leqslant 2\right)\end{cases}$.

解析： 设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 点 M 坐标为 $(x,0)$, 椭圆上一点 $P(x_0,y_0)$ $(-2\leqslant x_0\leqslant 2)$, 则

$$\begin{aligned}|PM|^2&=(x_0-x)^2+y_0^2=(x_0-x)^2+\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)\\&=\frac{3}{4}x_0^2-2xx_0+x^2+1=\frac{3}{4}\left(x_0-\frac{4}{3}x\right)^2+1-\frac{1}{3}x^2.\end{aligned}$$

当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时, $0\leqslant\dfrac{4}{3}x\leqslant 2$, $x_0=\dfrac{4}{3}x$ 时 $|PM|$ 取最小值 $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}x^2}=\dfrac{\sqrt{9-3x^2}}{3}$.
当 $\dfrac{3}{2}<x\leqslant 2$ 时, $\dfrac{4}{3}x>2$, $x_0=2$ 时 $|PM|$ 取最小值 $f(x)=\sqrt{(2-x)^2+0^2}=2-x$.

8. 关于 x 的方程 $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cdots+\cos^2 4041x=2020$ 在 $[0,2\pi]$ 上解的个数为 ________.

答案： 16162.

解析： 记 $n=2020$,

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\cos^2 kx=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+1}(\cos 2kx+1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n+1}\cos 2kx\right)+n+\frac{1}{2}.$$

记 $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\cos 2kx$, 则

$$2\sin x\cdot S=\sum_{k=1}^{2n+1}2\sin x\cos 2kx=\sum_{k=1}^{2n+1}[\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x]=\sin(4n+3)x-\sin x.$$

$x=0,\pi,2\pi$ 显然不是原方程的解. 当 $x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ 时, $S=\dfrac{\sin(4n+3)x-\sin x}{2\sin x}$,

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\cos^2 kx=\frac{\sin(4n+3)x-\sin x}{4\sin x}+n+\frac{1}{2}=n+\frac{\sin(4n+3)x+\sin x}{4\sin x}.$$

原方程等价于 $\sin(4n+3)x+\sin x=0,\sin x\neq 0$, 即等价于 $\sin(2n+2)x\cdot\cos(2n+1)x=0,\sin x\neq 0$. 故在 $(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ 中方程有下述两族解:

$$\begin{aligned}x&=\frac{l\pi}{2n+2}\ (l=1,2,\cdots,2n+1,2n+3,2n+4,\cdots,4n+3),\\x&=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\ (m=1,2,\cdots,4n+1,4n+2).\end{aligned}$$

上述两族解中重复的是

$$\begin{aligned}\frac{l\pi}{2n+2}=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}&\Leftrightarrow l(2n+1)=(2m-1)(n+1)\\&\Leftrightarrow (l,m)=(n+1,n+1)\text{ 或 }(3n+3,3n+2).\end{aligned}$$

故原方程在 $[0,2\pi]$ 上解的个数为 $(4n+2)+(4n+2)-2=8n+2=16162$.

二、解答题（本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

9.（本题满分 16 分）

已知 a,b 为实数, $a-b$ 为整数, 关于 x 的方程 $(a-b)^3x^2+(a^2-3ab+2b^2)x+a+b=0$ 有两个不同的整数根. 求 b 的最小值.

解： $a-b=0$ 显然不合题设.

设 $a-b\neq 0$，$t=(a-b)x$，当 $x\in\mathbb{Z}$ 时 $t\in\mathbb{Z}$，原方程化为 $(a-b)t^2+(a-2b)t+(a+b)=0$. 设 $t_1>t_2$ 是此方程的两个整数根，由 Vieta 定理：

$$t_1+t_2=\frac{2b-a}{a-b},\ t_1t_2=\frac{a+b}{a-b}.$$

…………………（4 分）

故

$$t_1t_2-2(t_1+t_2)=3,\ (t_1-2)(t_2-2)=7.$$

则 $(t_1-2,t_2-2)=(7,1)$ 或 $(-1,-7)$，$(t_1,t_2)=(9,3)$ 或 $(1,-5)$. 进一步有

$$\left(\frac{2b-a}{a-b},\frac{a+b}{a-b}\right)=(12,27)\text{ 或 }(-4,-5),$$

解得 $13a=14b$ 或 $3a=2b$. …………………（8 分）

若 $13a=14b$，$a-b=\frac{1}{13}b\in\mathbb{Z}$，则 $a,b\in\mathbb{Z}$，b 是 13 的倍数，$t_2=(a-b)x_2=\frac{1}{13}bx_2=3$，$bx_2=39$，$b\geqslant -39$.

若 $3a=2b$，$a-b=-\frac{1}{3}b\in\mathbb{Z}$，则 $a,b\in\mathbb{Z}$，b 是 3 的倍数，$t_1=(a-b)x_1=-\frac{1}{3}bx_1=1$，$bx_1=-3$，$b\geqslant -3$. …………………（12 分）

当 $b=-39,a=-42$ 时，方程有两个整数根 $-1,-3$. 故 b 的最小值为 -39. ……………（16 分）

10.（本题满分 20 分）

已知 k 为正实数, 且任何满足

$$ab+bc+ca=1,\quad a^3+b^3+c^3<k(a+b+c),$$

的正实数 a,b,c 都是某个三角形的三边长. 求 k 的最大值.

解： $a=b=\frac{1}{\sqrt5}$, $c=\frac{2}{\sqrt5}$ 不是三角形的三边长, 故

$$\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^3+\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^3\geqslant k\left(\frac{1}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\right),$$

即

$$k\leqslant\frac12.$$

…………………（5 分）

下证 $k=\frac12$ 满足要求. 不妨设 $0<a\leqslant b\leqslant c$, 且有

$$a^3+b^3+c^3<\frac12(a+b+c)=\frac12(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

则

$$\frac{1}{4}(a+b)^3+c^3 \leqslant a^3+b^3+c^3<\frac{1}{2}(a+b+c)[c(a+b)+ab] \leqslant \frac{1}{2}(a+b+c)\left[c(a+b)+\frac{(a+b)^2}{4}\right].$$

…………………（10 分）

记 $q=a+b$, 上式化为

$$\frac{1}{4}q^3+c^3<\frac{1}{2}(q+c)\left(cq+\frac{1}{4}q^2\right).$$

整理得 $q^3+8c^3-5cq^2-4c^2q<0$, 即 $(q-c)(q^2-4cq-8c^2)<0$. …………………（15 分）

由于 $0<q=a+b \leqslant 2c$, 则有

$$q^2-4cq-8c^2=(q-2c)^2-12c^2<(0-2c)^2-12c^2=-8c^2<0,$$

故 $q-c>0$, 即 $a+b>c$. 这表明 a,b,c 是三角形的三边长. 所以 k 的最大值是 $\frac{1}{2}$.

…………………（20 分）

11.（本题满分 20 分）

在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 Γ 的中心为原点 O, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 过点 $C(-1,0)$ 的直线与 Γ 交于两点 A,B, 满足 $|AC|=2|BC|$. 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值以及取到最大值时 Γ 的方程.

解： 设 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, 离心率 $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$, 则 $a^2=3b^2$, $\Gamma: x^2+3y^2=a^2$.

$\triangle OAB$ 面积为正数时, l 不与 x 轴重合. 若 l 垂直于 x 轴, 则 $|AC|=|BC|$, 不满足条件. 故可设 $l: y=k(x+1)$, 即 $x=\frac{y}{k}-1$. 与 Γ 的方程联立得, $\left(\frac{y}{k}-1\right)^2+3y^2=a^2$, 即

$$\left(\frac{1}{k^2}+3\right)y^2-\frac{2}{k}y+1-a^2=0. \quad ①$$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 由 Vieta 定理,

$$y_1+y_2=\frac{\frac{2}{k}}{\frac{1}{k^2}+3}=\frac{2k}{3k^2+1}, \quad ②$$

$$y_1y_2=\frac{1-a^2}{\frac{1}{k^2}+3}. \quad ③$$

…………………（5 分）

若点 C 在椭圆内部, 则 y_1,y_2 异号. 由 $|AC|=2|BC|$ 知 $y_1=-2y_2$, 代入②知 $y_2=\frac{-2k}{3k^2+1}$. 故

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|=\frac{3}{2}|y_2|=\frac{3|k|}{3k^2+1}=\frac{3}{3|k|+\frac{1}{|k|}} \leqslant \frac{3}{2\sqrt{3|k|\cdot\frac{1}{|k|}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

上式等号成立当且仅当 $3|k|=\frac{1}{|k|}, k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 此时 $y_2=-k=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}, y_1=-2y_2$. ……………（10 分）

上式代入③得, $y_1y_2=-2y_2^2=\frac{1-a^2}{\frac{1}{k^2}+3}$, 即 $-\frac{2}{3}=\frac{1-a^2}{6}$, $a^2=5$. 此时①的判别式

$$\Delta=\frac{4}{k^2}-4\left(\frac{1}{k^2}+3\right)(1-a^2)=12-4\times6\times(1-5)>0,$$

①有两实根 y_1, y_2. 此时 Γ 的方程为 $x^2+3y^2=5$. ··················（15 分）

若点 C 在椭圆外部, 则 y_1, y_2 同号. 由 $|AC|=2|BC|$ 知 $y_1=2y_2$, 代入②知 $y_2=\dfrac{2k}{3(3k^2+1)}$. 故

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left|y_2\right|=\frac{|k|}{3\left(3k^2+1\right)}=\frac{1}{3\left(3|k|+\frac{1}{|k|}\right)}\leqslant\frac{1}{3\cdot 2\sqrt{3|k|\cdot\frac{1}{|k|}}}=\frac{\sqrt{3}}{18}<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故 $\triangle OAB$ 面积最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 此时 Γ 方程为 $x^2+3y^2=5$. ··················（20 分）