2020 年“根源杯”物理奥林匹克邀请赛（十六）解析

2020 年 1 月

一、（40 分）

（1） 假定摆臂的原长为l_0，升温 20K 后，摆长变化为：

$$l_1 = l_0(1+\alpha_1\cdot 20)$$

考虑到单摆模型中，周期与摆长的关系满足：

$$\mathrm{T} \propto \sqrt{l}$$

从而有：

$$\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{\frac{l_1}{l_0}} = 1.00020$$

一天内摆钟走动的时间差值为：

$$\Delta\mathrm{T} = \left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)\times 24\mathrm{h} =- 17s$$

从而时间少走了 17s/天。

（2） 原始状态下，弦原长$l_0 = 0.79\mathrm{m}$，被拉伸至 $\mathrm{L} = 0.80\mathrm{m}$，并固定弹奏。

考虑到升温 20K 后，“原长”变为：

$$l_1 = l_0(1+\alpha_2\cdot 20)$$

且仍然被拉伸到 $\mathrm{L} = 0.80\mathrm{m}$ 并演奏。考虑吉他演奏的时候，弦上产生驻波，基频对应波长最长的驻波成分，即波长$\lambda = 2\mathrm{L}$ 的成分，显然这是一个确定值。

注意到弦上横波的波速为：

$$\mathrm{u} = \sqrt{\frac{T}{\eta}}$$

其中 T 为弦上张力，$\eta = \frac{m}{L}$为弦的线质量密度，m 为弦的质量，从而基频为：

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{1}{2\mathrm{L}}\sqrt{\frac{T}{\eta}}$$

分别求出升温前后的张力，计算基频，有：

$$T_1 = k(L-l_0) \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{kL(L-l_0)}{m}}$$

$$T_2 = k(L-l_1) \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{kL(L-l_1)}{m}}$$

从而得到：

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{L-l_1}{L-l_0}}\nu_0 = 435\ Hz$$

所以基频相比于初始情况下降了 5 Hz。

评分标准：

（1） 20 分；给出周期与摆长的关系 10 分，给出摆钟实际运动时间 5 分，求出差值 5 分。

（2） 20 分；指出驻波关系 5 分，给出基频对应的波长 5 分，写出波速 5 分，得到频率ν_1表达式以及最终结果 5 分。

二、（40 分）

（1） （这里构造方法很多，具体参见舒幼生：《奥赛物理题解》，此处直接给出答案）

$$\rho(x) = A\left(1+\frac{x^2}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$l = \frac{1}{2}A(\sqrt{2} + ln\,(\sqrt{2}+1))$$

（2） 记$\vec{n}, \vec{\tau}$分别为轨迹上的法向、切向方向矢量（即自然坐标系表示），写出动量定理：

$$\vec{F} = \frac{d(mv\vec{\tau})}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}\vec{\tau} + mv\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

假定这一位置处的质点速度为 v，考虑$\vec{\tau}$的变化，有：

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{n}$$

代入方程得到：

$$\vec{\mathrm{F}}=\frac{d(mv\vec{\tau})}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}\vec{\tau}+m\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

注意，此时的方程对于经典和相对论情况都是成立的。

（2.1） 此时进行经典情况的讨论：

经典情况下，质量不变，对 F 的表达式进一步化简，得到：

$$\vec{F}=m\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\mathrm{m}\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

依题，只需要求切向的作用力，且注意到加速度为常量，则待求得表达式为：

$$\mathrm{F}_\tau=m\frac{dv}{dt}=m_0a_0$$

代入，得到：

$$\mathrm{F}_\tau=\frac{m_0v_0^2}{4(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))A}$$

即，在题中要求的条件下，经典背景里的F_τ是个常数，$x=A$ 处F_τ即为上述结果。

（2.2） 再进行相对论背景下的计算：

考虑到 m 是变化的，不对$\vec{\mathrm{F}}$的表达式进行化简，待求式为：

$$\mathrm{F}_\tau=\frac{d(mv)}{dt}$$

代入动质量 m 和 v，得到：

$$\mathrm{F}_\tau=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}+v\frac{d}{dt}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

展开：

$$\mathrm{F}_\tau=m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{dv}{dt}=m_0a_0\left(\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

考虑 $x=A$ 位置，注意到加速度是个常量，则由运动学规律得到：

$$v=\sqrt{2a_0l}$$

代入 l 的结果，得到：

$$v = \frac{1}{2}c$$

代回F_τ的表达式，得：

$$F_\tau = \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{mc^2}{A}$$

评分标准：

（1） 15 分；得到曲率半径 10 分，轨道长度 5 分；

（2） （2.1）10 分；得到最终结果满分，否则不给分。

（2.2）15 分；得到受力表达式 10 分，最终结果 5 分。

三、（40 分）

（1） 先计算电场的分布：

设想两个带电均匀、电荷体密度分别为$\pm\rho$的半径为 R 的小球相互交叠，球心距离为 a，则由叠加定理，两球交叠区域内的任意一点场强$\vec{E}$为：

$$\vec{\mathrm{E}} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

其中，$\vec{E_1}$、$\vec{E_2}$分别为体密度$\pm\rho$的均匀带电球所贡献。展开得：

$$\vec{E} = \frac{4}{3}k\pi\rho\vec{r_2} + \frac{4}{3}k\pi(-\rho)\vec{r_1} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

处于匀强电场中的金属球可以看作上述情况中 $a \to 0$ 的极限（具体证明参见普通物理《电磁学》）。则考虑到α的定义，金属球边缘的电荷面密度分布为：

$$\sigma(\alpha) = \rho d(\alpha) = \rho\left(\mathrm{R} - \sqrt{R^2 + a^2 + 2Racos\alpha}\right) = -\rho acos\alpha$$

联立 E 的表达式，得到：

$$\sigma(\alpha) = -3\varepsilon_0 Ecos\alpha$$

（2） 注意到导体球表面等势，如果小球能贴着导体球表面运动，电场力对小球不会做功，整个过程中只有重力做功。

设小球运动到α处时速度变为 v，由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2-mgRsin\alpha$$

若小球能贴着金属球运动，则时刻要求正压力 N 不小于 0，列出 N 的表达式：

$$mgsin\alpha-N-qE_n=\frac{mv^2}{R}$$

如果要满足题目假设，即$\alpha\in[0,\frac{\pi}{3}]$内始终有 $v\geq 0,N\geq 0$，联立，列出不等式：

$$v_0^2\geq 2gRsin\alpha，\ 即v_0^2\geq\sqrt{3}gR$$

$$\mathrm{N}=3\sqrt{m^2g^2+q^2E^2}\sin(\alpha+\varphi)-\frac{mv_0^2}{R}，其中\ \tan\varphi=\frac{qE}{mg}$$

考虑到$\alpha\in[0,\frac{\pi}{3}]$，由单调性有：

若 $0<\tan\varphi=\frac{qE}{mg}\leq tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，则：

$$\mathrm{N_{min}}=3\sqrt{m^2g^2+q^2E^2}sin\varphi-\frac{mv_0^2}{R}\geq 0$$

即：$3\mathrm{qER}\geq mv_0^2$

若 $\tan\varphi>\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，则：

$$\mathrm{N_{min}}=3\sqrt{m^2g^2+q^2E^2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{mv_0^2}{R}\geq 0$$

即：$\frac{3}{2}R\left(\sqrt{3}mg+qE\right)\geq mv_0^2$

综上所述，v_0的取值范围为：

1. 当 $\mathrm{qE}<\frac{\sqrt{3}}{3}mg$ 时，v_0无论取何值均不能满足题意；
2. 当$\frac{\sqrt{3}}{3}mg\leq qE\leq\sqrt{3}mg$ 时，$v_0\in[\sqrt{\sqrt{3}gR},\sqrt{\frac{3qER}{m}}]$；
3. 当 $\mathrm{qE}>\sqrt{3}mg$ 时，$v_0\in[\sqrt{\sqrt{3}gR},\sqrt{\frac{3}{2}R(\sqrt{3}g+\frac{qE}{m})}]$；

评分标准：

（1） 20 分；写出两个均匀异号电荷球得 10 分，得到σ(α)表达式 10 分。注意α的定义，如果符号反了扣 5 分。

（2） 20 分；写出电势不变、电场力不做功 5 分，机械能表达式和受力表达式各 5 分，分类讨论 5 分。注意讨论不完整按照过程完整程度酌情扣分。

四、（40 分）

（1） 根据题目提示，在两轴线的公垂面内建立 xoy 坐标系，使得两带电直线与垂面的交点分别位于 $x=\pm\frac{l}{2}, y=0$ 处。显然，此时的等势线是相对于 x、y 轴对称的，取 $x=0, y=0$ 处为电势零点，则平面内任何一处 P(x,y)的电势为：

$$\mathrm{U_P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+y^2}}+\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+y^2}}$$

等势线满足$\mathrm{U_P}=Const$，整理上式为：

$$\left(x-\frac{1+C}{2(1-C)}l\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{C}}{1-C}\right)^2,\text{其中 } C=e^{\frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}}>0$$

所以在 xoy 平面上，等势线是一条以$\left(\frac{1+C}{2(1-C)}l,0\right)$为圆心、$\left|\frac{\sqrt{C}}{1-C}\right|$为半径的圆。特殊的，在 U=0 的位置等势线退化成一条直线(x=0)。

全空间内，等势面是一条圆柱面，母线与电缆平行，垂直截面为上述圆的集合。

（2） 注意到导体表面为等势面，将（1）中某一等势面用导体圆柱代替，只要单位长导体柱的面电荷与线电荷密度相等，就不会影响柱外电位以及电场。反之，两圆柱体可等效于线电荷密度也为±λ、但相距为 l 的两平行无限长带电直线，只要：

$$\begin{cases}\dfrac{1+C_1}{2(1-C_1)}l=d\\[2mm]\dfrac{\sqrt{C}}{1-C}=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1+C_2}{2(1-C_2)}l=-d\\ \dfrac{\sqrt{C_2}}{1-C_2}=-a\end{cases}$$

令$\frac{d}{a}=k(\mathrm{k}>1)$，联立可以解得：

$$\begin{cases}C_1=\left(k-\sqrt{k^2-1}\right)^2\\ C_2=\left(k+\sqrt{k^2-1}\right)^2\\ l=2\sqrt{k^2-1}a\end{cases}$$

从而根据定义，写出电容 C 的表达式为：

$$\mathrm{C}=\frac{\lambda}{U_2-U_1}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{k+\sqrt{k^2-1}}{k-\sqrt{k^2-1}}}$$

（3） 在外导体之外、内导体之内的区域里显然静电平衡时会达到 E=0，因此我们只需要考虑两圆柱之间的区域。同（2），列方程，有：

$$\begin{cases}\dfrac{1+C_2}{2(1-C_2)}l-\dfrac{1+C_1}{2(1-C_1)}l=f\\ \dfrac{\sqrt{C_1}}{1-C_1}=a_1\\ \dfrac{\sqrt{C_2}}{1-C_2}=a_2\end{cases}$$

联立解得：

$$l=\frac{\sqrt{\left(a_2^2-a_1^2-f^2\right)^2-2(a_1f)^2}}{f}$$

引入常数：$\mathrm{h}_1=\frac{a_2^2-a_1^2-f^2}{2f},h_2=\frac{f^2+a_2^2-a_1^2}{2f},b=\frac{l}{2}$，则：

$$\varphi_{\mathrm{A}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b+(h_1-a_1)}{b-(h_1-a_1)}$$

$$\varphi_{\mathrm{B}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b+(h_2-a_2)}{b-(h_2-a_2)}$$

取电压 $\mathrm{U}=\varphi_{\mathrm{A}}-\varphi_{\mathrm{B}}$，得：

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{b+(h_1-a_1)}{b-(h_1-a_1)}\cdot\frac{b-(h_2-a_2)}{b+(h_2-a_2)}\right)}$$

对于两圆柱体之间的区域（包括内外圆柱体本身），点 P 的电势：

$$U_P = \frac{\frac{U}{2}}{\ln\left(\frac{b+(h_1-a_1)}{b-(h_1-a_1)}\cdot\frac{b-(h_2-a_2)}{b+(h_2-a_2)}\right)}\cdot\ln\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}$$

对于外圆柱外的点 P，电势：

$$U_P = \frac{U}{\ln\left(\frac{b+(h_1-a_1)}{b-(h_1-a_1)}\cdot\frac{b-(h_2-a_2)}{b+(h_2-a_2)}\right)}\cdot\ln\frac{b+h_1-a_1}{b-h_1+a_1}$$

对于内圆柱内的点 P，电势：

$$U_P = \frac{U}{\ln\left(\frac{b+(h_1-a_1)}{b-(h_1-a_1)}\cdot\frac{b-(h_2-a_2)}{b+(h_2-a_2)}\right)}\cdot\ln\frac{b+h_2-a_2}{b-h_1+a_2}$$

评分标准：

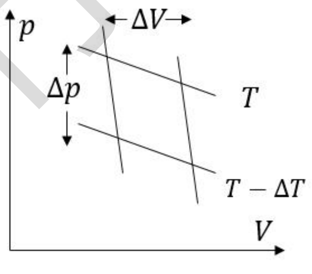
（1） 10 分；得到列出方程 5 分，得到最后的圆表达式 5 分；

（2） 15 分；引用（1）的结果写出方程各 5 分，得到 C 表达式 5 分；

（3） 15 分；注意分类讨论，三种情况的结果各自 5 分，少讨论一种扣 5 分。

五、（40 分）

（1） 构造无限小的卡诺循环，如右图所示：



在这一循环过程中，对外做功 W、吸热 Q，则由卡诺热机循环效率得到：

$$\frac{W}{Q} = \frac{\Delta T}{T}$$

其中，ΔT 是温度的变化量，$W = \Delta p \Delta V$，如图所示。

从而热量为：

$$Q=T\frac{\Delta p\Delta V}{\Delta T}$$

由热力学第一定律：

$$\Delta U=T\frac{\Delta p\Delta V}{\Delta T}-p\Delta V$$

两边除以ΔV，并注意到 U 是 p、V 的函数，p、V、T 相互搭建了状态方程，取极限得到：

$$(\frac{\partial U}{\partial V})_T=T(\frac{\partial p}{\partial T})_V-p$$

（2） 此时，写出光子气系统的能量函数，得：

$$U=uV$$

u 是系统的能量密度，V 是系统的体积。

根据定义，这一“气体”模型满足内能方程的使用假设，将表达式代入内能方程得到：

$$u=T\frac{\frac{1}{3}du}{dT}-\frac{1}{3}u$$

整理得：

$$\frac{du}{u}=4\frac{dT}{T}$$

积分，引入常数项，得 Stephen-Boltzman 定律：

$$u=\sigma T^4$$

回代入光子气的状态表达式，得到光子气状态方程：

$$p=\frac{1}{3}\sigma T^4$$

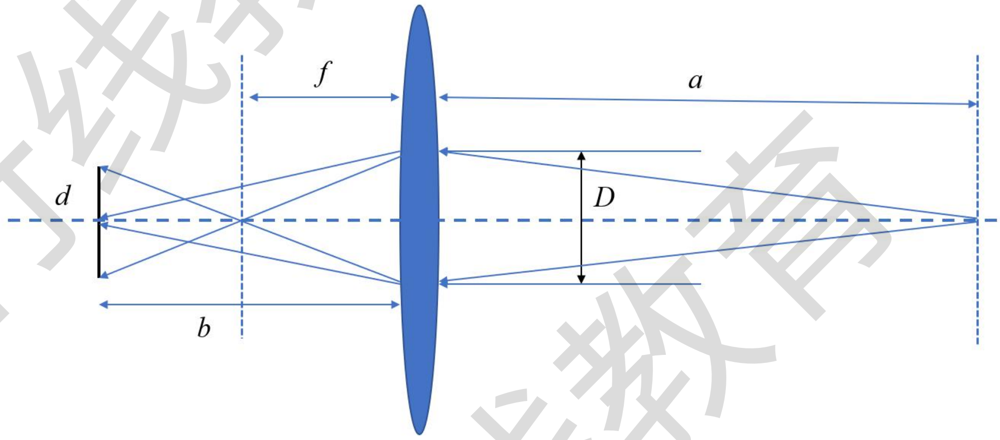
评分标准：

（1） 20 分；证明方法不唯一，证明结果正确、过程说明清楚满分。过程解释不清晰的根据具体情况酌情扣分。（一定要有文字说明！）

（2） 20 分；得到两个方程各自 10 分，不计过程分。

六、（40 分）

解析：



设小明最远能看清距离眼睛 a 以内的物体，他晶状体焦距的最大值为 f，眼轴长度为 b=23nm 已知，根据理想透镜成像公式：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \tag{1}$$

得到：

$$f=\frac{ab}{a+b} \tag{2}$$

视力表上的 E 距离小明 5m，可以近似为平行光入射，设其像距为 u，则：u=f

如图所示，设小明眯眼的眼皮为一小孔，直径为 D，则远方的“E”在小明的视网膜上形成的几何光斑的线度为：

$$\mathrm{d}=\frac{b-f}{f}D=\frac{b-\frac{ab}{a+b}}{\frac{ab}{a+b}}D=\frac{b}{a}D \tag{3}$$

该几何光斑对瞳孔的张角：

$$\Delta\theta_1=\frac{d}{b}=\frac{D}{a} \tag{4}$$

小明不眯眼时，D 为瞳孔直径，此时可测出他的真实视力 Y，则他能看到的最小的一行“E”对瞳孔的张角与此时几何光斑的张角相等。

假设“5.0”那一行“E”的大小为 h，则根据标准模型对数视力表的规则，视力值 Y 和对应“E”的大小 h_γ之间的关系为：

$$\log h_\gamma = \log h + (5.0 - Y)$$

$$h_\gamma = 10^{\log h + (5.0-Y)} = h \cdot 10^{5.0-Y} \cdot \frac{h}{L} \tag{5}$$

其中 L=5m 为视力表到眼睛的距离。于是：

$$Y = 5.0 - \log\frac{LD_t}{ah} \tag{6}$$

下面考虑小明眯眼：

小圆孔的衍射图像为同心的圆环，其中中央主极大为艾里斑，其张角：

$$\Delta\theta_2 = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{7}$$

其中λ为光波长。合理选择眯眼的程度，使得两个光斑的大小相等，即：

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 \tag{8}$$

$$\frac{D}{a} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{9}$$

得到：

$$D = \sqrt{1.22a\lambda} \tag{10}$$

此时视网膜收到的模糊的光斑的张角最小，为

$$\Delta\theta_{min} = \sqrt{1.22\frac{\lambda}{a}} \tag{11}$$

此时小明再测视力，视力提高为 X，则：

$$\Delta\theta_{min} = \sqrt{1.22\frac{\lambda}{a}} = \frac{h_X}{L} = 10^{5.0-X} \cdot \frac{h}{L} \tag{12}$$

得到：

$$X = 5.0 - \lg\frac{L\sqrt{1.22a\lambda}}{ah} \tag{13}$$

带入数据，得到：

$$X = Y + \log\frac{D_t}{\sqrt{1.22a\lambda}} = 5.0 + \log\frac{h}{L}\sqrt{\frac{a}{1.22\lambda}}$$

$$= 5.0 + 0.5(\log\frac{hD}{1.22\lambda L} - (5.0 - Y))$$

$$= 0.5\mathrm{Y} + 2.5 + 0.5\log\frac{hD}{1.22\lambda L}$$

$$= 0.5\mathrm{Y} + 2.5 + 0.39 = 0.5\mathrm{Y} + 2.89$$

反解可得：

$$\mathrm{Y} = 2(\mathrm{X} - 2.89) \tag{14}$$

评分标准：（1）~（8）式每个 3 分；（10）~（13）式每个 3 分 （14）式 4 分

七、（40 分）

（1） 考虑该模型是一个二体问题，假定共同的角速度为ω，两原子到质心的距离分别为r_1, r_2，由质心定理有：

$$\mathrm{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}r,\ r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}r$$

以角速度ω为参数，写出情况下经典的角动量、转动动能表达式，并联立得到：

$$\mathrm{L} = \mathrm{I}\omega = (\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1^2 + \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2^2)\omega$$

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I} = \frac{L^2}{2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2)}$$

考虑到角动量 L 的量子化条件，并代入r_1, r_2的表达式，得到 E：

$$\mathrm{E} = \frac{l(l+1)(m_1 + m_2)\hbar^2}{2m_1m_2r^2}$$

其中，l 是正整数。作差得到相邻两能级的能级差为：

$$\Delta\mathrm{E} = \frac{(l+1)(l+2)(m_1 + m_2)\hbar^2}{2m_1m_2r^2} - \frac{(l+1)(m_1 + m_2)l\hbar^2}{2m_1m_2r^2} = \frac{(m_1 + m_2)\hbar^2}{m_1m_2r^2}(l+1)$$

从而第 l 级的频率为：

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{(m_1 + m_2)\hbar}{2\pi m_1m_2r^2}(l+1)$$

（2） 由（1）看出，光谱频率为等差数列，且公差ν_d为：

$$\nu_d = \frac{(m_1 + m_2)\hbar}{2\pi m_1 m_2 r^2}$$

所以考虑将题目中的波长统一转化成频率，分别得到：

$$2.49, 3.12, 3.73, 4.35, 4.96$$

单位统一为$10^{12}Hz$。

逐差法求得：

$$\overline{\nu_d} = 6.17 \times 10^{11}\mathrm{Hz}$$

代入表达式，计算得到：

$$r = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\hbar}{2\pi m_1 m_2 \nu_d}} = 0.129\ nm$$

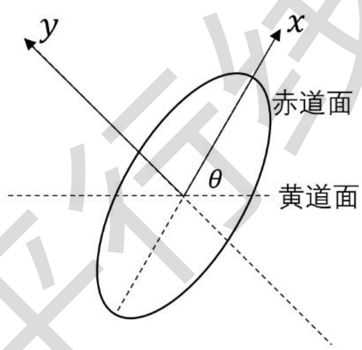
评分标准：

（1） 20 分；写出 E、L 关系 10 分，得到 E 的表达式 5 分，逐差并求出结果 5 分。

（2） 20 分；写出公差表达式 5 分，逐差法计算频率间隔 10 分，最终结果 5 分。

八、（40 分）

（1） 建立坐标系如图所示，z 轴方向位于 x、y 的右手方向，图中没有标出。其中，y 为地轴，z 轴垂直于日地连线，地心在坐标轴原点。



写出太阳的坐标：

$$P\ |_{太阳} = (-r_0 cos\theta, r_0 sin\theta, 0)$$

在地球上取一质量元Δm，其指向太阳的位置矢量为

$$\vec{r} = (-r_0 cos\theta - x, r_0 sin\vartheta - y, -z)$$

取$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$分别为 x, y, z 轴上的单位矢量，则太阳对Δm 的引力可以写为：

$$\Delta\vec{F}=\frac{GM_s\Delta m}{|\vec{r}|^3}\vec{r}=GM_s\Delta m\frac{(-r_0cos\theta-x)\vec{i}+(r_0sin\theta-y)\vec{j}-z\vec{k}}{\left((r_0cos\theta+x)^2+(r_0sin\theta+y)^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

注意到 $x\ll r_0$，利用牛顿二项式的一阶近似，取一阶小量得到：

$$\Delta F_x=\frac{GM_s\Delta m}{r_0^3}(-r_0cos\theta-x)\left(1+\frac{2xcos\theta-2ysin\theta}{r_0}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{GM_s\Delta m}{r_0^3}(-r_0cos\theta-x+3xcos^2\theta-3ysin\theta cos\theta)$$

$$\Delta F_y=\frac{GM_s\Delta m}{r_0^3}(r_0sin\theta-y)\left(1+\frac{2xcos\theta-2ysin\theta}{r_0}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{GM_s\Delta m}{r_0^3}(-r_0sin\theta-y-3xsin\theta cos\theta+3y^2\sin^2\theta)$$

$$\Delta F_z=-\frac{GM_s\Delta m}{r_0^3}z$$

注意到ΔF_z只与 z 有关，而地球在上述模型中关于 xoy 平面对称，且容易判断ΔF_z对质点的合力矩为 0。从而将计算简化，力矩表达式写为：

$$\Delta\vec{M}=\vec{r}\times\Delta\vec{F}_{x,y}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\times\left(\Delta F_x\vec{i}+\Delta F_y\vec{j}\right)$$

$$=-zF_y\vec{i}+z\Delta F_x\vec{j}+(x\Delta F_y-y\Delta F_x)\vec{k}$$

而地球受到太阳的总力矩为：

$$\vec{M}=\sum\Delta\vec{M}$$

为了计算 M，根据题目分别写出三方向的转动惯量，有：

$$\begin{cases}I_x=\sum\left(y^2+z^2\right)\Delta m=\beta m\left(R_E^2+R_P^2\right)\\ I_y=\sum\left(x^2+z^2\right)\Delta m=2\beta mR_E^2\\ I_z=\sum\left(x^2+y^2\right)\Delta m=\beta m\left(R_E^2+R_P^2\right)\end{cases}$$

从而解得：

$$\begin{cases}\sum x^2\Delta m=\sum z^2\Delta m=\beta mR_E^2\\ \sum y^2\Delta m=\beta mR_P^2\end{cases}$$

且地球关于各个轴是对称的，有：

$$\sum x\Delta m=\sum y\Delta m=\sum z\Delta m=\sum xy\Delta m=\sum yz\Delta m=\sum xz\Delta m=0$$

从而写出力矩的表达式：

$$\vec{\mathrm{M}}=\sum\Delta\vec{M}=\frac{-3GM_s}{r_0^3}sin\theta cos\theta\beta M_E\left(R_E^2-R_P^2\right)\vec{k}$$

（2） 根据（1）中的结果，分别写出太阳和月亮的（平均）力矩贡献：

$$\begin{cases}\overrightarrow{M_1}=\dfrac{-3GM_s}{r_0^3}sin\theta cos\theta\beta M_E\left(R_E^2-R_P^2\right)\vec{k}\\ \overrightarrow{M_2}=\dfrac{-3GM_m}{r_1^3}sin\theta cos\theta\beta M_E\left(R_E^2-R_P^2\right)\vec{k}\end{cases}$$

所以两者的合贡献为：

$$\overrightarrow{M_{合}}=\overrightarrow{M_1}+\overrightarrow{M_2}=-3\mathrm{GM_E}\beta\left(R_E^2-R_P^2\right)\sin\theta\cos\theta\left(\frac{M_s}{r_0^3}+\frac{M_m}{r_1^3}\right)$$

进而进动角速度大小为：

$$\omega_\mathrm{L}=\frac{\left|\overrightarrow{M_{合}}\right|}{L_E sin\theta}=\frac{\left|\overrightarrow{M_1}+\overrightarrow{M_2}\right|}{2\beta M_E R_E^2\omega_0 sin\theta}=-\frac{3Gcos\theta}{4\omega_0}\left(\frac{M_s}{r_0^3}+\frac{M_m}{r_1^3}\right)\left(1-\frac{R_P^3}{R_E^3}\right)$$

代入数据得到：$\omega_\mathrm{L}=7.78\times10^{-12}\,rad/s=51.9''/year$

可以看到这一数据和题目提供的$50.2''$/year 是很接近的，也说明了我们模型的近似正确。

评分标准：

（1） 20 分；写出三个方向的受力方程各 5 分，得到最后力矩结果 5 分。

（2） 20 分；写出太阳、月球对地球的力矩分别 5 分，得到合力矩 5 分，最终结果 5 分。