第五讲 中考类比探究之旋转结构参考答案

例 1

1．已知：ΔABC，ΔDEF 都是等边三角形，M 是 BC 与 EF 的中点，连接 AD，BE．

（1）如图 1，当 EF 与 BC 在同一条直线上时，直接写出 AD 与 BE 的数量关系和位置关系；

（2）ΔABC 固定不动，将图 1 中的 ΔDEF 绕点 M 顺时针旋转 $\alpha(0°\leqslant\alpha\leqslant90°)$ 角，如图 2，判断（1）中的结论是否仍然成立，若成立，请加以证明；若不成立，说明理由；

（3）ΔABC 固定不动，将图 1 中的 ΔDEF 绕点 M 旋转 $\alpha(0°\leqslant\alpha\leqslant90°)$ 角，作 $DH\perp BC$ 于点 H．设 $BH=x$，线段 AB，BE，ED，DA 所围成的图形面积为 S．当 $AB=6$，$DE=2$ 时，求 S 关于 x 的函数关系式，并写出相应的 x 的取值范围．

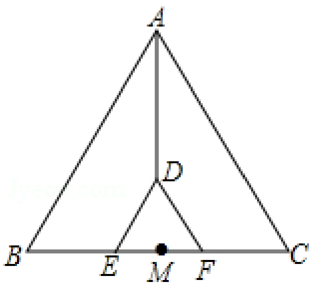


图1

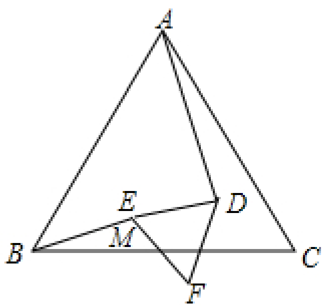
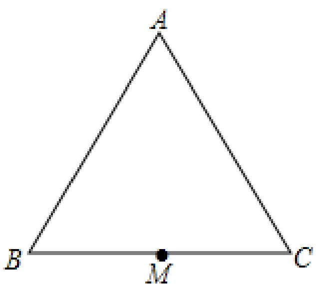


图2



【解答】解：（1）作 $DG\perp AB$ 于点 G，作 $EH\perp AB$ 于点 H．则四边形 $DGHE$ 是矩形（如 图1），

设 $DG=HE=x$，在直角 ΔADG 中，$AD=\dfrac{DG}{\sin30°}=2x$，

在直角 ΔBEH 中，$BE=\dfrac{HE}{\sin60°}=\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$，则 $\dfrac{AD}{BE}=\sqrt{3}$．

连接 AM、DM，则 $AM\perp BC$ 于点 M，同理 $DM\perp BC$ 于点 M．

则 AM 和 DM 重合，则 $AD\perp BE$；

（2） 证明： 连接 DM， AM．

在等边三角形 ABC 中， M 为 BC 的中点，

$\therefore AM\perp BC$， $\angle BAM=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$， $\frac{AM}{BM}=\sqrt{3}$．

$\therefore \angle BME+\angle EMA=90^\circ$．

同理， $\frac{DM}{EM}=\sqrt{3}$， $\angle AMD+\angle EMA=90^\circ$．

$\therefore \frac{AM}{BM}=\frac{DM}{EM}$， $\angle AMD=\angle BME$． $\therefore \Delta ADM\backsim\Delta BEM$． $\therefore \frac{AD}{BE}=\frac{DM}{EM}=\sqrt{3}$．

延长 BE 交 AM 于点 G，交 AD 于点 K，过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H．

$\therefore \angle MAD=\angle MBE$， $\angle BGM=\angle AGK$． $\therefore \angle GKA=\angle AMB=90^\circ$．

$\therefore AD\perp BE$．

（3） 解： （ⅰ） 当 ΔDEF 绕点 M 顺时针旋转 $\alpha(0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ)$ 角时， （如 图2），

$\because \Delta ADM\backsim\Delta BEM$， $\therefore \frac{S_{\Delta ADM}}{S_{\Delta BEM}}=(\frac{AD}{BE})^2=3$． $\therefore S_{\Delta BEM}=\frac{1}{3}S_{\Delta ADM}$

$\therefore S=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ADM}-S_{\Delta BEM}-S_{\Delta DEM}$

$=S_{\Delta ABM}+\frac{2}{3}S_{\Delta ADM}-S_{\Delta DEM}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}(x-3)-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$．

$\therefore s=\sqrt{3}x+\sqrt{3}\ (3\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{3})$．

（ⅱ）当 ΔDEF 绕点 M 逆时针旋转 $\alpha(0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ)$ 角时（如 图3），同理 $\Delta ADM\backsim\Delta BEM$，

$\therefore \frac{S_{\Delta BEM}}{S_{\Delta ADM}}=(\frac{BM}{AM})^2=\frac{1}{3}$． $\therefore S_{\Delta BEM}=\frac{1}{3}S_{\Delta ADM}$．

$\therefore s=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta BEM}-S_{\Delta ADM}-S_{\Delta DEM}$

$=S_{\Delta ABM}-\frac{2}{3}S_{\Delta ADM}-S_{\Delta DEM}$

$=\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}(3-x)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

$\therefore s=\sqrt{3}x+\sqrt{3}(3-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3)$.

综上， $s=\sqrt{3}x+\sqrt{3}(3-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{3})$.

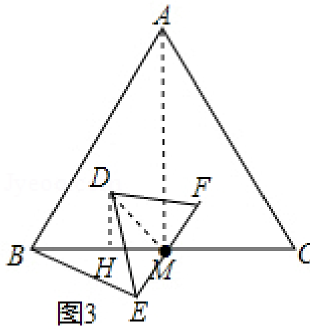


图3

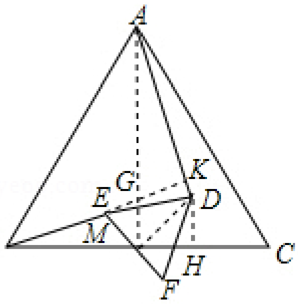


图2

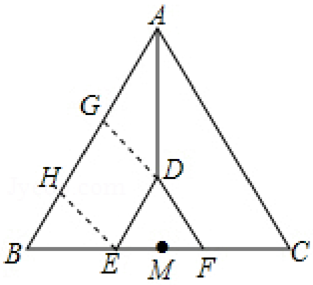


图1

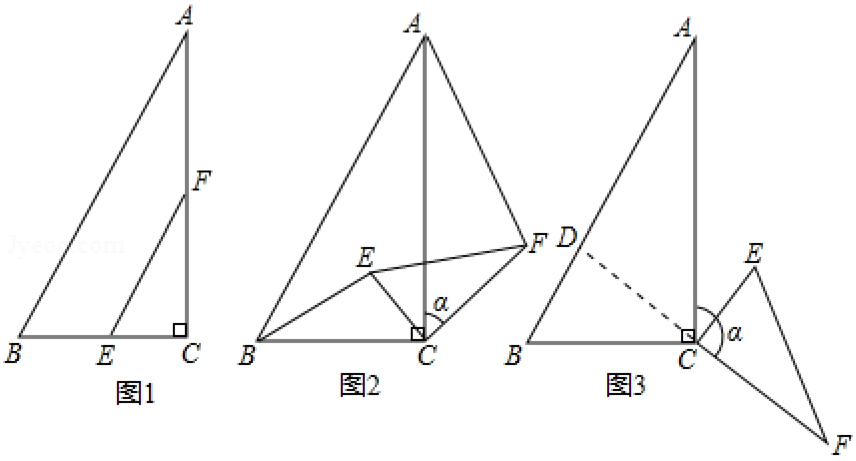
例 2

1．如图 1，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$ ， $BC=2$ ， $\angle A=30°$ ，点 E ， F 分别是线段 BC ， AC 的中点，连结 EF .

（1）线段 BE 与 AF 的位置关系是__互相垂直__， $\frac{AF}{BE}=$______.

（2）如图 2，当 ΔCEF 绕点 C 顺时针旋转 a 时 $(0°<a<180°)$ ，连结 AF ， BE ，（1）中的结论是否仍然成立．如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由.

（3）如图 3，当 ΔCEF 绕点 C 顺时针旋转 a 时 $(0°<a<180°)$ ，延长 FC 交 AB 于点 D ，如果 $AD=6-2\sqrt{3}$ ，求旋转角 a 的度数.



【解答】解：（1）如图 1，线段 BE 与 AF 的位置关系是互相垂直；

$\because \angle ACB=90^{\circ}$，$BC=2$，$\angle A=30^{\circ}$，$\therefore AC=2\sqrt{3}$，

$\because$ 点 E，F 分别是线段 BC，AC 的中点，$\therefore \dfrac{AF}{BE}=\sqrt{3}$；

故答案为：互相垂直；$\sqrt{3}$；

（2）（1）中结论仍然成立.

证明：如图 2，$\because$ 点 E，F 分别是线段 BC，AC 的中点，

$\therefore EC=\dfrac{1}{2}BC$，$FC=\dfrac{1}{2}AC$，$\therefore \dfrac{EC}{BC}=\dfrac{FC}{AC}=\dfrac{1}{2}$，

$\because \angle BCE=\angle ACF=\alpha$，$\therefore \Delta BEC\backsim\Delta AFC$，$\therefore \dfrac{AF}{BE}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{\tan 30^{\circ}}=\sqrt{3}$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，

延长 BE 交 AC 于点 O，交 AF 于点 M

$\because \angle BOC=\angle AOM$，$\angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle BCO=\angle AMO=90^{\circ}$，$\therefore BE\perp AF$；

（3）如图 3，$\because \angle ACB=90^{\circ}$，$BC=2$，$\angle A=30^{\circ}$

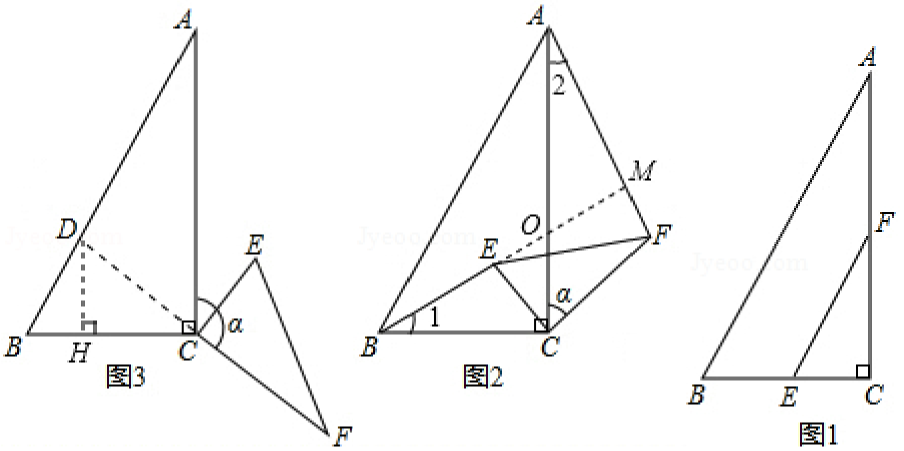
$\therefore AB=4$，$\angle B=60^{\circ}$

过点 D 作 $DH\perp BC$ 于 H

$\therefore DB=4-(6-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}-2$，$\therefore BH=\sqrt{3}-1$，$DH=3-\sqrt{3}$，

又 $\because CH=2-(\sqrt{3}-1)=3-\sqrt{3}$，$\therefore CH=DH$，$\therefore \angle HCD=45^{\circ}$，$\therefore \angle DCA=45^{\circ}$，

$\therefore \alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



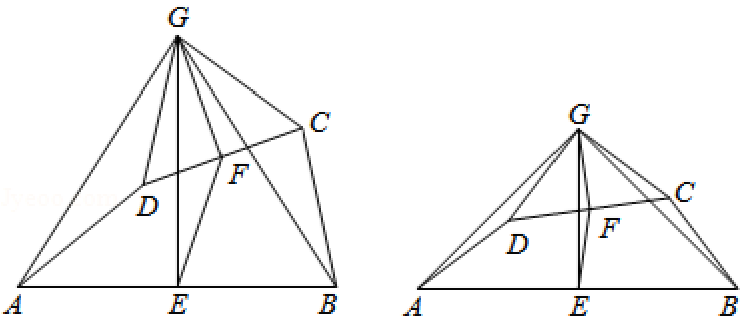
例 3

1．如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别是 AB、CD 的中点，过点 E 作 AB 的垂线，过点 F 作 CD 的垂线，两垂线交于点 G，连接 AG、BG、CG、DG，且 $\angle AGD = \angle BGC$．

（1）求证：$AD = BC$；

（2）求证：$\Delta AGD \backsim \Delta EGF$；

（3）如图 2，若 AD、BC 所在直线互相垂直，求 $\dfrac{AD}{EF}$ 的值．



【解答】（1）证明：$\because GE$ 是 AB 的垂直平分线，

$\therefore GA = GB$，同理：$GD = GC$，

在 ΔAGD 和 ΔBGC 中，

$\begin{cases} GA = GB \\ \angle AGD = \angle BGC \\ GD = GC \end{cases}$，

$\therefore \Delta AGD \cong \Delta BGC(SAS)$，

$\therefore AD = BC$；

（2）证明：$\because \angle AGD = \angle BGC$，$\therefore \angle AGB = \angle DGC$，

在ΔAGB和ΔDGC中，$\dfrac{GA}{GD} = \dfrac{GB}{GC}$，$\therefore \Delta AGB \backsim \Delta DGC$，$\therefore \dfrac{EG}{FG} = \dfrac{GA}{GD}$，

又$\because \angle AGE = \angle DGF$，$\therefore \angle AGD = \angle EGF$，$\therefore \Delta AGD \backsim \Delta EGF$；

（3）解：延长AD交GB于点M，交BC的延长线于点H，如图所示：

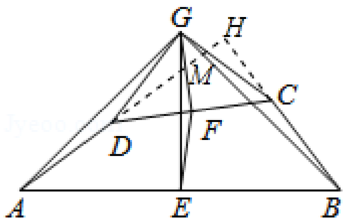
则$AH \perp BH$，

$\because \Delta AGD \cong \Delta BGC$，$\therefore \angle GAD = \angle GBC$，

在ΔGAM和ΔHBM中，$\angle GAD = \angle GBC$，$\angle GMA = \angle HMB$，

$\therefore \angle AGB = \angle AHB = 90^\circ$，$\therefore \angle AGE = \dfrac{1}{2}\angle AGB = 45^\circ$，$\therefore \dfrac{AG}{EG} = \sqrt{2}$，

又$\because \Delta AGD \backsim \Delta EGF$，$\therefore \dfrac{AD}{EF} = \dfrac{AG}{EG} = \sqrt{2}$．



例 4

1．【操作发现】

（1）如图 1，将 ΔABC 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 ΔADE，连接 BD，则 $\angle ABD$ 的度数是__ $45°$ __．

【类比探究】

（2）如图 2，在等腰直角三角形 ABC 内取一点 P，使 $\angle APB = 135°$，将 ΔABP 绕顶点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\Delta ACP'$，连接 PP'．请猜想 BP 与 CP' 有怎样的位置关系，并说明理由．

【解决问题】

（3）如图 3，在等腰直角三角形 ABC 内任取一点 P，连接 PA、PB、PC．求证：$PC + \sqrt{2}PA > PB$．

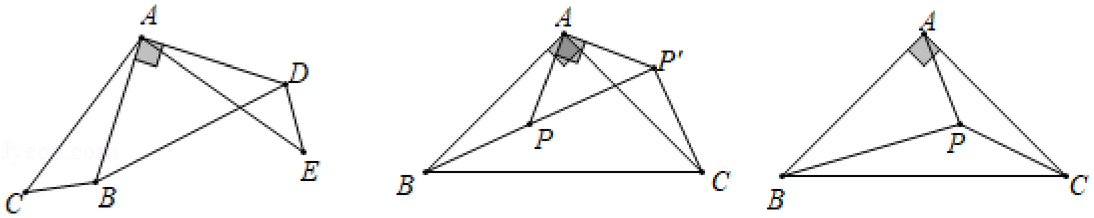


图1　图2　图3

【解答】解：（1）如图 1，由旋转得：$\angle BAD = 90°$，$AB = AD$，

$\therefore \Delta BAD$ 是等腰直角三角形，$\therefore \angle ABD = 45°$，故答案为：$45°$；

（2）$BP \perp CP'$，理由是：

如图 2，由旋转得：$AB = AC$，$AP = AP'$，$\angle BAC = \angle PAP' = 90°$，

$\therefore \Delta ABP \cong \Delta ACP'(SAS)$，$\therefore \angle APB = \angle AP'C = 135°$，

$\because AP = AP'$，$\angle PAP' = 90°$，$\therefore \Delta APP'$ 是等腰直角三角形，$\therefore \angle AP'P = 45°$，

$\therefore \angle APB + \angle APP' = 180°$，$\therefore B$、$P$、$P'$ 三点共线，$\therefore \angle CP'B = 135° - 45° = 90°$，

$\therefore BP \perp CP'$；

（3）如图 3，将 ΔABP 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\Delta ACP'$，

$\therefore \Delta ACP' \cong \Delta ABP$，$\therefore P'C = PB$，$PA = P'A$，

连接 PP'，

$\because \angle PAP' = 90°$，$\therefore PP' = \sqrt{2}PA$，

在$\Delta PCP'$中，$PC+PP'>P'C$，$\therefore PC+\sqrt{2}PA>PB$．

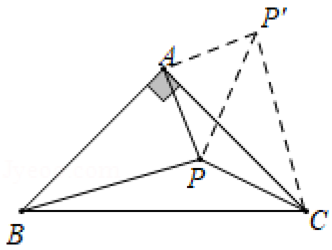


图3

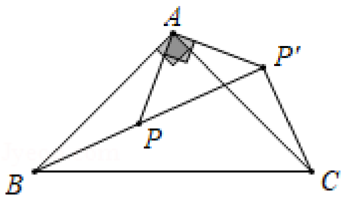


图2

例 5

1．问题情境：如图 1，ΔABC为等腰直角三角形，$\angle ACB=90^{\circ}$，F是AC边上的一个动点（点F与A，C不重合），以CF为一边在等腰直角三角形外作正方形$CDEF$，连接BF，AD．

探究展示：（1）①猜想图 1 中线段BF、AD的数量关系及所在直线的位置关系，直接写出结论；

②将图 1 中的正方形$CDEF$，绕着点C按顺时针方向旋转任意角度α，得到如图 2 的情形，图 2 中BF交AC于点H，交AD于点O，请你判断①中得到的结论是否仍然成立，并选取图 2 证明你的判断．

变式练习：（2）将原题中的等腰直角三角形ABC改为直角三角形ABC，$\angle ACB=90^{\circ}$，正方形$CDEF$改为矩形$CDEF$，如图 3，且$AC=4$，$BC=3$，$CD=\frac{4}{3}$，$CF=1$，BF交AC于点H，交AD于点O，连接BD、AF，请判断线段BF、AD所在直线的位置关系，并证明你的判断．

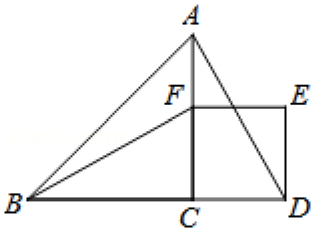


图 1

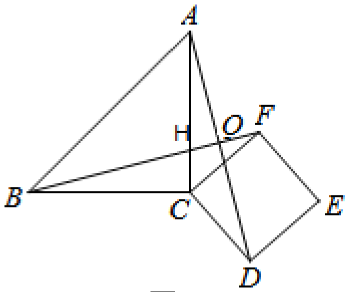


图 2

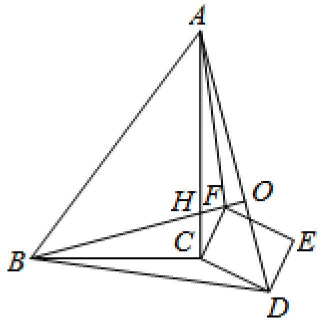


图 3

【解答】解：（1）①结论：$BF=AD$，$BF\perp AD$；

理由：如图 1 中，延长 BF 交 AD 于 H .

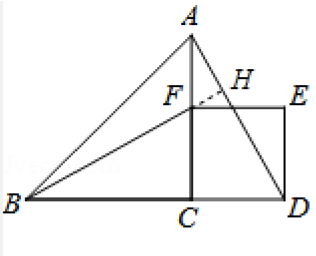


图 1

$\because \Delta ABC$ 是等腰直角三角形，$\therefore AC=BC$，$\angle ACB=90^{\circ}$，

$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形，$\therefore CD=CF$，$\angle FCD=90^{\circ}$，$\therefore \angle BCF=\angle ACD$，

在 ΔBCF 和 ΔACD 中，

$$\begin{cases} BC=AC \\ \angle BCF=\angle ACD \\ CF=CD \end{cases},$$

$\therefore \Delta BCF\cong \Delta ACD(SAS)$，

$\therefore BF=AD$，$\angle CBF=\angle CAD$，

又$\because \angle BFC=\angle AFH$，$\angle CBF+\angle BFC=90^{\circ}$，$\therefore \angle CAD+\angle AFH=90^{\circ}$，

$\therefore \angle AHF=90^{\circ}$，$\therefore BF\perp AD$；$\therefore BF=AD$，$BF\perp AD$；

② $BF=AD$，$BF\perp AD$ 仍然成立，

证明：如图 2 中，

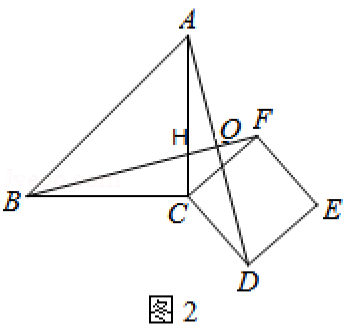


图 2

$\because \Delta ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\therefore AC=BC$，

$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形，$\therefore CD=CF$ ， $\angle FCD=90^{\circ}$ ，

$\therefore \angle ACB+\angle ACF=\angle FCD+\angle ACF$ ， 即 $\angle BCF=\angle ACD$ ，

在 ΔBCF 和 ΔACD 中，

$$\begin{cases}BC=AC\\ \angle BCF=\angle ACD\\ CF=CD\end{cases}，$$

$\therefore \Delta BCF\cong \Delta ACD(SAS)$ ，

$\therefore BF=AD$ ， $\angle CBF=\angle CAD$ ，

又 $\because \angle BHC=\angle AHO$ ， $\angle CBH+\angle BHC=90^{\circ}$ ， $\therefore \angle CAD+\angle AHO=90^{\circ}$ ，

$\therefore \angle AOH=90^{\circ}$ ， $\therefore BF\perp AD$ ；

（2）结论： $BF\perp AD$.

证明：如图 3 中，

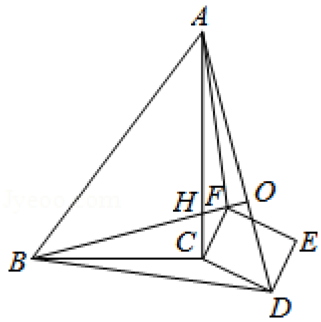


图 3

$\because$ 四边形 $CDEF$ 是矩形，$\therefore \angle FCD=90^{\circ}$ ，

又 $\because \angle ACB=90^{\circ}$ ， $\therefore \angle ACB=\angle FCD$ $\therefore \angle ACB+\angle ACF=\angle FCD+\angle ACF$ ，

即 $\angle BCF=\angle ACD$ ，

$\because AC=4$ ， $BC=3$ ， $CD=\dfrac{4}{3}$ ， $CF=1$ ， $\therefore \dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{3}{4}$ ， $\therefore \Delta BCF\backsim \Delta ACD$ ，

$\therefore \angle CBF=\angle CAD$ ，

又$\because \angle BHC=\angle AHO$，$\angle CBH+\angle BHC=90°$

$\therefore \angle CAD+\angle AHO=90°$，$\therefore \angle AOH=90°$，$\therefore BF\perp AD$，

智慧高峰

1．（1）操作发现：

如图①，在正方形$ABCD$中，过A点有直线AP，点B关于AP的对称点为E，连接DE交AP于点F，

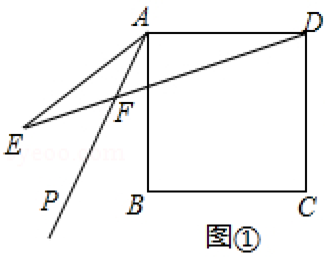
当$\angle BAP=20°$时，则$\angle AFD=$__45__°；当$\angle BAP=\alpha°(0<\alpha<45°)$时，则$\angle AFD=$____°；猜想线段$DF$，$EF$，$AF$之间的数量关系：$DF-EF=$____$AF$（填系数）；

（2）数学思考：

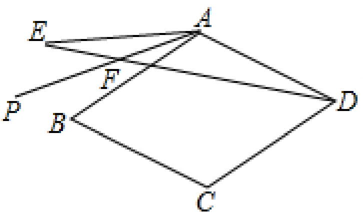
如图②，若将"正方形$ABCD$中"改成"菱形$ABCD$中，$\angle BAD=120°$"，其他条件不变，则$\angle AFD=$°；线段DF，EF，AF之间的数量关系是否发生改变，若发生改变，请写出数量关系并说明理由；

（3）类比探究：

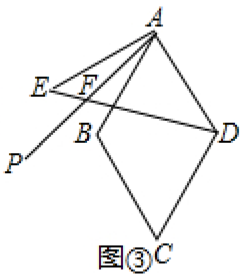
如图③，若将"正方形$ABCD$中"改成"菱形$ABCD$中，$\angle BAD=\alpha°$"，其他条件不变，则$\angle AFD=$°；请直接写出线段DF，EF，AF之间的数量关系：____．



图①

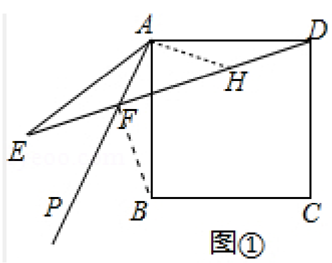


图②



图③

【解答】解：（1）如图①中，连接BF、作$AH\perp AF$交DE于H．



图①

当 $\angle PAB=20^\circ$ 时，

$\because \angle PAB=\angle PAE=20^\circ$， $\angle BAD=90^\circ$， $\therefore \angle EAD=130^\circ$，

$\because AB=AE=AD$， $\therefore \angle E=\dfrac{1}{2}(180^\circ-130^\circ)=25^\circ$， $\therefore \angle AFD=\angle E+\angle PAE=45^\circ$，

当 $\angle PAB=\alpha$ 时， $\angle E=\dfrac{1}{2}[180^\circ-(90^\circ+2\alpha)]=45^\circ-\alpha$，

$\therefore \angle AFD=\angle E+\angle PAE=45^\circ-\alpha+\alpha=45^\circ$，

$\because \angle AFH=45^\circ$， $\angle FAH=90^\circ$， $\therefore AF=AH$，

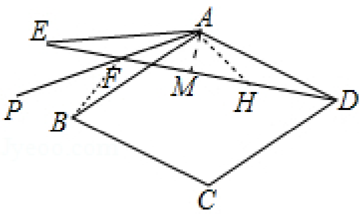
$\because \angle FAH=\angle BAD=90^\circ$， $\therefore \angle FAB=\angle HAD$，

$\because AB=AD$， $\therefore \Delta FAB\cong\Delta HAD$， $\therefore BF=DH$，

$\because EF=BF$， $\therefore DH=EF$， $\therefore DF-EF=FH=\sqrt{2}AF$，

故答案为 45，45， $\sqrt{2}$.

（2）如图②中，连接 BF 、作 $\angle FAH=120^\circ$ 交 DE 于 H， $AM\perp DE$ 于 M .



图②

设 $\angle PAB=\alpha$，

则 $\angle E=\dfrac{1}{2}[180^\circ-(120^\circ+2\alpha)=30^\circ-\alpha$， $\therefore \angle AFD=\angle E+\angle PAE=30^\circ$，

$\because \angle FAH=\angle BAD=120^\circ$， $\therefore \angle FAB=\angle HAD$，

$\because \angle AFH=\angle AHF=30^\circ$， $\therefore AF=AH$，

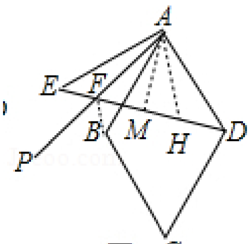
$\because AB=AD$， $\therefore \Delta FAB\cong\Delta HAD$， $\therefore BF=DH=EF$， $\therefore DF-AF=DF-DH=FH$，

$\therefore AM \perp FH$， $AF = AH$， $\therefore FM = MH = AF \bullet \cos 30°$， $\therefore FH = \sqrt{3}AF$，

$\therefore DF - EF = \sqrt{3}AF$，

故答案为 30，改变， $DF - EF = \sqrt{3}AF$

（3）如图③中，当 $\angle BAD = \alpha$ 时，设 $\angle PAB = \angle PAE = x$，连接 BF 、作 $\angle FAH = \alpha$ 交 DE 于 H，$AM \perp DE$ 于 M．



图③

则 $\angle E = \frac{1}{2}[180° - (\alpha + 2x) = 90° - \frac{1}{2}\alpha - x$， $\therefore \angle AFD = \angle E + \angle PAE = 90° - \frac{1}{2}\alpha$，

$\because \angle EAH = \angle BAD = \alpha$， $\therefore \angle FAB = \angle HAD$，

$\because \angle AFH = \angle AHF = 90° - \frac{1}{2}\alpha$， $\therefore AF = AH$，

$\because AB = AD$， $\therefore \Delta FAB \cong \Delta HAD$， $\therefore BF = DH = EF$， $\therefore DF - AF = DF - DH = FH$，

$\therefore AM \perp FH$， $AF = AH$， $\therefore FM = MH = AF \bullet \sin\frac{1}{2}\alpha$， $\therefore FH = 2\sin\frac{1}{2}\alpha \bullet AF$，

$\therefore DF - EF = 2\sin\frac{1}{2}\alpha \bullet AF$．

故答案为 $(90 - \frac{\alpha}{2})$， $DF - EF = 2\sin\frac{1}{2}\alpha \bullet AF$．

智慧磨炼

1．如图 1，在 RtΔABC 中，$\angle B = 90°$，$BC = 2AB = 8$，点 D 、E 分别是边 BC 、AC 的中点，连接 DE，将 ΔEDC 绕点 C 按顺时针方向旋转，记旋转角为 α．

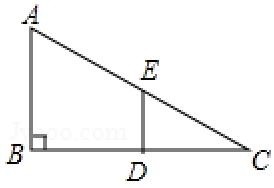


图1

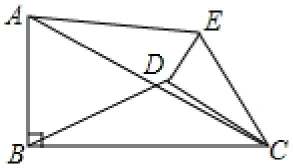
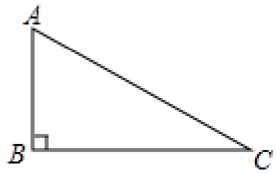


图2



备用图

（1）问题发现

①当$\alpha=0°$时，$\dfrac{AE}{BD}=$__$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$__；②当$\alpha=180°$时，$\dfrac{AE}{BD}=$____.

（2）拓展探究

试判断：当$0°\leqslant\alpha<360°$时，$\dfrac{AE}{BD}$的大小有无变化？请仅就图2的情形给出证明.

（3）问题解决

当ΔEDC旋转至A，D，E三点共线时，直接写出线段BD的长.

【解答】解：（1）①当$\alpha=0°$时，

$\because$ RtΔABC中，$\angle B=90°$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(8\div 2)^2+8^2}=4\sqrt{5}$，

$\because$点D、E分别是边BC、AC的中点，$\therefore AE=4\sqrt{5}\div 2=2\sqrt{5}, BD=8\div 2=4$，

$\therefore \dfrac{AE}{BD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

②如图1，

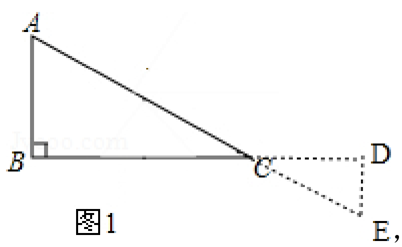
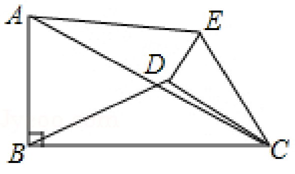


图1

当$\alpha=180°$时，可得$AB//DE$，

$\because \dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{BD}$，$\therefore \dfrac{AE}{BD}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4\sqrt{5}}{8}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}$.



（2）如图 2，

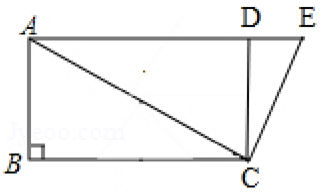
图2

，

当 $0°\leqslant\alpha<360°$ 时，$\frac{AE}{BD}$ 的大小没有变化，

$\because \angle ECD=\angle ACB$，$\therefore \angle ECA=\angle DCB$，

又$\because \frac{EC}{DC}=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore \Delta ECA \backsim \Delta DCB$，$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{EC}{DC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



（3）①如图 3，

图3

，

$\because AC=4\sqrt{5}$，$CD=4$，$CD\perp AD$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{80-16}=8$，

$\because AD=BC$，$AB=DC$，$\angle B=90°$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore BD=AC=4\sqrt{5}$.

②如图 4，连接 BD，过点 D 作 AC 的垂线交 AC 于点 Q，过点 B 作 AC 的垂线交 AC 于点 P，

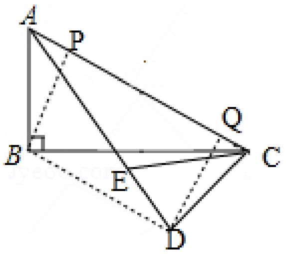


图4 ，

$\because AC=4\sqrt{5}$， $CD=4$， $CD\perp AD$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{80-16}=8$，

$\because$点 D 、 E 分别是边 BC 、 AC 的中点， $\therefore DE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times(8\div 2)=\frac{1}{2}\times 4=2$，

$\therefore AE=AD-DE=8-2=6$，

由（2），可得 $\frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$， $\therefore BD=\frac{6}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$． 综上所述， BD 的长为 $4\sqrt{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ ．

2．（1）问题发现

如图 1，在 RtΔABC 和 RtΔCDE 中， $\angle ACB=\angle DCE=90^\circ$， $\angle CAB=\angle CDE=45^\circ$，点 D 时线段 AB 上一动点，连接 BE .

填空：

① $\frac{BE}{AD}$ 的值为__1__； ② $\angle DBE$ 的度数为____.

（2）类比探究

如图 2，在 RtΔABC 和 RtΔCDE 中， $\angle ACB=\angle DCE=90^\circ$， $\angle CAB=\angle CDE=60^\circ$，点 D 是线段 AB 上一动点，连接 BE . 请判断 $\frac{BE}{AD}$ 的值及 $\angle DBE$ 的度数，并说明理由；

（3）拓展延伸

如图 3，在（2）的条件下，将点 D 改为直线 AB 上一动点，其余条件不变，取线段 DE 的中点 M ，连

接 BM 、 CM ，若 $AC=2$ ，则当 ΔCBM 是直角三角形时，线段 BE 的长是多少？请直接写出答案.

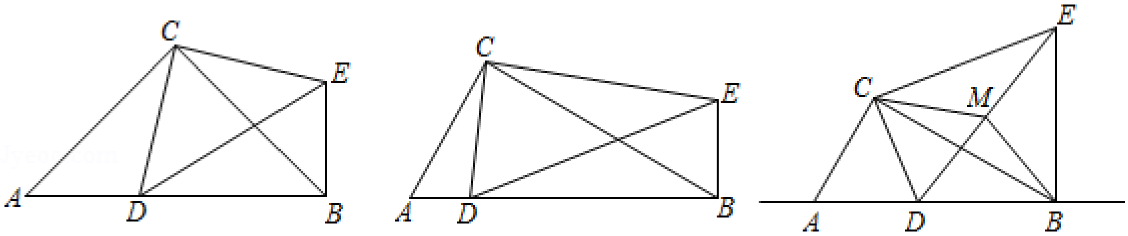


图1 图2 图3

【解答】解：（1）$\because \angle ACB=90^\circ$ ， $\angle CAB=45^\circ$

$\therefore \angle ABC=\angle CAB=45^\circ \therefore AC=BC$ ， $\angle DBE=\angle ABC+\angle CBE=90^\circ$

$\because \angle ACB=\angle DCE=90^\circ$ ， $\therefore \angle ACD=\angle BCE$ ，且 $\angle CAB=\angle CDE=45^\circ$ ，

$\therefore \Delta ACD \backsim \Delta BCE \therefore \dfrac{BE}{AD}=\dfrac{BC}{AC}=1$

故答案为：1， 90°

（2） $\dfrac{BE}{AD}=\sqrt{3}$ ， $\angle DBE=90^\circ$

理由如下： $\because \angle ACB=\angle DCE=90^\circ$ ， $\angle CAB=\angle CDE=60^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$ ， $\angle CED=\angle ABC=30^\circ$

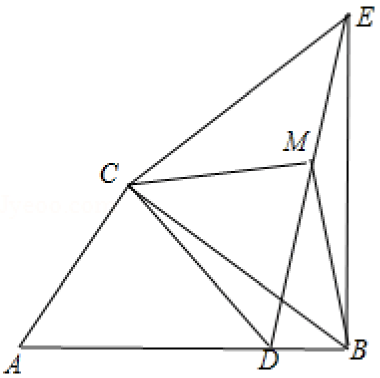
$\therefore \tan\angle ABC=\tan 30^\circ=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\because \angle ACB=\angle DCE=90^\circ$ ， $\angle CAB=\angle CDE=60^\circ$ ， $\therefore \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ACB} \backsim \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{DCE}$

$\therefore \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CD}{CE} \therefore \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{BC}{CE}$ ，且 $\angle ACD=\angle BCE \therefore \Delta ACD \backsim \Delta BCE$

$\therefore \dfrac{BE}{AD}=\dfrac{BC}{AC}=\sqrt{3}$ ， $\angle CBE=\angle CAD=60^\circ \therefore \angle DBE=\angle ABC+\angle CBE=90^\circ$

（3）若点 D 在线段 AB 上，如图，



由（2）知：$\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}=\sqrt{3}$，$\angle ABE=90^\circ \therefore BE=\sqrt{3}AD$

$\because AC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle CAB=90^\circ \therefore AB=4$，$BC=2\sqrt{3}$

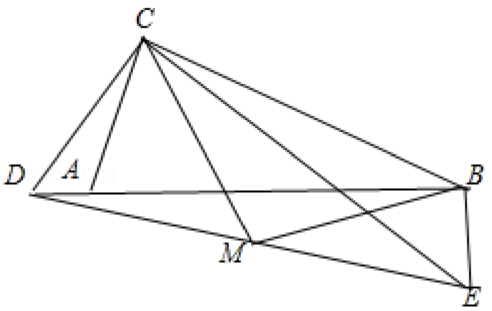
$\because \angle ECD=\angle ABE=90^\circ$，且点 M 是 DE 中点，$\therefore CM=BM=\frac{1}{2}DE$，且 ΔCBM 是直角三角形

$\therefore CM^2+BM^2=BC^2=(2\sqrt{3})^2$，$\therefore BM=CM=\sqrt{6} \therefore DE=2\sqrt{6}$

$\because DB^2+BE^2=DE^2$，$\therefore (4-AD)^2+(\sqrt{3}AD)^2=24 \therefore AD=\sqrt{3}+1$

$\therefore BE=\sqrt{3}AD=3+\sqrt{3}$

若点 D 在线段 BA 延长线上，如图



同理可得：$DE=2\sqrt{6}$，$BE=\sqrt{3}AD$

$\because BD^2+BE^2=DE^2$，$\therefore (4+AD)^2+(\sqrt{3}AD)^2=24$，$\therefore AD=\sqrt{3}-1 \therefore BE=\sqrt{3}AD=3-\sqrt{3}$

综上所述：BE 的长为 $3+\sqrt{3}$ 或 $3-\sqrt{3}$