06

第六讲

中考类比探究之直角结构

九年级数学

平行线教育线上课程

2020 年

PARALLEL EDUCATION

新的数学方法和概念，

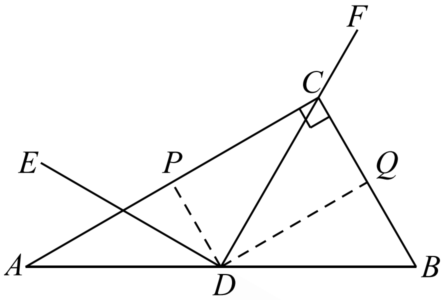
常常比解决数学问题本身更重要。

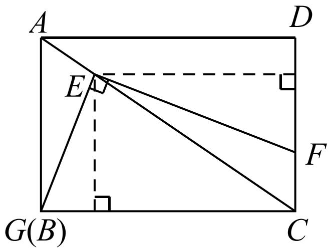
——————— 华罗庚

第六讲 中考类比探究之直角结构

智慧导航

斜直角结构





智慧基石

例 1

1.（1）问题发现

如图 1，在 Rt△ABC 中，∠BAC=90°，AB=2，AC=4，点 D 为 BC 的中点，过点 D 作射线 $DE\perp DF$，分别交 AB、AC 于点 E，F，当 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$ 时，$\frac{DE}{DF}$ =__2__.

（2）类比探究

若∠EDF 绕着点 D 旋转到图 2 的位置，（1）中其他条件不变．$\frac{DE}{DF}$ =__2__；若改变点 D 的位置，当 $\frac{CD}{BD}=\frac{a}{b}$ 时，求 $\frac{DE}{DF}$ 的值，请就图 3 的情形写出解答过程；$\frac{DE}{DF}=\frac{2b}{a}$

（3）问题解决

如图 3，AB=2，AC=4，连接 EF，当 CD=__$\frac{4\sqrt{5}}{3}$__时．△DEF 为等腰直角三角形；当 CD=__$\frac{8\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sqrt{5}$__时，△DEF 与△ABC 相似．

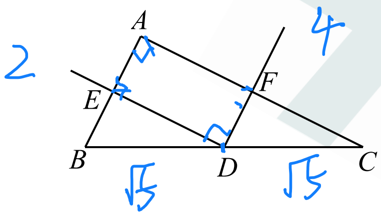


图1

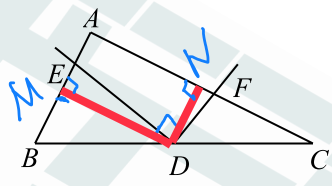


图2

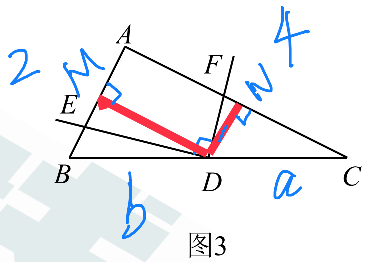


图3

(2) 如图3，作DM⊥AB于M，DN⊥AC于N.

∴ △DME ∽ △DNF

∴ $\frac{DE}{DF}=\frac{DM}{DN}$

又 $\frac{DM}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{b}{a+b}$

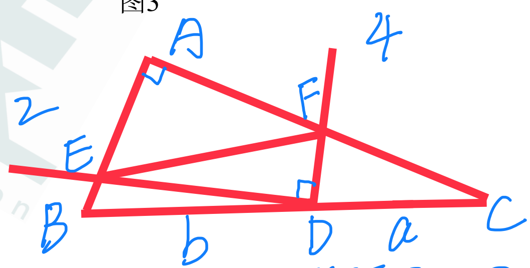
$\frac{DN}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{a}{a+b}$

∴ $DM=\frac{b}{a+b}\cdot AC=\frac{4b}{a+b}$

$DN=\frac{a}{a+b}\cdot AB=\frac{2a}{a+b}$

∴ $\frac{DM}{DN}=\frac{4b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2a}=\frac{2b}{a}$

∴ $\frac{DE}{DF}=\frac{2b}{a}$



① (3) 如图，当△DEF为等腰直角△时，

$\frac{DE}{DF}=1$，令CD=a，BD=b

由(2)得 $\frac{DE}{DF}=\frac{2b}{a}$

∴ $\frac{2b}{a}=1$　∴ $b=\frac{a}{2}$

∴ $BC=a+b=\frac{3a}{2}$

∵ AB=2，AC=4，∴ $BC=2\sqrt{5}$

∴ $\frac{3a}{2}=2\sqrt{5}$，∴ $a=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

∴ $CD=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

(3) 当$\triangle DEF$与$\triangle ABC$相似时. 设 $CD=a$, $BD=b$

① $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$

$\frac{DE}{DF}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

又$\frac{DE}{DF}=\frac{2b}{a}$ $\therefore \frac{2b}{a}=\frac{1}{2}$

$\therefore b=\frac{a}{4}$ $\therefore BC=\frac{5a}{4}$

$\therefore \frac{5a}{4}=2\sqrt{5}$, $\therefore a=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

$\therefore CD=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

② $\triangle DEF \backsim \triangle ACB$

$\frac{DE}{DF}=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{2}=2$

$\therefore \frac{2b}{a}=2$

$\therefore a=b$ $\therefore BC=2a$

$\therefore 2a=2\sqrt{5}$, $\therefore a=\sqrt{5}$

$\therefore CD=\sqrt{5}$

综上 $CD=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sqrt{5}$

例 2

1. 如图所示，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90^\circ$，BF 为斜边上的高，在射线 AB 上有点 D，连接 DF，作 $\angle DFE=90^\circ$，FE 交射线 BC 于点 E.

【问题发现】如图 1 所示，如果 AB＝CB，则 DF 与 EF 的数量关系为 DF ___=___ EF（选填＞，＜，＝）

$\triangle DBF \cong \triangle ECF$ (ASA)

【类比探究】如图 2 所示，如果改变 Rt△ABC 中两直角边的比例，使得 AB＝2BC，则 DF 与 EF 还存在①中的关系吗？不存在. $\frac{DF}{EF}=2$

$\because \angle DBE=\angle DFE=90^\circ$

$\therefore D, B, E, F$ 四点共圆

$\therefore \frac{DF}{EF}=\tan\angle DEF=\tan\angle DBF=\tan\angle C=2$

$\therefore \frac{DF}{EF}=2$

【拓展延伸】如图 3 所示，在 Rt△ABC 中，如果已知 $BC=\sqrt{3}$，$AB=3$，$EF=\sqrt{2}$，试求 BD 的长.

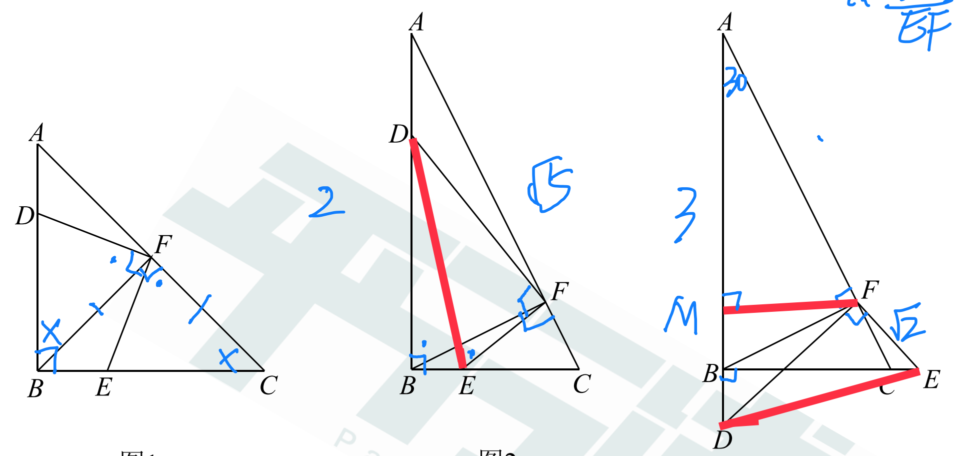


图1　　图2　　图3

拓展延伸. 连 DE.

$\because \angle DBE=\angle DFE=90^\circ$. $\therefore B, D, E, F$ 四点共圆，$\therefore \angle FDE=\angle FBE$

$\because BC=\sqrt{3}$, $AB=3$ $\therefore \angle A=30^\circ$，又 BF 是高. $\therefore \angle FBE=30^\circ$

$\therefore \frac{EF}{DF}=\tan\angle FDE=\tan\angle FBE=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore DF=\sqrt{6}$　作 $MF\perp AB$ 于 M. $\because AF=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore MF=\frac{3\sqrt{3}}{4}$　在 Rt△DMF 中 $DM=\sqrt{6-\frac{27}{16}}=\frac{\sqrt{69}}{4}$

又 $AM=\frac{9}{4}$，$\therefore AD=AM+MD=\frac{9}{4}+\frac{\sqrt{69}}{4}=\frac{9+\sqrt{69}}{4}$

$\therefore BD=AD-AB=\frac{9+\sqrt{69}}{4}-3=\frac{\sqrt{69}-3}{4}$

例 3

1. 操作发现：

（1）如图 1，将直角三角板的直角顶点放在正方形 $ABCD$ 上，使直角顶点 E 与正方形 $ABCD$ 的顶点 D 重合，直角的一边交 CB 于点 F，将另一边交 BA 的延长线于点 G．请你直接回答 EF 和 EG 的数量关系；$EF=EG$. $\triangle DGA\cong\triangle DFC$.

类比探究

（2）如图 2，当三角板的直角顶点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上运动时，其余条件不变，（1）中的结论还成立吗？并说明理由；

拓展延伸

（3）如图 3，将“正方形 $ABCD$”改成“矩形 $ABCD$”，当直角顶点移动到图中所示位置时，若 $AD=2$，$DC=3$，求 $\dfrac{EF}{EG}$ 的值．

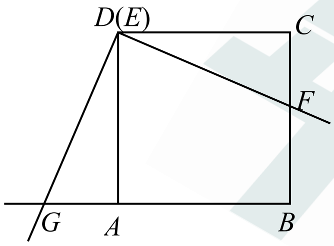


图1

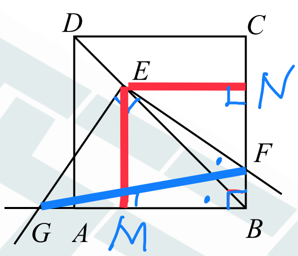


图2

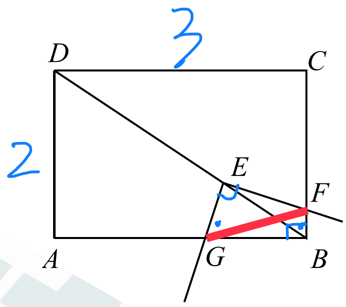


图3

法一：

(2) 成立. 作 $EM\perp AB$ 于 M. $EN\perp BC$ 于 N

$\therefore EM=EN$. 又 $\angle GEM=\angle FEN$

$\angle EMG=\angle ENF=90°$

$\therefore \triangle EGM\cong\triangle EFN$ (ASA)

$\therefore EG=EF$

或法二：四点共圆

连 GF $\because \angle GEF=\angle GBF=90°$

$\therefore E、G、B、F$ 四点共圆.

$\therefore \dfrac{GE}{EF}=\tan\angle EFG=\tan\angle EBG$

$=\tan 45°=1$

$\therefore EG=EF$

(3) 同上. 斜转直或四点共圆,

以四点共圆为例.

连 GF. $\because \angle GEF=\angle GBF=90°$

$\therefore G、E、F、B$ 四点共圆

$\therefore \angle EGF=\angle EBF$

$\therefore \dfrac{EF}{EG}=\tan\angle EGF$

$=\tan\angle EBF$

$=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{3}{2}$

综上. $\dfrac{EF}{EG}=\dfrac{3}{2}$

例 4

1. 如图 1，$AO \perp BO$ 且 $AO = BO$，由点 A 和点 B 向过 O 点的直线作垂线，可以构成如图两个全等三角形；当这条直线绕点 O 旋转到直角内部时，仍然能构造出全等三角形！相信同学们认识了这个“模型”的特点后，一定能解决下面的问题：

（1）如图 3，$AD \perp CD$，$AD \perp AB$，若 $AB = 4$，$CD = 6$，$BC = BE$（可以借助图中的辅助线，也可以根据自己所悟，另外画辅助线），你得到阴影部分的面积是__4__.

（2）如图 4，点 D 是 Rt△ABC 的平分线上任一点，连结 DA，作 $DE \perp DA$ 交另一边 BC 于点 E，若 DB 长是 $4\sqrt{2}$，$AD = DE$，则四边形 $ABED$ 的面积值是__16__.

（3）如图 5，点 B 是两个等腰直角三角形的公共顶点，连结 DC 和 AF，若 $BE \perp CD$ 交 CD 于 E 点，延长 EB 交 AF 于 G 点，试证明 $AG = GF$.

(3) 证明：如图，作 $AM \perp EG$ 于 M，$FN \perp EG$ 于 N
则 $\triangle CEB \cong \triangle BMA$
$\therefore EB = MA$
同理 $\triangle DEB \cong \triangle BNF$
$\therefore EB = NF$
$\therefore MA = NF$
$\therefore \triangle AMG \cong \triangle FNG$ (AAS)
$\therefore AG = GF$

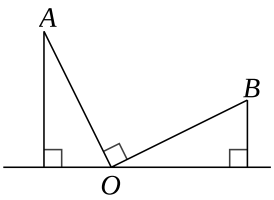


图1

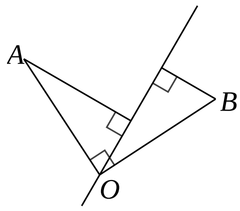


图2

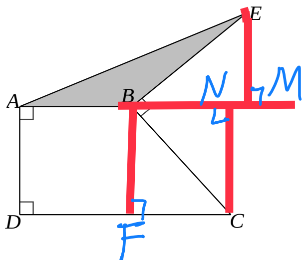


图3

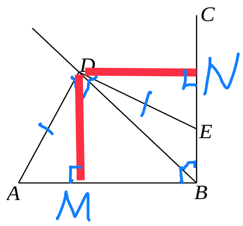


图4

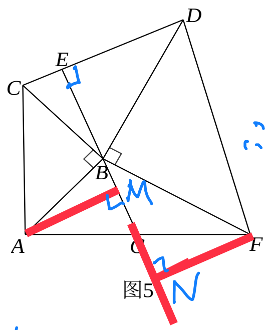


图5

(1) 如图，$CF = 6 - 4 = 2$
$\therefore BN = CF = 2$
又 $\triangle BME \cong \triangle CNB$
$\therefore EM = BN = 2$
$\therefore S_{阴} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

(2) $\triangle DAM \cong \triangle DEN$
$\therefore S_{ABED} = S_{正DMBN}$
$\because DB = 4\sqrt{2}$
$\therefore S_{正} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$
$= 16$
$\therefore S_{ABED} = 16$

智慧高峰

1. （1）如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=5$，$\angle MPN=90^\circ$，且$\angle MPN$ 的直角顶点在 BC 边上，$BP=1$．

①特殊情形：若 MP 过点 A，NP 过点 D，则 $\frac{PA}{PD}=$ $\underline{\frac{1}{2}}$．

②类比探究：如图 2，将$\angle MPN$ 绕点 P 按逆时针方向旋转，使 PM 交 AB 边于点 E，PN 交 AD 边于点 F，当点 E 与点 B 重合时，停止旋转．在旋转过程中，$\frac{PE}{PF}$ 的值是否为定值？若是，请求出该定值；若不是，请说明理由． 是定值. $\frac{PE}{PF}=\frac{1}{2}$

（2）拓展探究：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=BC=2$，$AD\perp AB$，$\odot A$ 的半径为 1，点 E 是$\odot A$ 上一动点，$CF\perp CE$ 交 AD 于点 F．请直接写出当$\triangle AEB$ 为直角三角形时 $\frac{EC}{FC}$ 的值．

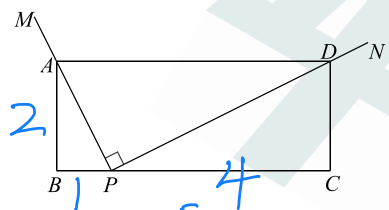


图1

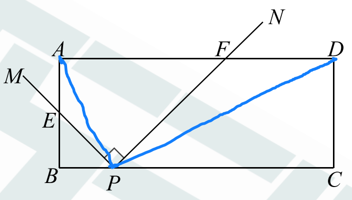


图2

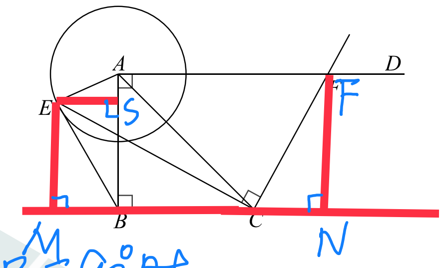


图3

法一：

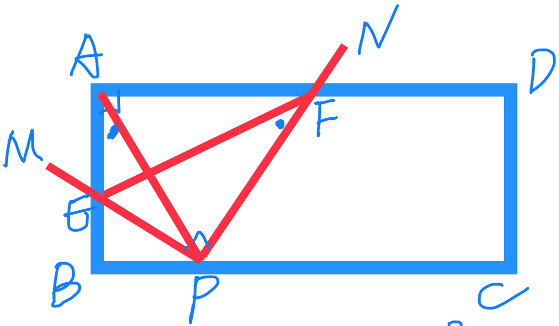
(1)②连PA和PD，则由①得，

$\angle APD=90^\circ$，

$\therefore \triangle AEP\backsim\triangle DFP$

$\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PD}=\frac{AB}{PC}=\frac{1}{2}$

法二：四点共圆



$\angle EAF=\angle EPF=90^\circ$

$\therefore$ A、E、P、F 四点共圆

$\therefore \frac{PE}{PF}=\tan\angle EFP=\tan\angle EAP$

$=\frac{BP}{AB}=\frac{1}{2}$

① $\angle AEB=90^\circ$时，

(2) 当E在AB左侧时，如图，

$\because AE=1$，$AB=2$ $\therefore \angle ABE=30^\circ$

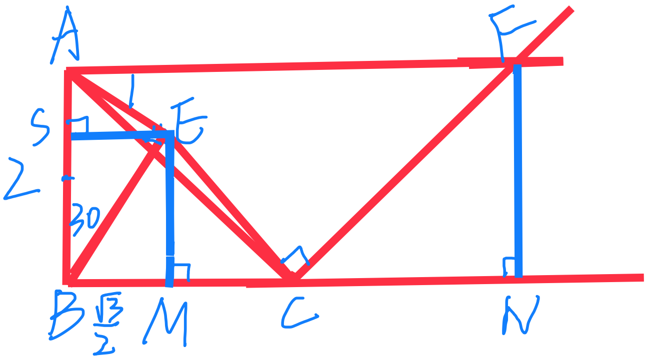
$\therefore EM=\frac{1}{2}$，$MB=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore MC=\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\frac{4+\sqrt{3}}{2}$

又$\triangle EMC\backsim\triangle CNF$

$\therefore \frac{EC}{FC}=\frac{MC}{NF}=\frac{\frac{4+\sqrt{3}}{2}}{2}$

$=\frac{4+\sqrt{3}}{4}$



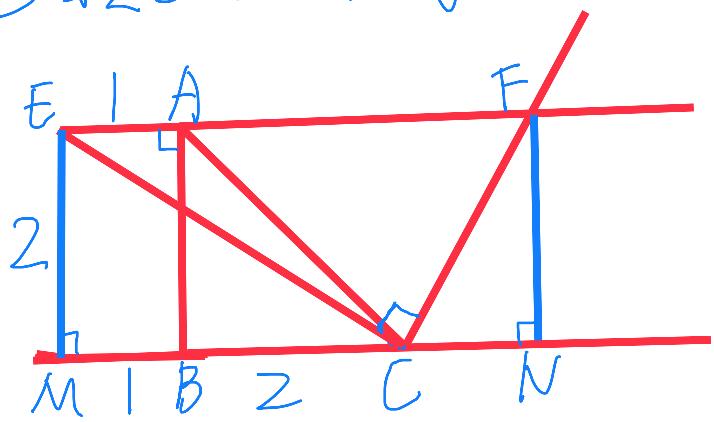
当E在AB右侧时 如图.

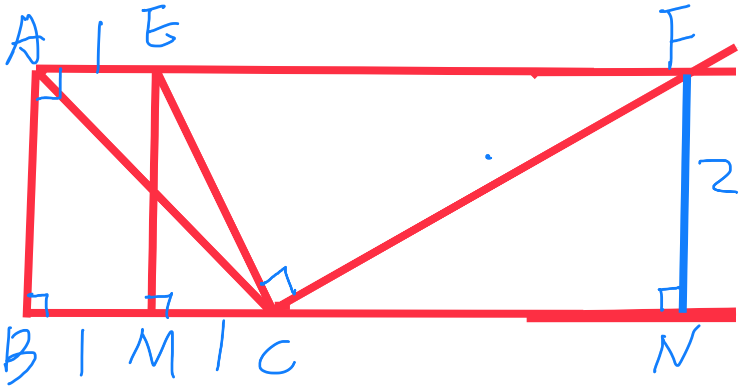
$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore MC=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

$\triangle EMC \sim \triangle CNF$

$\therefore \frac{EC}{CF}=\frac{MC}{NF}=\frac{\frac{4-\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{4}$

② 当$\angle EAB=90^\circ$时. 如图





$\triangle EMC \sim \triangle CNF$

$\therefore \frac{EC}{CF}=\frac{MC}{NF}=\frac{3}{2}$

$\triangle EMC \sim \triangle CNF$

$\therefore \frac{EC}{CF}=\frac{MC}{NF}=\frac{1}{2}$

综上. $\frac{EC}{CF}=\frac{4+\sqrt{3}}{4}$ 或 $\frac{4-\sqrt{3}}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$

智慧攻略

看到斜直角，构造一线三等角

智慧磨炼

1. 情景观察

将矩形 $ABCD$ 纸片沿对角线 AC 剪开，得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'C'D$，如图1所示，将 $\triangle A'C'D$ 的顶点 A' 与点 A 重合，并绕点 A 按逆时针方向旋转，使点 D、$A\left(A'\right)$、B 在同一条直线上，如图2所示，观察图2可知，与 BC 相等的线段是__DA__，$\angle CAC'=$__90°__.

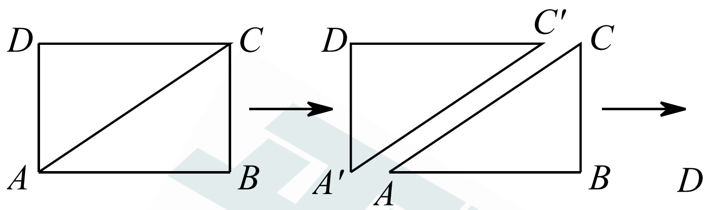


图 1

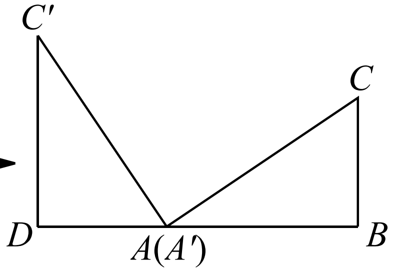


图 2

拓展探究

（1）如图3，在 $\triangle ABC$ 中，$AG\perp BC$ 与点 G，以 A 为直角顶点，分别以 AB、AC 为直角边向 $\triangle ABC$ 外做等腰 Rt$\triangle ABE$ 和等腰 Rt$\triangle ACF$，过点 E、F 作射线 GA 的垂线，垂足分别为 P、Q，试探究 EP 与 FQ 之间的数量关系，并证明你的结论.　　EP=FQ

（2）如图4，在 $\triangle ABC$ 中，$AG\perp BC$ 于点 G，分别以 AB、AC 为一边向 $\triangle ABC$ 外作矩形 $ABME$ 和矩形 $ACNF$，射线 GA 交 EP 于点 H，若 $AB=kAE$，$AC=kAF$，试探究 HE 与 HF 之间的数量关系，并说明理由.

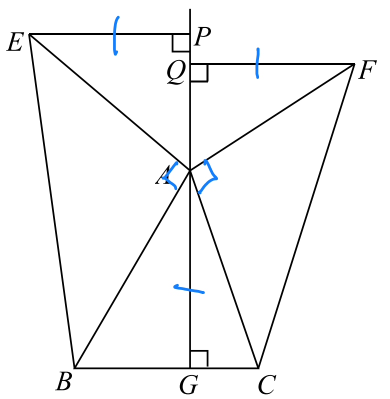


图3

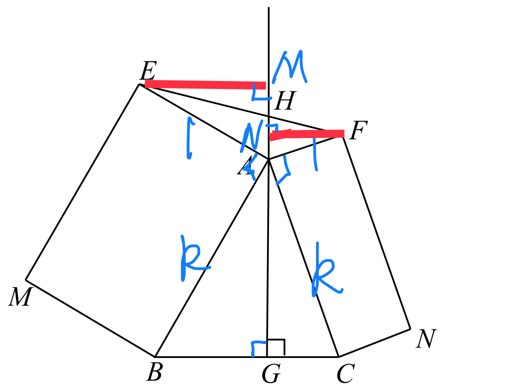


图4

证明：(1) $\triangle EPA \cong \triangle AGB$ $\therefore EP = AG$

同理 $\triangle FQA \cong \triangle AGC$. $\therefore FQ = AG$

$\therefore EP = FQ$

(2) 作 $EM \perp GH$ 于 M. $FN \perp GH$ 于 N.

则 $\triangle EMA \sim \triangle AGB$ $\therefore \frac{EM}{AG} = \frac{EA}{AB} = \frac{1}{k}$

同理 $\triangle FNA \sim \triangle AGC$ $\therefore \frac{FN}{AG} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{k}$

$\therefore \frac{EM}{AG} = \frac{FN}{AG}$ $\therefore EM = FN$

$\therefore \triangle EMH \cong \triangle FNH$ (AAS)

$\therefore HE = HF$