

08

第八讲

中考必对专题之规律探究

九年级数学

平行线教育线上课程
2020年

PARALLEL EDUCATION

新的数学方法和概念，
常常比解决数学问题本身更重要。

—— 华罗庚

第八讲 中考必对专题之规律探究

智慧导航

1. 常见题型：数式规律，图形规律，坐标规律
2. 通过观察，分析，推理，探究其中蕴含的规律，归纳或猜想出一般性的结论
3. 周期类问题：确定周期以及余数

智慧基石

例 1

1. 观察下列一组数： $\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \dots$ ，它们是按一定规律排列的，那么这组数的第 n 个数可用含 n 的式子表示为_____.

2. 观察下列关于自然数的等式：

$$1^2 - 4 \times 0^2 = 1 \text{①}$$

$$3^2 - 4 \times 1^2 = 5 \text{②}$$

$$5^2 - 4 \times 2^2 = 9 \text{③}$$

根据上述规律解决下列问题：

猜想第 n 个等式（用含 n 的式子表示）_____.

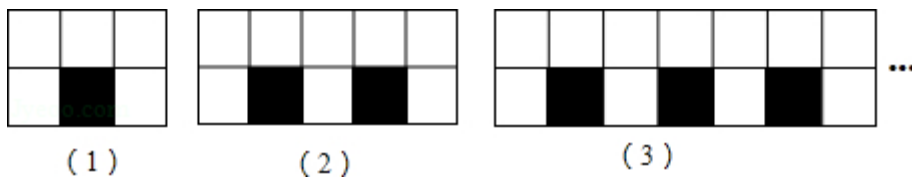
练一练

1. 如图所示的数表是由从 1 开始的连续自然数组成的. 观察数表特征，第 n 行最中间的数可以表示为_____.（用含 n 的代数式表示）

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|-----|
| | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | 第一行 |
| | | | | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | 第二行 |
| | | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | | | | | | | | | | | 第三行 |
| | <small>zyoo.com</small> | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | | | | | | | | | | | | | 第四行 |
| | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | 第五行 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | | | | | | | | | | | 第六行 |

例2

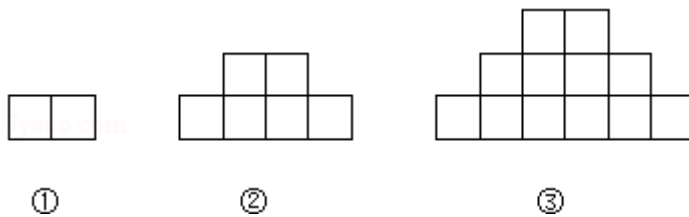
1. 下列图案由边长相等的黑、白两色正方形按一定的规律拼接而成，依此规律，第 n 个图形中白色正方形的个数为 ()



- A. $4n+1$ B. $4n-1$ C. $3n-2$ D. $3n+2$

练一练

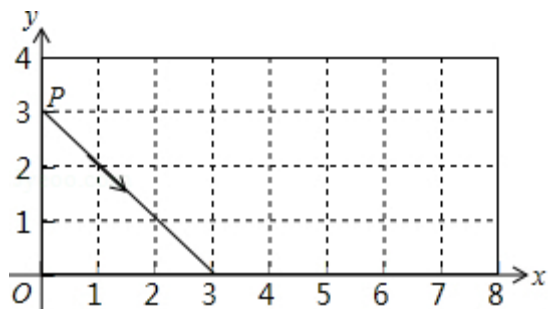
如图，第①个图有 2 个相同的小正方形，第②个图有 6 个相同的小正方形，第③个图有 12 个相同的小正方形， \dots ，按此规律，那么第 15 个图中小正方形的个数是 ()



- A. 225 B. 240 C. 30 D. 255

例3

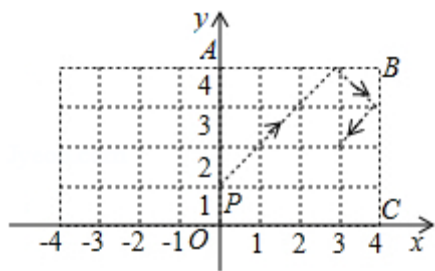
1. 如图，动点 P 从 $(0,3)$ 出发，沿箭头所示方向运动，每当碰到矩形的边时反弹，反弹时反射角等于入射角。当点 P 第 2018 次碰到矩形的边时，点 P 的坐标为()



- A. $(1,4)$ B. $(5,0)$ C. $(7,4)$ D. $(8,3)$

练一练

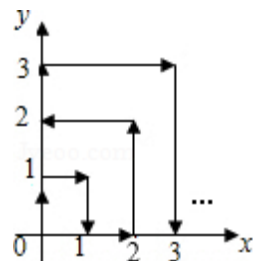
- 如图所示，小球从台球桌面 $ABCO$ 上的点 $P(0,1)$ 出发，撞击桌边发生反弹，反射角等于入射角。若小球以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度沿图中箭头方向运动，则第 50 秒的小球所在位置的坐标为()



- A. $(2,3)$ B. $(3,4)$ C. $(3,2)$ D. $(0,1)$

例4

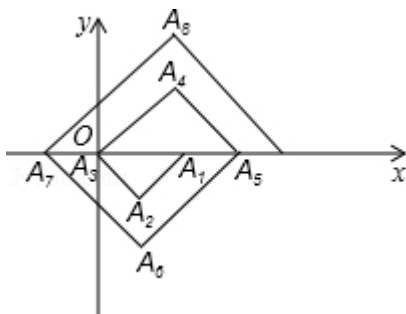
1. 如图, 一个点在第一象限及 x 轴、 y 轴上运动, 且每秒移动一个单位, 在第 1 秒钟, 它从原点运动到 $(0,1)$, 然后接着按图中箭头所示方向运动[即 $(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,0) \rightarrow \dots$], 那么第 35 秒时质点所在位置的坐标是()



- A. $(4,0)$ B. $(0,5)$ C. $(5,0)$ D. $(5,5)$

练一练

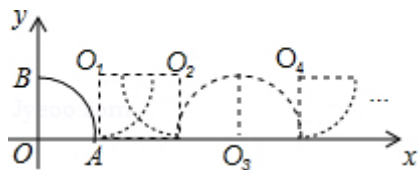
- 如图, 在一单位为 1 的方格纸上, $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_3A_4A_5$, $\triangle A_5A_6A_7 \dots$, 都是斜边在 x 轴上, 斜边长分别为 2, 4, 6, \dots 的等腰直角三角形, 若 $\triangle A_1A_2A_3$ 的顶点坐标分别为 $A_1(2,0)$, $A_2(1,-1)$, $A_3(0,0)$, 则依图中所示规律, A_{2012} 的坐标为()



- A. $(1008,0)$ B. $(1006,0)$ C. $(2,2012)$ D. $(2,1006)$

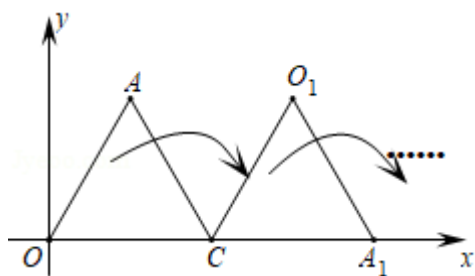
例5

1. 如图, 点 $A(2,0)$, $B(0,2)$, 将扇形 AOB 沿 x 轴正方向做无滑动的滚动, 在滚动过程中点 O 的对应点依次记为点 O_1 , 点 O_2 , 点 $O_3 \dots$, 则 O_{10} 的坐标是()



- A. $(16+4\pi, 0)$ B. $(14+4\pi, 2)$ C. $(14+3\pi, 2)$ D. $(12+3\pi, 0)$

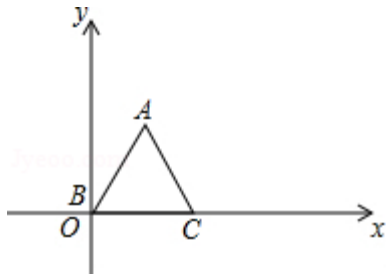
2. 如图, 已知点 A 在第一象限, 点 C 的坐标为 $(1,0)$, $\triangle AOC$ 是等边三角形, 现把 $\triangle AOC$ 按如下规律进行旋转: 第1次旋转, 把 $\triangle AOC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 120° 后得到 $\triangle A_1O_1C$, 点 A_1 、 O_1 分别是点 A 、 O 的对应点, 第2次旋转, 把 $\triangle A_1O_1C$ 绕着点 A_1 按顺时针方向旋转 120° 后得到 $\triangle A_1O_2C_1$, 点 O_2 、 C_1 分别是点 O_1 、 C 的对应点, 依此规律, 第6次旋转, 把 $\triangle A_3O_4C_3$ 绕着点 O_4 按顺时针方向旋转 120° 后得到 $\triangle A_4O_4C_4$, 点 A_4 、 C_4 分别是点 A_3 、 C_3 的对应点, 则点 A_4 的坐标是()



- A. $(\frac{13}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ B. $(6,0)$ C. $(\frac{15}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ D. $(7,0)$

练一练

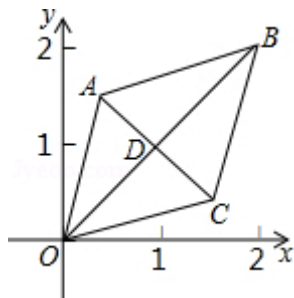
已知等边 $\triangle ABC$ ，顶点 $B(0,0)$ ， $C(2,0)$ ，规定把 $\triangle ABC$ 先沿 x 轴绕着点 C 顺时针旋转，使点 A 落在 x 轴上，称为一次变换，再沿 x 轴绕着点 A 顺时针旋转，使点 B 落在 x 轴上，称为二次变换，...经过连续2018次变换后，顶点 A 的坐标是()



- A. $(4033, \sqrt{3})$ B. $(4033, 0)$ C. $(4036, \sqrt{3})$ D. $(4036, 0)$

例6

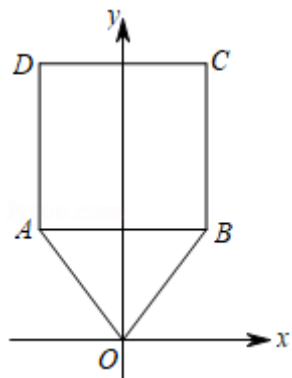
1. 如图，已知菱形 $OABC$ 的顶点 $O(0,0)$ ， $B(2,2)$ ，若菱形绕点 O 逆时针旋转，每秒旋转 45° ，则第60秒时，菱形的对角线交点 D 的坐标为()



- A. $(1, -1)$ B. $(-1, -1)$ C. $(\sqrt{2}, 0)$ D. $(0, -\sqrt{2})$

练一练

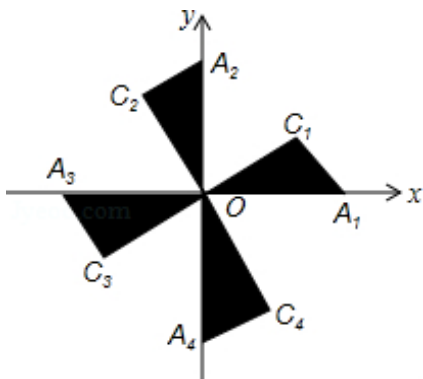
如图, 在 $\triangle OAB$ 中, 顶点 $O(0,0)$, $A(-3,4)$, $B(3,4)$, 将 $\triangle OAB$ 与正方形 $ABCD$ 组成的图形绕点 O 顺时针旋转, 每次旋转 90° , 则第 70 次旋转结束时, 点 D 的坐标为()



- A. (10,3) B. (-3,10) C. (10,-3) D. (3,-10)

例 7

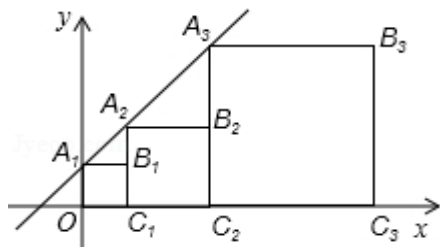
1. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\text{Rt}\triangle OA_1C_1$, $\text{Rt}\triangle OA_2C_2$, $\text{Rt}\triangle OA_3C_3$, $\text{Rt}\triangle OA_4C_4 \dots$ 的斜边都在坐标轴上, $\angle A_1OC_1 = \angle A_2OC_2 = \angle A_3OC_3 = \angle A_4OC_4 = \dots = 30^\circ$. 若点 A_1 的坐标为 $(3,0)$, $OA_1 = OC_2$, $OA_2 = OC_3$, $OA_3 = OC_4 \dots$, 则依此规律, 点 A_{2014} 的纵坐标为()



- A. 0 B. $-3 \times (\frac{3\sqrt{3}}{2})^{2013}$ C. $(2\sqrt{3})^{2014}$ D. $3 \times (\frac{2\sqrt{3}}{3})^{2013}$

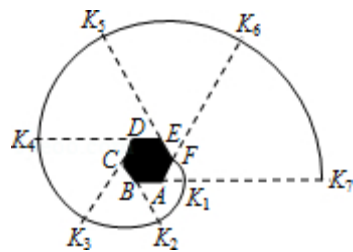
练一练

正方形 $A_1B_1C_1O$, $A_2B_2C_2C_1$, $A_3B_3C_3C_2$, ... 按如图所示的方式放置, 点 A_1, A_2, A_3 和点 C_1, C_2, C_3, \dots 分别在直线 $y=kx+b(k>0)$ 和 x 轴上, 已知点 $B_1(1,1)$, $B_2(3,2)$, 则 B_{2014} 的坐标是_____.



智慧高峰

1. 如图, 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形, 曲线 $FK_1K_2K_3K_4K_5K_6K_7\dots$ 叫做“正六边形的渐开线”, 其中 $FK_1, K_1K_2, K_2K_3, K_3K_4, K_4K_5\dots$ 的圆心依次按点 A, B, C, D, E, F 循环, 分别记为 $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\dots$ 当 $AB=1$ 时, l_{2012} 等于_____.

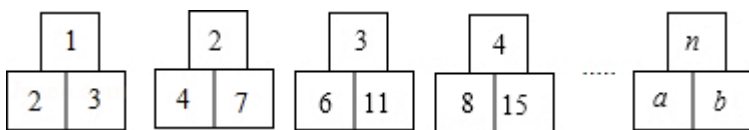


智慧攻略

1. 探究数字方面的规律时，可以从常见的基础数列入手，比如等差，等比，小兔子……
2. 探究“滚动”图形方面的规律时，首先是准确找到周期，再结合余数，准确发现坐标的变化规律
3. 在坐标系背景下的几何图形旋转，准确找到旋转的角度，从而转化为周期问题求解

智慧磨炼

1. 观察下面“品”字形中各数之间的规律，根据观察到的规律得出 $a-b$ 的值为____（用含 n 的代数式表示，并化简）



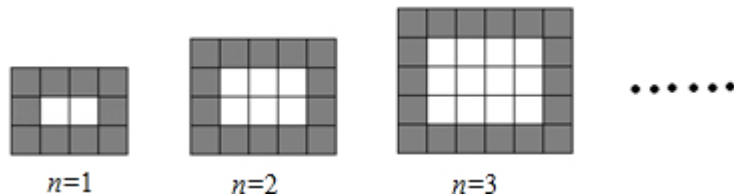
2. 观察下列等式：

第一个等式是 $1+2=3$ ，第二个等式是 $2+3=5$ ，

第三个等式是 $4+5=9$ ，第四个等式是 $8+9=17$ ，

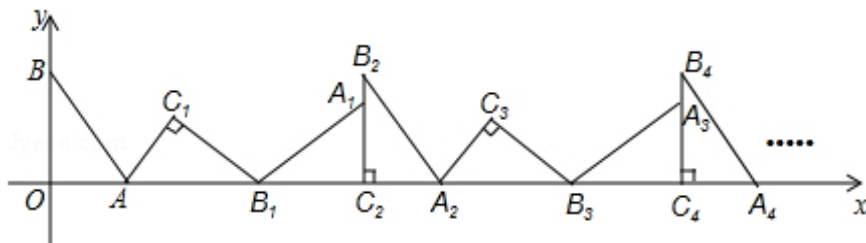
...猜想：第 n 个等式是_____.

3. 如图，用同样规格的黑、白两色正方形瓷砖铺设矩形地面，请观察下列图形，探究在第 n 个图中，黑、白瓷砖分别各有多少块()

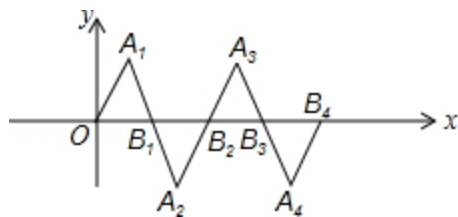


- | | |
|----------------------|----------------------|
| A. $4n+6$ ， $n(n+1)$ | B. $4n+6$ ， $n(n+2)$ |
| C. $n(n+1)$ ， $4n+6$ | D. $n(n+2)$ ， $4n+6$ |

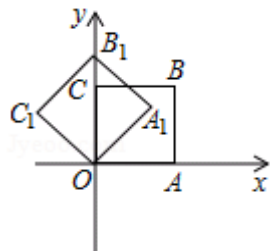
4. 如图在平面直角坐标系中, 将 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转到 $\triangle AB_1C_1$ 的位置, 点 B 、 O 分别落在点 B_1 、 C_1 处, 点 B_1 在 x 轴上, 再将 $\triangle AB_1C_1$ 绕点 B_1 顺时针旋转到 $\triangle A_1B_1C_2$ 的位置, 点 C_2 在 x 轴上, 将 $\triangle A_1B_1C_2$ 绕点 C_2 顺时针旋转到 $\triangle A_2B_2C_2$ 的位置, 点 A_2 在 x 轴上, 依次进行下去... 若点 $A(\frac{3}{2}, 0)$, $B(0, 2)$, 则点 B_{2018} 的坐标为()



- A. (6048, 0) B. (6054, 0) C. (6048, 2) D. (6054, 2)
5. 在如图所示的平面直角坐标系中, $\triangle OA_1B_1$ 是边长为 2 的等边三角形, 作 $\triangle B_2A_2B_1$ 与 $\triangle OA_1B_1$ 关于点 B_1 成中心对称, 再作 $\triangle B_2A_3B_3$ 与 $\triangle B_2A_2B_1$ 关于点 B_2 成中心对称, 如此作下去, 则 $\triangle B_{2n}A_{2n+1}B_{2n+1}$ (n 是正整数) 的顶点 A_{2n+1} 的坐标是()

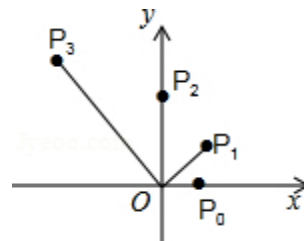


- A. $(4n-1, \sqrt{3})$ B. $(2n-1, \sqrt{3})$ C. $(4n+1, \sqrt{3})$ D. $(2n+1, \sqrt{3})$
6. 如图, 在平面直角坐标系中, 将正方形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转 45° 后得到正方形 $OA_1B_1C_1$, 依此方式, 绕点 O 连续旋转 2019 次得到正方形 $OA_{2019}B_{2019}C_{2019}$, 如果点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 那么点 B_{2019} 的坐标为()



- A. (1, 1) B. $(0, \sqrt{2})$ C. $(-\sqrt{2}, 0)$ D. (-1, 1)

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 P_0 的坐标为 $(1, 0)$, 将线段 OP_0 按逆时针方向旋转 45° , 再将其长度伸长为 OP_0 的 2 倍, 得到线段 OP_1 , 又将线段 OP_1 按逆时针方向旋转 45° , 再将其长度伸长为 OP_1 的 2 倍得到线段 OP_2 , ..., 如此进行下去, 得到线段 OP_3, OP_4, \dots, OP_n (n 为正整数), 则点 P_{2017} 的坐标为 ()



- A. $(2^{2017} \cdot \sqrt{2}, 2^{2017} \cdot \sqrt{2})$ B. $(2^{2015} \cdot \sqrt{2}, -2^{2015} \cdot \sqrt{2})$
 C. $(2^{2016} \cdot \sqrt{2}, 2^{2016} \cdot \sqrt{2})$ D. $(2^{2016}, 0)$