

“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

2020 年 02 月

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 集合 A, B, C 满足 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B \subseteq \{1, 2\}$. 满足要求的有序集合组 (A, B, C) 的个数为 _____.

2. 设 $\{a_n\}$ 是严格递增的无穷等差数列, 且其中三项 a_1, a_2, a_4 成等比数列. 已知对任意正整数 n , 均有 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_8} + \cdots + \frac{1}{a_{2^n}} < 4$, 则 $\{a_n\}$ 公差的取值范围是 _____.

3. 甲乙两人进行比赛, 每局中甲获胜概率为 $\frac{1}{3}$, 乙获胜概率为 $\frac{2}{3}$, 先胜 5 局者获得冠军. 比赛不足 9 局就决出冠军的概率为 _____.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A \sin C + \sin^2 C = \sin^2 B$. 若 $A = \frac{5}{9}\pi$, 则 $C =$ _____.

5. 设 x, y 为非负实数, $x + y = 1$, 则 $3\sqrt{25x^2 + 9} + 2\sqrt{25y^2 + 4}$ 的最小值为 _____.

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 4, 三条侧棱 $PA = PB = PC = 5$, 点 D 在线段 PA 上, $DA = 1$. 则点 P 到平面 BCD 的距离为 _____.

7. 椭圆长轴长为 4, 短轴长为 2, 点 M 在椭圆的长轴上, 且与椭圆中心距离为 x ($0 \leq x \leq 2$). 椭圆上的点到点 M 的距离最小值记为 $f(x)$, 则函数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$) 的解析式为 _____.

8. 关于 x 的方程 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cdots + \cos^2 4041x = 2020$ 在 $[0, 2\pi]$ 上解的个数为 _____.

二、解答题（本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

9. （本题满分 16 分）

已知 a, b 为实数, $a - b$ 为整数, 关于 x 的方程 $(a - b)^3 x^2 + (a^2 - 3ab + 2b^2)x + a + b = 0$ 有两个不同的整数根. 求 b 的最小值.

10. （本题满分 20 分）

已知 k 为正实数, 且任何满足

$$ab + bc + ca = 1, \quad a^3 + b^3 + c^3 < k(a + b + c),$$

的正实数 a, b, c 都是某个三角形的三边长. 求 k 的最大值.

11. （本题满分 20 分）

在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 Γ 的中心为原点 O , 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 过点 $C(-1, 0)$ 的直线与 Γ 交于两点 A, B , 满足 $|AC| = 2|BC|$. 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值以及取到最大值时 Γ 的方程.