“根源杯”数学奥林匹克邀请赛参考答案

2020 年 02 月

一、（本题满分 40 分）

已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 3)$ 为等差数列，其公差 $d > 5$，且

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i - 3| = \sum_{i=1}^{n} |a_i - 4| = 2019.$$

求项数 n 的最大可能值.

解： 将等式写为 $\sum_{i=1}^{n}(|a_i| - |a_i - 4|) = 0$. 注意 $|a_i| - |a_i - 4| = \begin{cases} 4, & a_i \geqslant 4 \\ 2a_i - 4, & 0 < a_i < 4 \\ -4, & a_i \leqslant 0 \end{cases}$

若存在 $a_i \in (0,4)$，由于等差数列的公差 $d > 5$，故这样的 a_i 只能有一个，记为 a_k.

代入等式知 $-4(k-1) + (2a_k - 4) + 4(n-k) = 0$，这表明 $a_k = 2(n-2k)$.

由于 $n - 2k$ 是整数，$0 < a_k < 4$，故只能有 $a_k = 2, n - 2k = 1$.

我们注意也有 $\sum_{i=1}^{n}(|a_i| - |a_i - 3|) = 0$. 注意 $|a_i| - |a_i - 3| = \begin{cases} 3, & a_i \geqslant 3 \\ 2a_i - 3, & 0 < a_i < 3 \\ -3, & a_i \leqslant 0 \end{cases}$

类似地，有 $-3(k-1) + (2a_k - 3) + 3(n-k) = 0$，这表明 $a_k = \frac{3}{2}(n-2k) = \frac{3}{2}$，矛盾.

故不存在 $a_i \in (0,4)$.

设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqslant 0 < 4 \leqslant a_{m+1} < \cdots < a_n$. 仍然代入

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i| - |a_i - 4|) = 0,$$

得

$$-4(m) + 4(n-m) = 0 \Longleftrightarrow m = \frac{n}{2},$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|a_i| &= (a_1 + \cdots + a_n) - 2(a_1 + \cdots + a_m) \\ &= \left(na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d\right) - 2\left(\frac{n}{2}a_1 + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}d\right) = \frac{n^2 d}{4} = 2019.\end{aligned}$$

注意到 $d > 5$，故

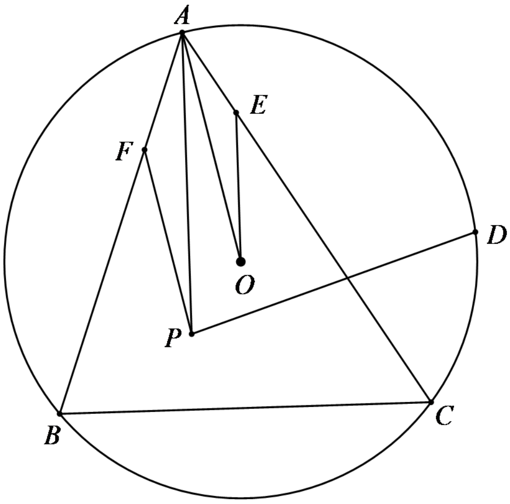
$$n^2 < \frac{4 \cdot 2019}{5} \Longrightarrow n \leqslant 40.$$

我们可以取 $a_{14} = 0$，公差 $d = \dfrac{4 \times 2019}{40^2} = 5.0475$ 所决定的等差数列，它满足条件.

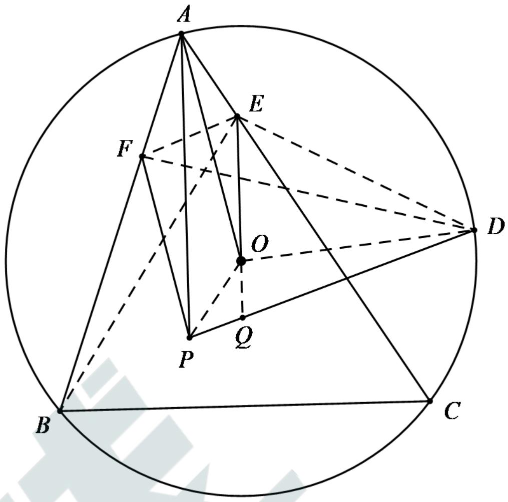
故 n 的最大可能值为 40.

二、（本题满分 40 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$，$\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内且 $AP \perp BC$，点 D（异于点 A）在 $\odot O$ 上且 $PA = PD$. 过点 O 作 BC 的垂线交 AC 于点 E，过点 P 作 AO 的平行线交 AB 于点 F. 求证：B, D, E, F 四点共圆.



题 图



解析图

证明： 连接 OD, OP, ED, EB, EF, DF. 由于 $AP \perp BC$，O 为 $\triangle ABC$ 外心，故

$$\angle PAB = \angle OAC = 90^\circ - \angle ABC.$$

由于 $FP \,/\!/\, AO$, $EO \,/\!/\, AP$（均垂直于 BC），故 $\angle AOE = \angle APF$，所以 $\triangle AOE \backsim \triangle APF$. 于是

$$\frac{EO}{FP} = \frac{AO}{AP} = \frac{OD}{PD}. \quad ①.$$

………………（10 分）

由于 $PA = PD$，$OA = OD$，则 $\triangle APO \cong \triangle DPO$，$\angle OAP = \angle ODP$.

延长 EO 与 PD 交于点 Q，由 $EQ \,/\!/\, AP, FP \,/\!/\, AO$，则

$$\angle EOD = \angle EQD + \angle ODP = \angle APD + \angle OAP = \angle APD + \angle APF = \angle FPD. \quad ②$$

………………（20 分）

由①,②得 $\triangle EOD \backsim \triangle FPD$，于是 $\angle EDO = \angle FDP$，$\angle EDF = \angle ODP$.

………………（30 分）

由 O 为 $\triangle ABC$ 外心及 $EO \perp BC$ 知，直线 EO 是线段 BC 的中垂线，$EB = EC$. 故

$$\begin{aligned}\angle EBF &= \angle ABC - \angle ABC = \angle ABC - \angle ABC \\ &= \angle BAC - 2(90^\circ - \angle ABC) = \angle BAC - (\angle PAB + \angle OAC) \\ &= \angle OAP.\end{aligned}$$

又因为 $\angle OAP = \angle ODP = \angle EDF$，则 $\angle EBF = \angle EDF$. 所以 B, D, E, F 四点共圆.

………………（40 分）

三、（本题满分 50 分）

给定正整数 n，平面点集 $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z},1\leqslant x,y\leqslant 2n-1\}$. S 的子集 T 满足：若面积为 1 的正方形的四个顶点都在 S 中，则这四个顶点至多有 2 个在 T 中. 求 T 的元素个数的最大值.

解： $|T|$ 的最大值为 $n(2n-1)$.

S 中的点排成 $2n-1$ 行，$2n-1$ 列的方阵. 取 T 为第 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 行的所有点构成的集合（共 n 行，$n(2n-1)$ 个点）满足要求. ………………（10 分）

以下证明 T 中至多有 $n(2n-1)$ 个点.

引理： S 的任意相邻 2 行中至多有 $2n$ 个点在 T 中，且若恰有 $2n$ 个点在 T 中，这 $2n$ 个点一定是第 $1,3,5\cdots,2n-1$ 列中的点.

引理的证明： 这 2 行中第 $i,i+1(i=1,3,5,\cdots,2n-3)$ 列的 4 个点构成面积为 1 的正方形的 4 个顶点，其中至多有 2 个点在 T 中. 第 $2n-1$ 列只有 2 个点，它们可能在 T 中. 故至多有 $2n$ 个点在 T 中. ………………（20 分）

若恰有 $2n$ 个点在 T 中，则第 $2n-1$ 列的 2 个点属于 T，进而第 $2n-2$ 列的 2 个点不属于 T（因为第 $2n-2,2n-1$ 列的 4 个点构成面积为 1 的正方形的 4 个顶点）. 上面的论证又要求第 $2n-3,2n-2$ 列的 4 个点中恰有 2 个点在 T 中，从而第 $2n-3$ 列的 2 个点在 T 中. 进而第 $2n-4$ 列的 2 个点不在 T 中，这样递推得到引理中的结论. ………………（30 分）

回到原题.

用 $V_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 表示 S 中第 $2i-1,2i$ 行的点构成的集合，V_n 表示 S 中第 $2n-1$ 行的点构成的集合，则 $|V_i|=2(2n-1),i=1,2,\cdots,n-1$，$|V_n|=2n-1$.

若对 $i=1,2,\cdots,n$，均有 $|V_i\cap T|\leqslant 2n-1$，则 $|T|=\sum\limits_{i=1}^{n}|V_i\cap T|\leqslant n(2n-1)$.

若存在某个 j，$|V_j\cap T|>2n-1$，则 $j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$. 由引理，$|V_j\cap T|=2n$，且 S 中第 $2j-1$ 行，第 $2j$ 行各有 n 个点在 T 中. S 的第 $1,2,\ldots,2j-2$ 行中相邻 2 行分成一组，共 $j-1$ 组. 由引理，每组中至多有 $2n$ 个点在 T 中. 故这 $2j-2$ 行中至多有 $2n(j-1)$ 个点在 T 中. S 的第 $2j,2j+1,2j+2,\cdots,2n-1$ 行中相邻 2 行分成一组，共 $n-j$ 组. 由引理，每组中至多有 $2n$ 个点在 T 中. 故这 $2n-2j$ 行中至多有 $2n(n-j)$ 个点在 T 中. 又第 $2j-1$ 行恰有 n 个点在 T 中，故

$$\begin{aligned}|T|&=\text{前 }2j-2\text{ 行 }T\text{ 中点数}+\text{后 }2n-2j\text{ 行 }T\text{ 中点数}+\text{第 }2j-1\text{ 行 }T\text{ 中点数}\\&\leqslant 2n(j-1)+2n(n-j)+n=n(2n-1).\end{aligned}$$

………………（50 分）

四、（本题满分 50 分）

对正整数数列 $\{x_n\}$，定义集合

$$P(\{x_n\})=\{p:\text{存在正整数 }k\text{，使得 }p\mid x_k\text{，其中 }p\text{ 是素数}\}.$$

给定两个无穷正整数数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，$P(\{a_n\})$ 和 $P(\{b_n\})$ 都是有限集. 证明：存在无穷多个正整数 n 和两个 (不依赖于 n 的) 正整数 a,b，使得 $\dfrac{a_n}{a}$ 是某个正整数的 2019 次方，且 $\dfrac{b_n}{b}$ 是某个正整数的 2020 次方.

证明： 先证一个引理：

引理： 给定正整数 k 及无穷正整数数列 $\{x_n\}$，$P(\{x_n\})$ 是有限集. 则存在正整数 x 和无穷多个正整

数 n，使得 $\dfrac{x_n}{x}$ 是某个正整数的 k 次方.

引理的证明： 设 $P(\{x_n\})=\{p_1,p_2,\cdots,p_t\}$,$x_n=p_1^{\alpha_{1,n}}p_2^{\alpha_{2,n}}\cdots p_t^{\alpha_{t,n}}$, $n=1,2,\cdots$. 称数列中两项 x_n,x_m 模 k 等价，若对每个 $i=1,2,\cdots,t$，均有 $\alpha_{i,m}\equiv\alpha_{i,n}(\bmod k)$. 由于 $\{x_n\}$ 是无穷数列，根据抽屉原理，其中有无穷多项 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots$(两两) 模 k 等价. …………………（10 分）

记 $c_i=\min\{\alpha_{i,n_1},\alpha_{i,n_2},\cdots\}$（非空的非负整数集中必有最小元素），$x=\prod\limits_{i=1}^{t}p_i^{c_i}$. 我们有

$$x_{n_j}=x\left(\prod_{i=1}^{t}p_i^{\frac{\alpha_{i,n_j}-c_i}{k}}\right)^k,j=1,2,\cdots.$$

由于 $k\mid\alpha_{i,n_j}-c_i$，则对每个 $n=n_j$，$\dfrac{x_n}{x}$ 是某个正整数的 k 次方. 引理成立. ……………（30 分）

回到原题.

对无穷数列 $\{a_n\}$ 用引理知，存在正整数 a 和无穷多项 $\{a_{n_i}\}(j=1,2,\cdots)$，使得 $\dfrac{a_{n_j}}{a}$ 是某个正整数的 2019 次方. …………………（40 分）

考虑数列 $\{b_n\}$ 的无穷子序列 $\{b_{n_j}\}$，对 $\{b_{n_j}\}$ 用引理知，存在正整数 b 和无穷多个 $n\in\{n_i\mid j=1,2,\cdots\}$，使得 $\dfrac{b_n}{b}$ 是某正整数的 2020 次方. 由 n_j 的选取知，对这些 n，$\dfrac{a_n}{a}$ 也是某个正整数的 2019 次方. …………………（50 分）