

07

第七讲

动态背景下三角形存在性问题

八年级数学

平行线教育线上课程

2020 年

PARALLEL EDUCATION

新的数学方法和概念，
常常比解决数学问题本身更重要。

—— 华罗庚

第七讲 动态背景下三角形存在性问题

智慧导航

1. 直角三角形存在性

- (1) 分类标准：按直角分三种
- (2) 一般思路：
 - ①分类讨论三角形中哪个角为直角；
 - ②从边入手考虑勾股定理；
 - ③若存在特殊角，考虑从特殊角入手.

2. 等腰三角形存在性

- (1) 分类标准：按顶角分三种或者按腰分三种
- (2) 一般思路：分类讨论哪两个角是底角，两圆一线

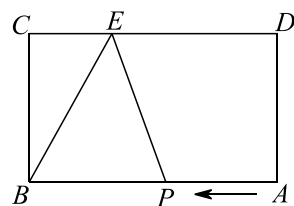
智慧基石

例 1

1. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $BC = AD = 4$ ， $AB = CD = 10$ ， $\angle DCB = 90^\circ$ ， E 为 CD 边上的一点， $DE = 7$ ，动点 P 从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度沿着边 AB 向终点 B 运动，连接 PE ，设点 P 运动的时间为 t 秒.

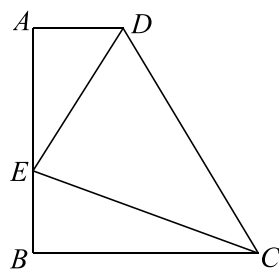
(1) 求 BE 的长；

(2) 若 $\triangle BPE$ 为直角三角形，求 t 的值.



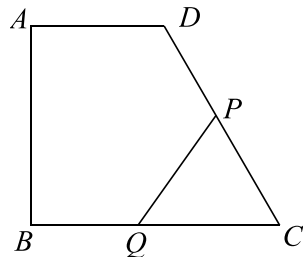
练一练

如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = BC = 5$ ， $AD = 1$ ， E 是 AB 所在直线上的动点，当 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $\triangle CDE$ 是不以 DC 为斜边的直角三角形.



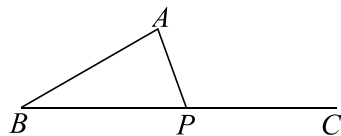
例2

1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AD \parallel BC$, 且 $AD = 4\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, $DC = 12\text{cm}$. 若动点 P 从 A 点出发, 以每秒 4cm 的速度沿线段 AD 、 DC 向 C 点运动; 动点 Q 从 C 点出发以每秒 5cm 的速度沿 CB 向 B 点运动. 当 Q 点到达 B 点时, 动点 P 、 Q 同时停止运动. 设点 P 、 Q 同时出发, 并运动了 t 秒. 是否存在 t , 使得点 P 在线段 DC 上且 $\triangle PCQ$ 是直角三角形? 若存在, 求出此时 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



练一练

如图, 已知 $\angle B = 30^\circ$, $AB = 2\text{cm}$, 点 P 为 $\angle ABC$ 的边 BC 上一动点, 则当 $BP =$ _____ 时, $\triangle BAP$ 为直角三角形.

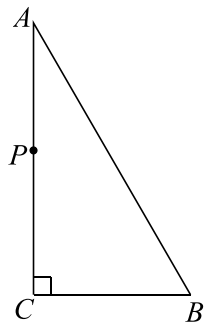


例3

1. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, 若点 P 从点 A 出发, 以每秒 4cm 的速度沿折线 $A-C-B-A$ 运动, 设运动时间为 t 秒 ($t > 0$).

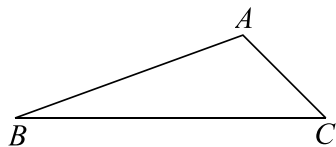
(1) 若点 P 在 AC 上, 且满足 $PA = PB$ 时, 求出此时 t 的值;

(2) 在运动过程中, 直接写出当 t 为何值时, $\triangle BCP$ 为等腰三角形.



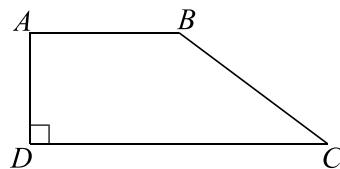
练一练

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 20^\circ$, $\angle A = 105^\circ$, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的三边上运动, 当 $\triangle PAC$ 成为等腰三角形时, 顶角是_____度.



例4

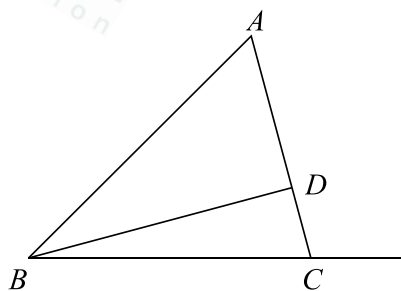
1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle D = 90^\circ$ ，若 $AD = 3$ ， $AB = 4$ ， $CD = 8$ ，点 P 为线段 CD 上的一动点，若 $\triangle ABP$ 为等腰三角形，求 DP 的长.



练一练

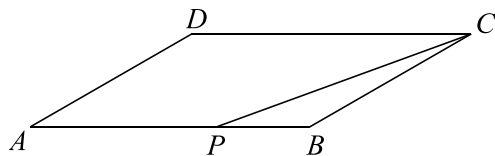
已知： $\triangle ABC$ 中， $AB = 13$ ， $AC = 9$ ， $BC = 4\sqrt{10}$ ， $BD \perp AC$ 于点 D .

- (1) 求线段 BD 的长；
 (2) 点 P 为射线 BC 上一动点，若 $\triangle BDP$ 为等腰三角形，求 BP 的长.



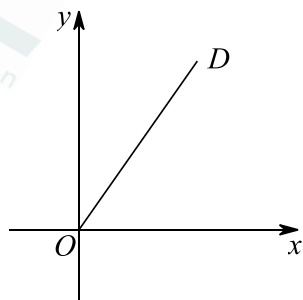
例 5

1. 如图：已知平行四边形中， $AB=7$ ， $BC=4$ ， $\angle A=30^\circ$ ，点 P 从点 A 沿射线 AB 边向右运动，速度为 1cm/s ，若设运动时间为 t 秒，连接 PC ，当 t 为何值时， $\triangle PBC$ 为等腰三角形？



练一练

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 D 的坐标为 $(3, 4)$ ，点 P 是 x 轴正半轴上的一个动点，如果 $\triangle DOP$ 是等腰三角形，求点 P 的坐标。



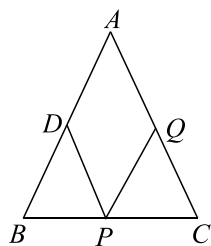
例6

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 20\text{cm}$, $BC = 16\text{cm}$, 点 D 为线段 AB 的中点, 动点 P 以 2cm/s 的速度从 B 点出发在线段 BC 上运动, 同时点 Q 以 $a\text{ cm/s}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 2$) 的速度从 C 点出发在线段 CA 上运动, 设运动时间为 x 秒.

(1) 若 $AB = AC$, P 在线段 BC 上, 求当 a 为何值时, 能够使 $\triangle BPD$ 和 $\triangle CQP$ 全等?

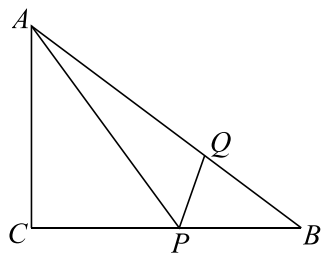
(2) 若 $\angle B = 60^\circ$, 求出发几秒后, $\triangle BPD$ 为直角三角形?

(3) 若 $\angle C = 60^\circ$, 当 $\angle CPQ$ 的度数为多少时, $\triangle CQP$ 为等腰三角形?



练一练

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 3$, $AB = 6$, P 、 Q 分别为边 BC 、 AB 上的两个动点, 若要使 $\triangle APQ$ 是等腰三角形且 $\triangle BPQ$ 是直角三角形, 则 $AQ =$ _____.

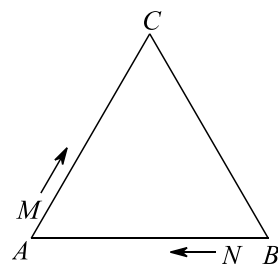


智慧高峰

1. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = AC = 12\text{cm}$, 现有两点 M 、 N 分别从点 A 、 B 同时出发, 沿三角形的边运动, 点 M 的速度为 1cm/s , 点 N 的速度为 2cm/s . 当点 N 第一次到达 B 点时, M 、 N 同时停止运动.

(1) 点 M 、 N 运动几秒时, 可得到等边三角形 $\triangle AMN$?

(2) 当点 M 、 N 在 BC 边上运动时, 能否得到以 MN 为底边的等腰 $\triangle AMN$? 如存在, 求出运动时间.



智慧攻略

1. 直角三角形存在性

解题关键：分类讨论哪个角是直角，利用勾股定理或者找特殊角解题.

2. 等腰三角形存在性

解题关键：分类讨论哪两个角相等



智慧磨炼

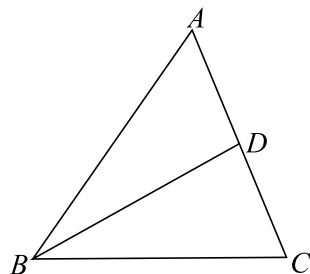
1. 如图，线段 BD 为锐角 $\triangle ABC$ 上 AC 边上的中线， E 为 $\triangle ABC$ 的边上的一个动点，则使 $\triangle BDE$ 为直角三角形的点 E 的位置有 ()

A. 4 个

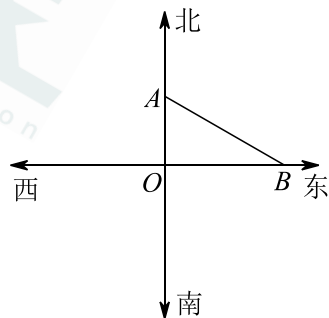
B. 3 个

C. 2 个

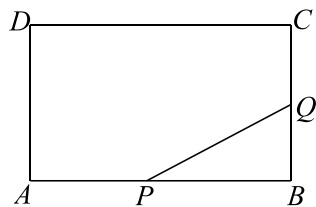
D. 1 个



2. 如图，南北向的公路上有一点 $A(0, 2)$ ，东西向的公路上有一点 $B(2\sqrt{3}, 0)$ ，若要在南北向的公路上确定点 P ，使得 $\triangle PAB$ 是直角三角形，则点 P 的坐标为_____.

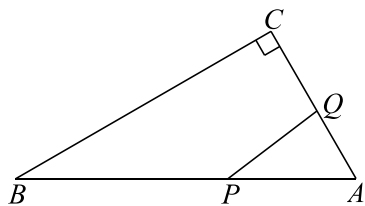


3. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=12\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$, 动点 P 从点 A 出发, 沿 AB 以 2cm/s 的速度向终点 B 匀速运动; 动点 Q 从点 B 出发, 沿 BC 以 1cm/s 的速度向终点 C 匀速运动; 两点同时出发多少秒时, $\triangle PBQ$ 是等腰三角形?

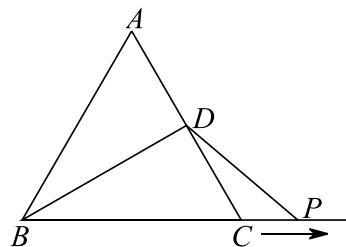


4. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, $AB=12\text{cm}$, 若点 P 从点 B 出发以 2cm/s 的速度向点 A 运动, 点 Q 从点 A 出发以 1cm/s 的速度向点 C 运动, 设 P 、 Q 分别从点 B 、 A 同时出发, 运动的时间为 t 秒.

- (1) 用含 t 的式子表示线段 AP 、 AQ 的长;
 (2) 当 t 为何值时, $\triangle APQ$ 是以 PQ 为底边的等腰三角形?



5. 如图，等边 $\triangle ABC$ 的边长为10cm，点 D 是边 AC 的中点，动点 P 从点 C 出发，沿 BC 的延长线以 2cm/s 的速度做匀速运动，设点 P 的运动时间为 t （秒），若 $\triangle BDP$ 是等腰三角形，求 t 的值.



6. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=18\text{cm}$ ， $AC=12\text{cm}$ ，点 P 从点 B 出发以每秒 3cm 的速度向点 A 运动，点 Q 从点 A 同时出发以每秒 2cm 的速度向点 C 运动，其中一个动点到达端点时，另一个动点也随之停止运动. 当 $\triangle APQ$ 是以 PQ 为底的等腰三角形时，运动的时间是_____.

