2020年1月“根源杯”物理奥林匹克邀请赛（十六）

2020年1月

考生须知：

1、 本卷共八题，满分320分。

2、 考生请在答题卡上作答，在试题纸上作答无效。

3、 计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，按步骤计算得分。只写出最后结果的不能得分，有数值计算的题，答案中必须明确写出数值和单位。

一、（40分）

本题由两个部分组成，考虑温度变化背景下振动体的性质变化。注意，本题中只需要考虑所提到材料的热变化，且假定膨胀系数足够的小，使得每次计算时只需要考虑热变化的一阶效应。忽略其它一切可能的热变化效果。已知数据：

黄铜的线性热膨胀系数： $\alpha_1 = 2.0\times 10^{-5}K^{-1}$

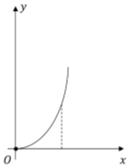
镍铁弦的线性热膨胀系数： $\alpha_2 = 1.4\times 10^{-5}K^{-1}$

（1）给定一台由黄铜制成的单臂摆钟。假定温度上升了20K，请计算摆钟一天之内会多走或者少走多少时间？

（2）给定一把以镍铁为弦材料的吉他。一根镍铁弦原长为0.79m，已知固定在吉他上时被拉伸到了0.800m，并且这一时候弦的发音基频为440Hz。假定温度同（1）上升20K，请计算吉他弦的发音基频会改变多少？

二、（40 分）

本题我们讨论经典和相对论背景下受力物体的运动。



假定无重力空间中有如右图所示的轨道，轨迹为曲线 $y=\frac{x^2}{24}$ 的 $x>0$ 正半轴部分。初始时候，(静止)质量m_0的质点位于坐标系原点处，速度为 0。

（1）计算轨道在 x 处的曲率半径，并计算从 $x=0$ 到 $x=A$ 的轨道长度。

（2）假定此时给质点施加一个可变的作用力，使其具有恒定的加速度$a_0=\frac{v_0^2}{4(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))A}$。其中，$v_0$是给定常量。

（2.1） 试求经典背景下，$x=A$ 处质点在曲线切向方向上受到的作用力。

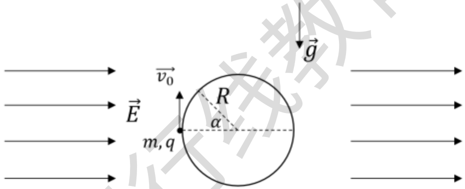
（2.2） 取$v_0=c$，在相对论背景下计算质点在 $x=A$ 处受到的曲线切向方向上的作用力。

三、（40 分）

如图。真空中通过均匀的匀强电场$\vec{E}$，其间放置有一个半径 R 的质地均匀金属球。竖直方向上分布有重力加速度为$\vec{g}$。根据这一背景，请解答以下问题：

（1）达到静电平衡时，求金属表面的感应电荷密度分布$\sigma(\alpha)$，α的定义如图。注：计算静电平衡时只需要考虑电荷力的作用，不需要考虑重力带来的影响。

（2）固定金属球。将一个质量为 m，带电量为 q $(q>0)$的小球放置于$\alpha=0$ 处。已知小球与金属球间无电荷转移，且小球对金属球上电荷分布影响忽略不计。给小球以初速度v_0沿着金属球切向竖直向上。请问v_0需要满足什么样的条件，才能保证其能始终贴着金属球运动到$\alpha=\frac{\pi}{3}$处，并给出计算过程。



四、（40 分）

本题我们计算经典平衡下的电势分布问题。

已知对于孤立的单根无限长带电直导线，线电荷密度为λ，若定义距离直线r_0处的电位为 0，则距离直线 r 处的电位为：

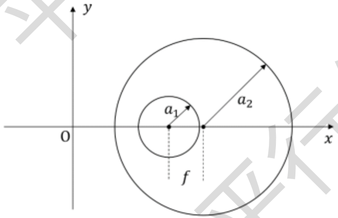
$$\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}lnr-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}lnr_0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\frac{r}{r_0}$$

请根据以上结论解决本题：

（1） 求相距为 l 的无限长带等量异种、线电荷密度为λ的平行直导线的等势面形状。可以在两条直线的公垂面内给出等势线的解析表达式，此时不妨设定两条直线与垂面的交点位于 $x=\pm\frac{l}{2},y=0$ 的位置处，已知 l 远远大于导线直径的线度。

（2） 真空中有两半径均为 a 的、轴线相距 $2d$ 的平行长直圆柱导体构成的输电线，求其单位长度的电容，已知 $d>a$，但此时 a 相对于 d 不能忽略，如（1）中建坐标系，柱体轴线位于 $x=\pm d$ 处。

（3） 给定一个很长的偏心电缆，已知其由内外两个空心圆柱壳组成。已知其内外导体 A、B 的半径分别为a_1、a_2,两轴线间距为 f。求已知两圆柱体间电压为 U 的情况下外壳内的电势分布情况。同样取垂直轴线的截面，建立坐标系如图所示。



五、（40 分）

本题我们讨论经典辐射背景下的光子气模型。

光子气是一种计算辐射规律中一种常见的理想模型。与理想气体不同的是，系统封闭后，理想气体的粒子数始终守恒。而体系中的光子气体的数目是可变的，这一数值具体的由体系能量所决定。对于光子气体，我们引入系统的辐射压力 p：定义为全频率光子在单位时间、单位面积垂直于系统边缘面元贡献的总冲量；单位体积能量密度 u 和体系温度 T。给定 Stephen-Boltzman 常数σ。已知平衡状态下如下关系成立：

$$p=\frac{1}{3}u$$

请根据以上背景解决下列问题：

（1） 考虑内能是温度 T 和体积 V 的函数，有著名的内能方程：

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta V}\right)_T=T\left(\frac{\Delta p}{\Delta T}\right)_V-p$$

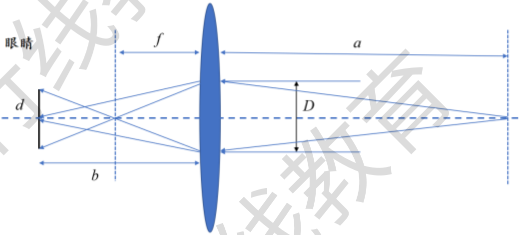
请自行构造模型，证明这一结论。

（2） 根据上述结论，请导出黑体辐射的 Stephen-Boltzman 定律以及光子气体的状态方程。

六、（40 分）

当我们近视时，会习惯性地眯起眼来看远处的物体。因为眯眼可以有效得使原来模糊的物体变得清晰，下面我们定量地分析其中的原理：

近视者之所以看不清楚远处的物体是因为眼睛的晶状体焦距过小，使得物体所成的像落在了视网膜前面，所以在视网膜上就形成了一个模糊的光斑，如图所示。



近似可以认为，当这个光斑对瞳孔中心的角直径Δθ比物体本身对眼睛的角直径要大时，就无法分辨物体的细节了。而如果眯眼，可以有效地减小这样的几何光斑的直径，因此使得物体变得清晰。但是，并非眼睛眯得越小就看得越清楚，因为眼睛眯得太小了，因光衍射产生的衍射光斑会增大，我们认为光斑最终大小为几何光学成像光斑与衍射光斑中较小者。我们根据经验选择合适的眯眼程度就可以最大限度地“提高”视力。

标准对数视力表的原理为：对每一行“E”的尺寸做 lg 对数运算，上一行的数值都比下一行大 0.1，因此每一行“E”的尺寸都比下一行大 1.259 倍，标定 7mm 对应标准视力 5.0，则每向上一行，视力依次为 4.9；4.8；….,4.0. 检查视力时视力表距离眼睛的距离为 5m（计算时可近似为平行光入射）。

设小明眯眼后的视力水平“提高”为 X，试求他的真实视力 Y。

已知：计算时可简化为小孔衍射模型；眼睛收到的光的波长近似为 560nm；瞳孔直径约 3mm；认为晶状体与视网膜间物质折射率为 1，且两者距离为 23mm.

七、（40 分）

本题我们研究经典量子假设下的双原子分子模型。

在双原子分子的转动光谱分析中，我们通常将组成分子的两个原子视为质点，假定质量分别为m_1, m_2，且两个原子的连接是刚性的，假定其相距为 r。给出角动量量子化条件：

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2$$

其中，L 是角动量，l 为任意正整数。已知跃迁仅仅发生在两个相邻的能级之间。

（1） 试求出此分子转动光谱上的所有频率。

（2） 给定一个具体的双原子分子模型，氯化氢分子(HCl)。实验上测得 HCl 分子的远红外吸收光谱有如下一些波长的谱线：

$$12.03, 9.60, 8.04, 6.89, 6.04$$

单位都为$10^{-5}m$。已知远红外吸收测得的谱线来源于转动光谱，请求出 H 与 Cl 原子的平均距离 r。

数据：

$$\hbar = 1.055\times10^{-34}J\cdot S, M_{Cl} = 35.45\,g\cdot mol^{-1}, M_H = 1.008\,g\cdot mol^{-1}$$

提示：计算数据的时候需采用逐差法处理

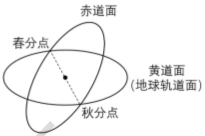
八、（40 分）

本题我们讨论地球公转中的物理现象。

我们都知道，地球赤道平面并不与地球公转轨道平面重合。其相叉的夹角称作“黄赤交角”，历史上曾经测得这一角度为$\theta = 23°26'$，如图 1 所示。由于万有引力的存在，且地球并不是一个“正”球体（注意：不是正球体，但是为了模型方便，假定旋转对称性仍然是满足的），进而导

致地球上各个部分收到太阳的引力并不均匀：如接近太阳的部分所受F_1大于背离太阳所受引力F_2，如此便产生了一个力矩使地轴产生“进动”现象（如图 2 所示）。一个最直接的地理现象是，春分点会随着时间的迁移每年在黄道面上向西运动 50.2''，这种现象我们称之为“岁差”。

为了建立模型估计这种现象，我们将地球视作一个旋转的椭球，其绕着地球自转轴（以下简称“地轴”）的转动惯量为：$I_P = 2\beta M_E R_E^2$，绕在赤道平面且通过地心轴的转动惯量为：$I_E = \beta M_E(R_E^2 + R_P^2)$。其中，$R_E$、$R_P$分别为赤道半径和极半径，β是一个常数。



（1） 考虑一个简单情形。假定地球质量为M_E，太阳质量为M_S且日地距离为r_0。假定目前地球正处于冬至/夏至日的位置，即地轴与日地连心线所构成的平面垂直于黄道面的时候。请计算此时地球受到太阳净作用的力矩大小。（以字母表示即可）

（2） 假定一般情况下，地球受到太阳的力矩平均值为上述值的$\frac{1}{2}$，并引入月球的影响：假定月球对地球作用的原理同一样，不过忽略月球公转平面与黄道面的夹角。试计算春分点的进动角速度ω，数据如下：

$$M_s = 1.99 \times 10^{30}\,kg, M_E = 5.98 \times 10^{24}\,kg, M_m = 7.35 \times 10^{22}\,kg, 2\beta = 0.33,$$

$$r_0 = 1.496 \times 10^8 km, r_1 = 3.844 \times 10^5 km, R_E = 6378.14 km, R_P = 6356.76 km$$

其中M_m是月球质量，r_1为地月平均距离。已知 $G = 6.673 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$。