06

第六讲

# 全等三角形的常见辅助线

七年级数学

平行线教育线上课程
2020 年

PARALLEL EDUCATION

数学是一种理性的精神，使人类的思维得以运用到最完善的程度。

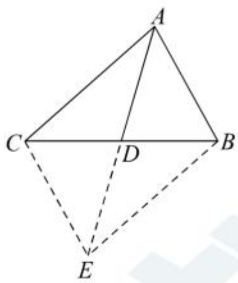
—————— 克莱因

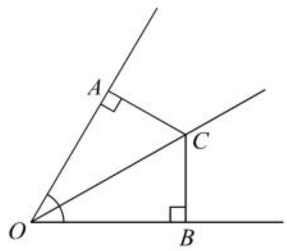
# 第六讲 全等三角形常见辅助线

## 智慧导航

1. 连线法

2. 倍长中线法




3. 利用角平分线性质

4. 截长补短法

截长法：把结论中最大的线段根据已知条件分成两段，使其中一段与较短线段相等，然后证明余下线段与另一条线段相等.

补短法：把两条线段中的一条较短线段补为一条长线段，然后证明这条长线段与最大的线段相等.

5. 作平行线法

6. 旋转法

第6讲

## 智慧基石

例1

1. 如图，$AB$ 与 $CD$ 交于点 $O$，$AB=CD$，$AD=CB$，$OB=5\text{cm}$，求 $OD$ 的长.

解：连接AC，

在△ADC和△CBA中，

$\begin{cases} AC=AC \\ AD=CB \\ DC=BA \end{cases}$

∴△ADC≌△CBA（SSS）

∴∠D=∠B

∴在△ODA和△OBC中，

$\begin{cases} \angle AOD=\angle COB \\ \angle D=\angle B \\ AD=CB \end{cases}$

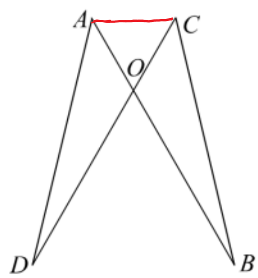
∴△ODA≌△OBC（AAS）

∴OD=OB

∵OB=5cm

∴OD=5cm

∴OD的长为5cm.




练一练

如图，$AB=AD$，$BC=DC$，求证：$\angle B=\angle D$.

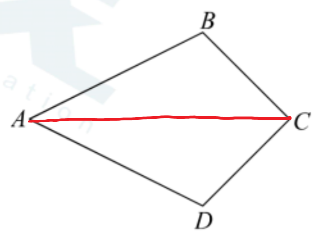
证明：连接AC

在△ACB和△ACD中，

$\begin{cases} AB=AD \\ AC=AC \\ BC=DC \end{cases}$

∴△ACB≌△ACD（SSS）

∴∠B=∠D



例 2

1．如图，已知在$\triangle ABC$中，$AD$是$BC$边上的中线，$E$是$AD$上的一点，延长$BE$交$AC$于点$F$，$AF=EF$，求证：$AC=BE$．

证明：延长AD到点G，使DE=DG 连接CG

∵ AD是BC边上的中线

∴ DB=DC

在△DBE和△DCG中，

$\begin{cases} DB=DC \\ \angle ADB=\angle GDC \\ DE=DG \end{cases}$

∴ △DBE≌△DCG (SAS)

∴ ∠1=∠G，BE=CG

∵ ∠1=∠2

∴ ∠2=∠G

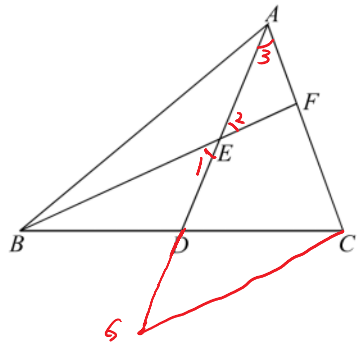
∵ AF=EF

∴ ∠2=∠3

∴ ∠G=∠3

∴ CG=AC

∴ AC=BE




练一练

如图，$\triangle ABC$中，$AD$是$BC$边上的中线，$AB=4$，$AC=6$，则$AD$的取值范围是？

解：延长AD到点E，使AD=DE，连接CE

∵ AD是BC边上的中线

∴ DB=DC

在△DBA和△DCE中，

$\begin{cases} DB=DC \\ \angle ADB=\angle EDC \\ DA=DE \end{cases}$

∴ △DBA≌△DCE (SAS)

∴ AB=CE

∵ AB=4

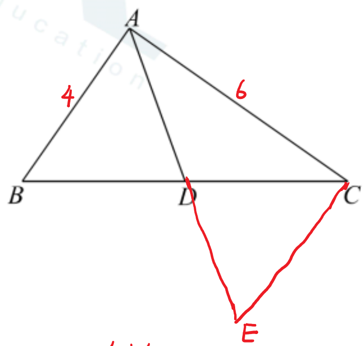
∴ CE=4

在△ACE中，

AC−CE<AE<AC+CE

∴ 6−4<2AD<6+4

∴ 1<AD<5



例 3

1. 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中，$BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线，$AD=CD$，求证：$\angle A+\angle C=180°$.

证明：在BC边上截取BE，使BA=BE，连接DE，

∵ BD是∠ABC的角平分线

∴ ∠ABD = ∠CBD

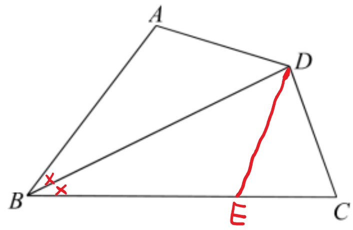
在△ABD和△EBD中，

$\begin{cases} BA=BE \\ \angle ABD=\angle EBD \\ BD=BD \end{cases}$

∴ △ABD ≌ △EBD (SAS)

∴ ∠A = ∠BED，

AD = DE



∵ AD = CD

∴ DE = CE

∴ ∠C = ∠DEC

∵ ∠BED + ∠DEC = 180°

∴ ∠A + ∠C = 180°

练一练

如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，$\triangle ABC$ 的角平分线 $AD$、$CE$ 相交于点 $O$，求证：$OE=OD$.

证明：∵ AD平分∠BAC

∴ $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$

∵ CE 平分∠ACB

∴ $\angle ACE=\angle BCE=\frac{1}{2}\angle ACB$

∵ ∠B = 60°

∴ ∠BAC + ∠ACB = 120°

∴ $\angle OAC+\angle OCA=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ACB=60°$

∴ ∠AOC = 120°

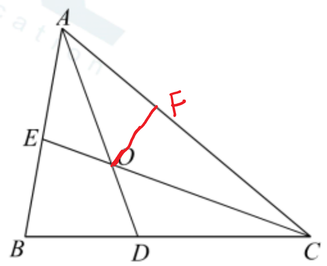
∴ ∠AOE = ∠COD = 60°

在AC上截取AF，使AF = AE，连接OF

在△AOE和△AOF中

$\begin{cases} AE=AF \\ \angle BAD=\angle CAD \\ AO=AO \end{cases}$

∴ △AOE ≌ △AOF (SAS)



∴ OE = OF，∠AOE = ∠AOF = 60°

∴ ∠COF = 60°

∴ ∠COF = ∠COD

在△OCF和△OCD中，

$\begin{cases} \angle COF=\angle COD \\ OC=OC \\ \angle OCF=\angle OCD \end{cases}$

∴ △OCF ≌ △OCD (ASA)

∴ OF = OD

∴ OE = OD

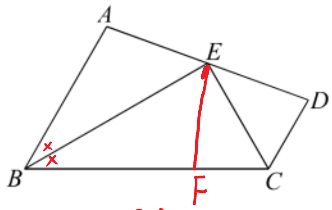
例 4

1. 如图，$AB // CD$，$BE$、$CE$ 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 的角平分线，求证：$BC = AB + CD$.

证明：在 BC 上截取 BF，使 BF = BA，连接 EF

∵ BE、CE 分别是 ∠ABC 和 ∠BCD 的角平分线

∴ ∠ABE = ∠CBE，∠ECD = ∠ECB




在 △BEA 和 △BEF 中，

$\begin{cases} BE = BE \\ \angle EBA = \angle EBC \\ BA = BF \end{cases}$

∴ △BEA ≌ △BEF (SAS)

∴ ∠A = ∠BFE

∵ AB ∥ CD

∴ ∠A + ∠D = 180°

∴ ∠D + ∠BFE = 180°

∵ ∠BFE + ∠EFC = 180°

∴ ∠EFC = ∠D

在 △ECD 和 △ECF 中，

$\begin{cases} \angle EFC = \angle D \\ \angle ECF = \angle ECD \\ CE = CE \end{cases}$

∴ △ECD ≌ △ECF (AAS)

∴ CD = CF

∵ BC = BF + CF

∴ BC = AB + CD .

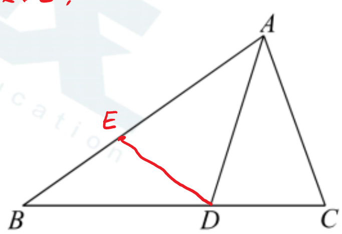
练一练

如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，$AB = AC + CD$，求证：$\angle C = 2\angle B$.

证明：在 AB 上截取 AE，使 AE = AC，连接 DE，

∵ AD 是 ∠BAC 的角平分线

∴ ∠DAB = ∠DAC




在 △ADE 和 △ADC 中，

$\begin{cases} AD = AD \\ \angle DAE = \angle DAC \\ AE = AC \end{cases}$

∴ △ADE ≌ △ADC (SAS)

∴ DC = DE，∠AED = ∠C

∵ AB = AC + CD

AE = AC

∴ CD = BE

∴ DE = BE

∴ ∠B = ∠EDB

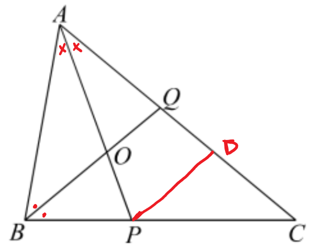
∴ ∠AED = 2∠B

∴ ∠C = 2∠B

第6讲

例5

1. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60^\circ$，$\angle C=40^\circ$，$AP$ 平分 $\angle BAC$ 交 $BC$ 于点 $P$，$BQ$ 平分 $\angle ABC$ 交 $AC$ 于点 $Q$，求证：$AB+BP=BQ+AQ$.




证明：$\because \angle BAC=60^\circ$，$\angle C=40^\circ$

$\therefore \angle ABC=180^\circ-\angle BAC-\angle C=80^\circ$

$\because$ BQ 平分 $\angle ABC$

$\therefore \angle QBC=\frac{1}{2}\angle ABC=40^\circ$

$\therefore \angle QBC=\angle C$

$\therefore QB=QC$

$\therefore BQ+AQ=QC+AQ=AC$

在 AC 上截取 AD，使 $AD=AB$，连接 PD.

$\because$ AP 平分 $\angle BAC$

$\therefore \angle BAP=\angle DAP$

在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle DAP$ 中，

$\begin{cases} BA=DA \\ \angle BAP=\angle DAP \\ AP=AP \end{cases}$

$\therefore \triangle BAP\cong\triangle DAP$ (SAS)

$\therefore PB=PD$，$\angle ABP=\angle ADP$

$\therefore \angle ADP=80^\circ$

$\because \angle C=40^\circ$

$\therefore \angle DPC=40^\circ$

$\therefore \angle DPC=\angle C$

$\therefore DP=DC$

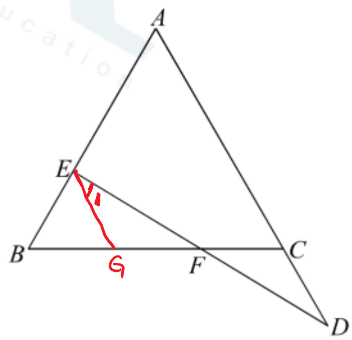
$\therefore BP=DC$

$\therefore AB+BP=AD+DC=AC$

$\therefore AB+BP=BQ+AQ$

练一练

如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$．$E$ 是 $AB$ 上异于 $A$、$B$ 的任意一点，延长 $AC$ 到点 $D$，使 $CD=BE$，连接 $DE$ 交 $BC$ 于点 $F$．求证：$EF=FD$．




证明：过点 E 作 $EG\parallel AC$ 交 BC 于点 G

$\therefore \angle ACB=\angle EGB$

$\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle ACB$

$\therefore \angle B=\angle EGB$

$\therefore EB=EG$

$\because CD=BE$

$\therefore CD=EG$

$\because EG\parallel AC$

$\therefore \angle 1=\angle D$

在 $\triangle FEG$ 和 $\triangle FDC$ 中

$\begin{cases} \angle EFG=\angle DFC \\ \angle 1=\angle D \\ EG=DC \end{cases}$

$\therefore \triangle FEG\cong\triangle FDC$ (AAS)

$\therefore EF=DF$

例 6

1. 设点 $P$ 为等边三角形 $ABC$ 内任意一点，试比较线段 $PA$ 与 $PB+PC$ 的大小.

解：以BP为边作等边三角形BPD，连接CD.

∴ $PB=PD=BD$

∴ $\angle PBD=60^\circ$.

即 $\angle 1+\angle 2=60^\circ$

∵ $\triangle ABC$是等边三角形

∴ $BA=BC$，$\angle ABC=60^\circ$

∴ $\angle 1+\angle 3=60^\circ$

∴ $\angle 2=\angle 3$

在$\triangle BPA$和$\triangle BDC$中，

$\begin{cases} BA=BC \\ \angle 3=\angle 2 \\ BP=BD \end{cases}$

∴ $\triangle BPA\cong\triangle BDC$ (SAS)

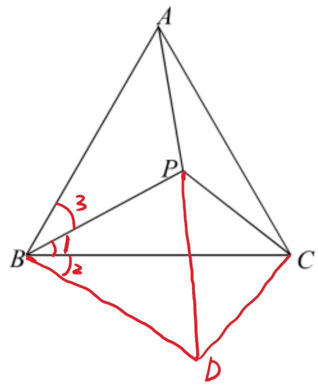
∴ $PA=DC$

在$\triangle CPD$中，

$PC+PD>CD$

∴ $PC+PB>PA$

即 $PB+PC>PA$




练一练

如图，正方形 $ABCD$ 中，$DE=3$，$BF=1$，$\angle EAF=45^\circ$，求 $EF$ 的值.

证明：延长CB到点G，使BG=DE，连接AG

由题意知，$AD=AB$，$\angle BAD=\angle D=\angle ABG=90^\circ$

在$\triangle ADE$和$\triangle ABG$中，

$\begin{cases} AD=AB \\ \angle D=\angle ABG \\ DE=BG \end{cases}$

∴ $\triangle ADE\cong\triangle ABG$ (SAS)

∴ $AE=AG$，$\angle 1=\angle 2$

∵ $\angle EAF=45^\circ$

∴ $\angle 1+\angle 3=45^\circ$

∴ $\angle 2+\angle 3=45^\circ$

即 $\angle GAF=45^\circ$

∴ $\angle GAF=\angle EAF$

在$\triangle AFE$和$\triangle AFG$中，

$\begin{cases} AF=AF \\ \angle GAF=\angle EAF \\ AE=AG \end{cases}$

∴ $\triangle AFE\cong\triangle AFG$ (SAS)

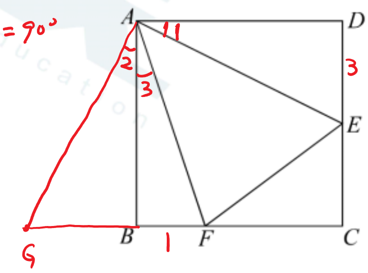
∴ $EF=GF$

∵ $GF=BF+BG=DE+BF$

∴ $EF=DE+BF$

∵ $DE=3$，$BF=1$

∴ $EF=4$



## 智慧高峰

1. 如图，在等边三角形 $ABC$ 中，$AB=10$，动点 $P$ 从点 $A$ 出发向点 $C$ 运动，点 $Q$ 从点 $B$ 出发以相同的速度沿 $CB$ 的延长线运动，连接 $PQ$ 交 $AB$ 与点 $E$，作 $PD\perp AE$ 于点 $D$，试探究线段 $DE$ 的长度是否发生变化，若不发生变化，求出该值，若变化，说明理由.

不变，理由如下：

由题意知，$AP=BQ$

$\angle A=\angle ABC=\angle QBF=60^\circ$

$\angle PDA=\angle QFB=90^\circ$

∴在△QFB和△PDA中，

$\begin{cases}\angle QFB=\angle PDA\\ \angle QBF=\angle A\\ BQ=PA\end{cases}$

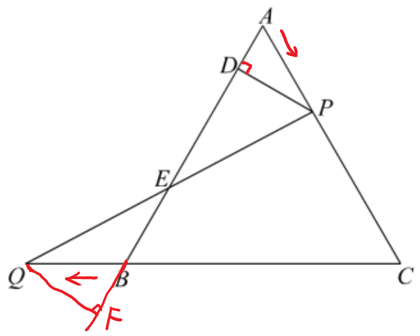
∴$\triangle QFB\cong\triangle PDA$ (AAS)

∴ $BF=DA$，$QF=PD$

在△EDP和△EFQ中，

$\begin{cases}\angle DEP=\angle QEF\\ \angle PDE=\angle EFQ\\ PD=QF\end{cases}$

∴$\triangle EDP\cong\triangle EFQ$ (AAS)




∴ $DE=EF$

∵ $EF=BE+BF=BE+AD$

∴ $DE=BE+AD$

∴ $DE=\frac{1}{2}AB$

∵ $AB=10$

∴ $DE=5$

∴不变

## 智慧攻略

**辅助线的一般使用情形：**

A．连线法（通常在有隐含公共边的情况下使用）

B．倍长中线法（通常在有中点、中线的情况下使用）

C．截长补短法（通常在有线段和差相等的情况下使用）

D．利用角平分线性质（通常在存在角平分线的情况下使用）

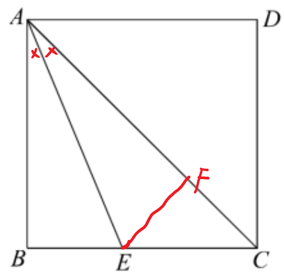
E．做平行线法（通常在缺少关于角度的全等条件时使用）

F．旋转法（通常在出现有一个公共端点的相等线段时使用）

## 智慧磨炼

1. 如图，已知正方形 $ABCD$ 中，$\angle BAC$ 的角平分线交 $BC$ 于点 $E$，求证：$AB+BE=AC$．

证明：在AC上截取AF，使AF=AB，连接EF




$\because$ AE平分$\angle BAC$

$\therefore \angle BAE=\angle CAE$

$\therefore$ 在$\triangle EAB$和$\triangle EAF$中，

$\begin{cases} AE=AE \\ \angle EAB=\angle EAF \\ AB=AF \end{cases}$

$\therefore \triangle EAB\cong\triangle EAF$ (SAS)

$\therefore BE=EF$．$\angle B=\angle AFE=90^\circ$

$\because \angle ACB=45^\circ$

$\therefore \angle CEF=45^\circ$

$\therefore \angle ACB=\angle CEF$

$\therefore CF=EF$

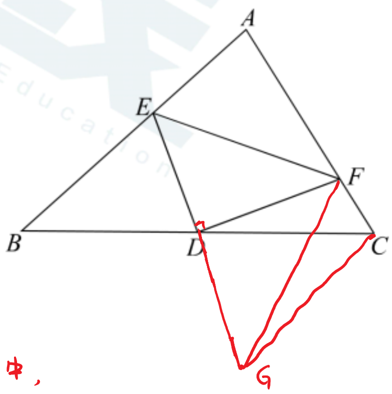
$\therefore CF=BE$

$\because AC=AF+CF$

$\therefore AB+BE=AC$

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$E$、$F$分别在$AB$、$AC$上，$DE\perp DF$，$D$是中点，试比较$BE+CF$与$EF$的大小．

解：延长ED到点G，使DE=DG，连接GF，GC




$\because$ D是中点，

$\therefore DB=DC$

在$\triangle DBE$和$\triangle DCG$中

$\begin{cases} DE=DG \\ \angle BDE=\angle CDG \\ DB=DC \end{cases}$

$\therefore \triangle DBE\cong\triangle DCG$ (SAS)

$\therefore BE=CG$

$\because DE\perp DF$

$\therefore \angle FDE=\angle FDG=90^\circ$

$\therefore$ 在$\triangle FDE$和$\triangle FDG$中

$\begin{cases} FD=FD \\ \angle FDE=\angle FDG \\ DE=DG \end{cases}$

$\therefore \triangle FDE\cong\triangle FDG$ (SAS)

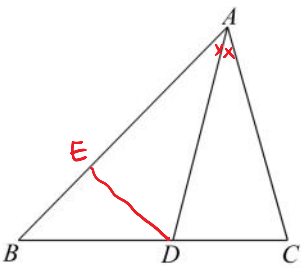
$\therefore EF=FG$

在$\triangle CFG$中，

$CF+CG>GF$

$\therefore CF+BE>EF$

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD$是$\angle BAC$的角平分线，且$AB=AC+CD$，若$\angle BAC=60°$，求$\angle ABC$的大小.




解：在$AB$上截取$AE$，使$AE=AC$，连接$DE$

$\because AD$是$\angle BAC$的角平分线

$\therefore \angle DAE=\angle DAC$

在$\triangle DAE$和$\triangle DAC$中，

$$\begin{cases} AD=AD \\ \angle DAE=\angle DAC \\ AE=AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADC\ (SAS)$

$\therefore CD=DE$，$\angle C=\angle AED$

$\because AB=AC+CD$

$\therefore BE=CD$

$\therefore BE=DE$

$\therefore \angle B=\angle EDB$

$\therefore \angle AED=2\angle B$

$\therefore \angle C=2\angle B$

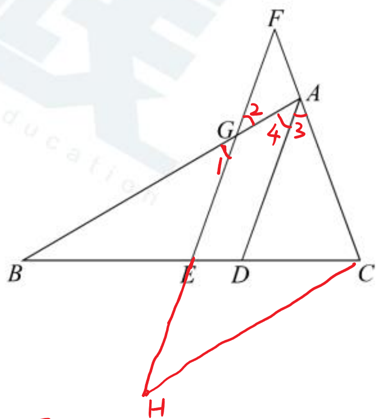
$\because \angle BAC=60°$

$\therefore \angle B+\angle C=120°$

$\therefore \angle B=40°$

$\therefore \angle ABC$的大小为$40°$.

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD$交$BC$于点$D$，点$E$是$BC$中点，$EF/\!/AD$交$CA$的延长线于点$F$，交$AB$于点$G$，若$BG=CF$，求证：$AD$为$\triangle ABC$的角平分线.




证明：延长$GE$到点$H$，使$EH=EG$，连接$CH$.

$\because E$是$BC$中点，

$\therefore BE=CE$

在$\triangle EBG$和$\triangle ECH$中，

$$\begin{cases} EB=EC \\ \angle BEG=\angle CEH \\ EG=EH \end{cases}$$

$\therefore \triangle EBG \cong \triangle ECH\ (SAS)$

$\therefore BG=CH$，$\angle 1=\angle H$

$\because BG=CF$

$\therefore CF=CH$

$\therefore \angle F=\angle H$

$\therefore \angle 1=\angle F$

$\because \angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle 2=\angle F$

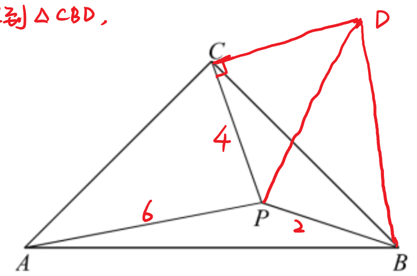
$\because EF/\!/AD$

$\therefore \angle 2=\angle 4$，$\angle 3=\angle F$

$\therefore \angle 3=\angle 4$

$\therefore AD$是$\triangle ABC$的角平分线.

5. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AB=AC$，$P$是$\triangle ABC$内一点，且$PA=6$，$PB=2$，$PC=4$，求$\angle BPC$的度数.




解：将$\triangle CAP$绕点C逆时针旋转$90^\circ$，得到$\triangle CBD$，

连接PD，DB

$\therefore \triangle CAP \cong \triangle CBD$

$\therefore PC=PD$，$PA=BD$

$\therefore \triangle PCD$是等腰直角三角形

$\therefore \angle CPD=45^\circ$

在$Rt\triangle PCD$中，$PD^2=PC^2+CD^2=32$

在$\triangle PDB$中，$BD^2=PD^2+PB^2=36$

$\therefore \triangle BPD$是直角三角形

$\therefore \angle BPD=90^\circ$

$\therefore \angle BPC=\angle BPD+\angle CPD=135^\circ$

$\therefore \angle BPC$的度数为$135^\circ$