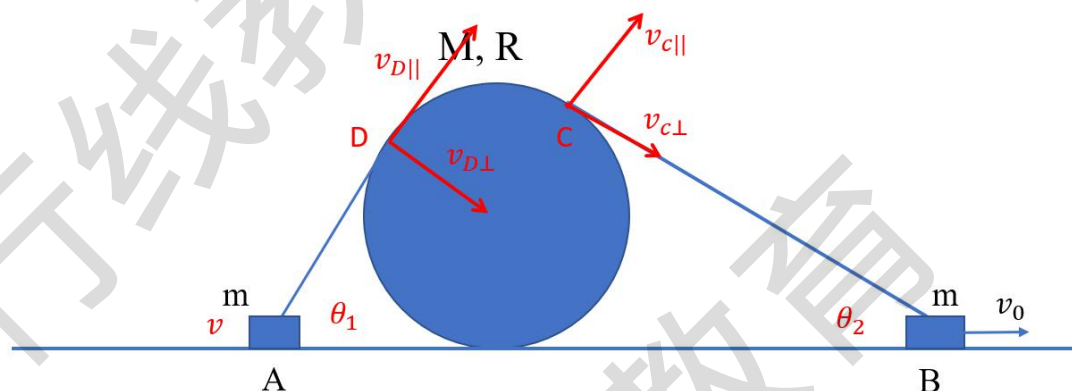


2020 年“根源杯”物理奥林匹克邀请赛（十七）解析

2020 年 2 月

一、（40 分）

解析：



如图所示，假设 A 的速度为 v ，圆盘的角速度为 ω 。可得系统的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \left[\frac{1}{2}M(R\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 \right] = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{4}MR^2\omega^2 \quad (1)$$

由动能定理可知外力的功率为：

$$P = \frac{dE_k}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + \frac{3}{2}MR^2\omega \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

下面分别求 ω 、 $\frac{d\omega}{dt}$ 、 v 、 $\frac{dv}{dt}$ 。

设绳与圆盘的两个切点分别为 C、D。由于绳和圆盘相互之间无滑动，故两者在 C、D 两点的速度分别相等，将这两点的速度向沿绳方向和垂直绳方向分解，如图所示。先考虑 C 点，对于圆盘上的点有：

$$v_{C||} = \omega R + \omega R \cos \theta_2 \quad (3)$$

$$v_{C\perp} = \omega R \sin \theta_2 \quad (4)$$

对于绳上的点：

$$v_{C||} = v_0 \cos(\theta_2) \quad (5)$$

$$v_{C\perp} = v_0 \sin \theta_1 + L_{AC} \frac{d\theta_2}{dt} \quad (6)$$

上面讲题目中的角度带入，利用 $v_{C\parallel}$ 相等，可解得：

$$\omega = \frac{\cos \theta_2 v_0}{1 + \cos \theta_2 R} \quad (7)$$

利用 $v_{C\perp}$ 相等，可解出

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{(\omega R - v_0) \sin \theta_2}{L_{AC}} = -\frac{\sin \theta_2}{1 + \cos \theta_2} \tan \frac{\theta_2}{2} \frac{v_0}{R} \quad (8)$$

现在将 ω 对时间 t 求导：

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{d\theta_2} \left[\frac{\cos \theta_2 v_0}{1 + \cos \theta_2 R} \right] \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\sin^3 \theta_2 v_0^2}{[1 + \cos \theta_2]^4 R} \quad (9)$$

再考虑D点，对于圆盘上的点

$$v_{D\parallel} = \omega R + \omega R \cos \theta_1 \quad (10)$$

$$v_{D\perp} = \omega R \sin \theta_1 \quad (11)$$

对于绳上的点

$$v_{D\parallel} = v_0 \cos(\theta_1) \quad (12)$$

$$v_{D\perp} = v_0 \sin \theta_2 - L_{BD} \frac{d\theta_1}{dt} \quad (13)$$

利用 $v_{D\parallel}$ 相等，可解出：

$$v = \omega R \frac{1 + \cos \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{1 + \cos \theta_1}{\cos \theta_1} \frac{\cos \theta_2}{1 + \cos \theta_2} v_0 \quad (14)$$

利用 $v_{C\perp}$ 相等，可得：

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{(v - \omega R) \sin \theta_1}{L_{BD}} = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \tan \frac{\theta_1}{2} \frac{\cos \theta_2 v_0}{1 + \cos \theta_2 R} \quad (15)$$

将 v 对时间 t 求导，得：

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d\omega}{dt} R \frac{1 + \cos \theta_1}{\cos \theta_1} + \omega R \frac{d}{d\theta_1} \left[\frac{1 + \cos \theta_1}{\cos \theta_1} \right] \cdot \frac{d\theta_1}{dt} \\ &= \left[\frac{\sin^3 \theta_2}{[1 + \cos \theta_2]^4} \frac{1 + \cos \theta_1}{\cos \theta_1} + \frac{\cos^2 \theta_2}{[1 + \cos \theta_2]^2} \frac{\sin^2 \theta_1}{\cos^3 \theta_1} \tan \frac{\theta_1}{2} \right] \frac{v_0^2}{R} \quad (16) \end{aligned}$$

将 $\theta_1 = 60^\circ$ 、 $\theta_2 = 30^\circ$ 代入：

$$\omega = 0.4641 \frac{v_0}{R}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.0103 \frac{v_0^2}{R}$$

$$v = 1.3923v_0$$

$$\frac{dv}{dt} = 0.7771 \frac{v_0^2}{R}$$

从而得到外力的功率：

$$P = mv \frac{dv}{dt} + \frac{3}{2} MR^2 \omega \frac{d\omega}{dt} = (1.082m + 0.007M) \frac{v_0^2}{R} \quad (17)$$

评分标准：（1）~（14）每个 2 分；（15）式 3 分；（16）式 5 分；（17）式 4 分。

二、（30 分）

解析：

考虑如图一所示系统，不妨设 $T_1 > T_2$

则整个装置在同时考虑塞贝克效应和珀耳帖效应（不考虑焦耳热效应）的基础上构成一可逆卡诺热机 （6 分）

从高温热源 T_1 处吸热功率：

$$q_1 = \pi_1 I \quad (3 \text{ 分})$$

从 T_2 端放热功率：

$$q_2 = \pi_2 I \quad (3 \text{ 分})$$

对外做功功率：

$$P = \varepsilon I = \alpha(T_1 - T_2)I \quad (6 \text{ 分})$$

由卡诺定理：

$$\frac{q_1}{T_1} = \frac{q_2}{T_2} \quad (6 \text{ 分})$$

以及能量守恒：

$$q_1 = q_2 + P \quad (3 \text{ 分})$$

可得：

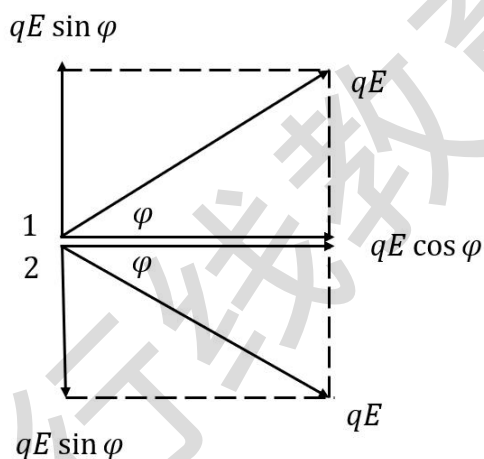
$$\pi_1 = \alpha T_1$$

$$\pi_2 = \alpha T_2$$

(3分)

三、(40分)

解析：球 1、2 相对桌面运动的示意图如图所示：



(1) 对于小球有：

$$a_{\perp} = \frac{qE \sin \phi}{m}, \quad \frac{1}{2} a_{\perp} (\Delta t)^2 = \frac{l}{2} \quad (1)$$

Δt 为小球走完 $l/2$ 路程所需的时间，为

$$\Delta t = \sqrt{\frac{ml}{qE \sin \phi}} \quad (2)$$

因管道相对桌面 AA' 方向运动，即得

$$v_1 = u_{\perp}(1) = a_{\perp} \Delta t = \sqrt{\frac{qEl \sin \phi}{m}} \quad (3)$$

对于管道，因两小球与其一起沿 MN 方向运动，有管道相对桌面的加速度：

$$a_{\parallel}' = \frac{2qE \cos \varphi}{4m} = \frac{qE \cos \varphi}{2m} \quad (4)$$

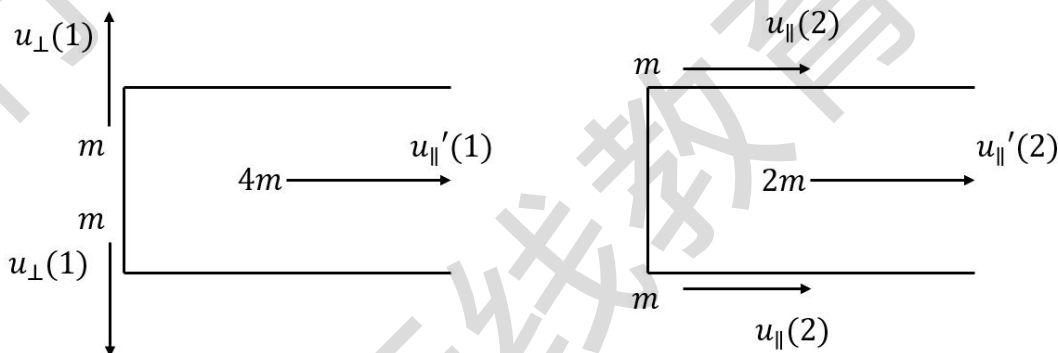
经过 Δt 时间所得末速度大小 $u_{\parallel}'(1)$ 为:

$$u_{\parallel}'(1) = a_{\parallel}' \Delta t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{qEl}{m \sin \varphi}} \cos \varphi \quad (5)$$

此过程中电场力总的做功量为:

$$W = \frac{1}{2} (2m) v_1^2 + \frac{1}{2} (4m) u_{\parallel}'^2(1) = qEl \left(\sin \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{2 \sin \varphi} \right) \quad (6)$$

(2) 球拐弯前后, 相对桌面运动学量在图中所示,



由动量、能量守恒方程可得:

$$2mu_{\parallel}(2) + 2mu_{\parallel}'(2) = 4mu_{\parallel}'(1) \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} (2m) u_{\parallel}(2)^2 + \frac{1}{2} (2m) u_{\parallel}'(2)^2 = \frac{1}{2} (2m) u_{\perp}(1)^2 + \frac{1}{2} (4m) u_{\parallel}'(1)^2 \quad (8)$$

计算化简可得:

$$v_2 = u_{\parallel}(2) - u_{\parallel}'(2) = \sqrt{2} u_{\perp}(1) = \sqrt{2} v_1 \quad (9)$$

解得:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2qEl \sin \varphi}{m}} \quad (10)$$

(3) 球拐弯后, 管道沿 MN 方向无加速度, 球沿 MN 方向相对桌面加速度同为相对管道加速度, 大小为:

$$a_{\parallel} = \frac{qE \cos \varphi}{m} \quad (11)$$

球相对管道初速度大小为 v_2 ，末速度为 v_3 ，则有

$$v_3^2 = v_2^2 + 2la_{\parallel} = \frac{2qEl(\sin \varphi + \cos \varphi)}{m} \quad (12)$$

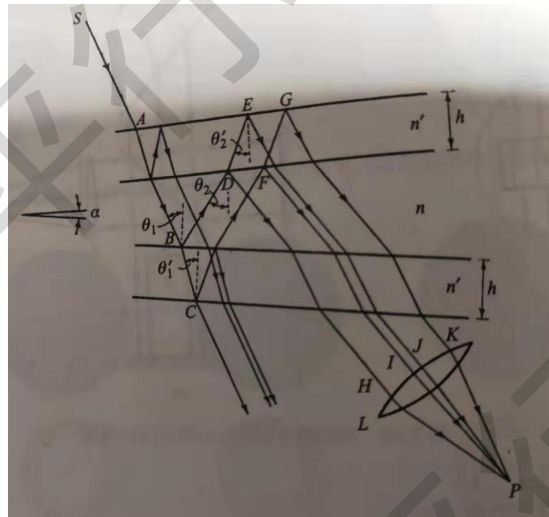
解得：

$$v_3 = \sqrt{\frac{2qEl(\sin \varphi + \cos \varphi)}{m}} \quad (13)$$

评分标准：(1) ~ (5) 式每个 3 分；(6) 式 4 分；(7) ~ (9) 式每个 3 分；(10) 式 4 分；
(11) 式 2 分；(12) ~ (13) 式每个 3 分。

四、(40 分)

解析：



- (1) 如图所示，考虑两次及以下反射的光线，会有两组平行光线出射，于焦点处汇聚于两不同点，由于入射角有小幅变化范围，而光线间相差会随入射角改变，故在入射角改变范围不大时，会在焦平面上形成两组分离的干涉条纹 (10 分)

由图知，两组出射平行光线夹角 2α ，故焦平面上两组条纹中心间距 $2ft \tan \alpha$ (5 分)

(2) 4 条出射光线间有相差关系 (HIJK 对应出射光线依次标号为 1, 2, 3, 4) :

$$\Delta S_{21} = 2nh\cos\theta'_1$$

$$\Delta S_{31} = 2nh\cos\theta'_2$$

$$\Delta S_{43} = 2nh\cos\theta'_1$$

(6 分)

又有几何关系:

$$\theta_1 = \theta + \alpha$$

$$\theta_2 = \theta + 2\alpha$$

$$\theta_3 = \theta + 3\alpha$$

(3 分)

折射定律:

$$\sin\theta_1 = n\sin\theta'_1$$

$$\sin\theta_2 = n\sin\theta'_2$$

(4 分)

且若设入射光振幅为 A, 则有四条出射光线振幅关系 (由于 α 很小, 忽略各界面入射角变化) :

$$A_1 = A(tt')^2 r^2 = A(1-r^2)^2 r^2$$

$$A_2 = A(tt')^3 r'r = -A(1-r^2)^3 r^2$$

$$A_3 = A(tt')^3 r'r = -A(1-r^2)^3 r^2$$

$$A_4 = A(tt')^4 r'^2 = A(1-r^2)^4 r^2$$

(4 分)

由于 r 很小, 故其实四条光线振幅大小近似相同:

$$A_1 = -A_2 = -A_3 = A_4 = A_0$$

(2 分)

综上可得合成光强和出射角 θ_3 关系:

$$I = A_0^2 \left| 1 - e^{i2nh\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\theta_3 - 2\alpha)}{n}\right)^2}} - e^{i2nh\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\theta_3 - \alpha)}{n}\right)^2}} + e^{i2nh\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\theta_3 - 2\alpha)}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\theta_3 - \alpha)}{n}\right)^2}\right)} \right|^2 \quad (4 \text{分})$$

而焦平面上坐标 x 处对应出射角:

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{x}{f}\right) + \theta + \alpha \quad (2 \text{分})$$

代入即得光强分布 $I(x)$

五、(40分)

解析:(1)由电场叠加原理:分 $D = D_1 + D_2$, 使得 $\nabla \cdot D_1 = \rho_1/\epsilon_0$, $\nabla \cdot D_2 = \rho_2/\epsilon_0$. $E = E_1 + E_2$, $D_1 = \epsilon_0 \epsilon_r E_1$, $D_2 = \epsilon_0 \epsilon_r E_2$, 则空间场为 ρ_1, ρ_2 叠加结果, 其中 ρ_1 为无穷远电荷, 其产生均匀外电场, ρ_2 为均匀体分布电荷 ρ_0 (3分)

先解 $E_1 V_1$, 有设 $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, $\frac{4}{3}\pi\sigma_0 a^3, E_{\text{内}} = E_0 - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$,

$$P = \sigma_0 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_{\text{内}} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\left(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\right)$$

$$\text{得 } \sigma_0 = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{2 + \epsilon_r} \epsilon_0 E_0, \quad (2 \text{分})$$

$$V_1 = \frac{\rho \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos\theta = \left(\frac{(\epsilon_r - 1)a^3}{2 + \epsilon_r r^2} - r\right) E_0 \cos\theta \quad (2 \text{分})$$

$$\text{再解 } E_2 V_2, \text{ 有 } E_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad V_2 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} \quad (2 \text{分})$$

$$\text{故 } V_T = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} + \left(\frac{(\epsilon_r - 1)a^3}{2 + \epsilon_r r^2} - r\right) E_0 \cos\theta \quad (1 \text{分})$$

(2)

a) 设 $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, 则 $p = \frac{4}{3} \pi \sigma_0 a^3$, (3分)

$$\text{有 } E_{\text{外}} = \frac{p(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{a^3\sigma_0}{3\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}), E_{\text{内}} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \quad (3\text{分})$$

$$\text{则有 } D_{\text{外}}|_{r=a} = \frac{\sigma_0}{3} \epsilon_r (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) \quad P_{\text{内}} = \left(\frac{\sigma_0}{3}(x_{e0} + 1) + P_0\right)\hat{x} \quad (3\text{分})$$

$$\text{有 } \sigma_0 = \frac{3P_0}{2\epsilon_r - \epsilon_{r0}} \quad (\text{答案 } 1\text{分})$$

b) 由 $\nabla \cdot D = \rho_f$, $\nabla \times E = 0$, ρ_f 为外加电场的自由电荷分布,

$\vec{D} = \epsilon_0(1 + x_{e0})\vec{E} + \vec{P}_0$, 分 $E = E_1 + E_2$, $D_1 = \epsilon_0(1 + x_{e0})\vec{E}_1$, $\vec{D}_2 = \epsilon_0(1 + x_{e0})\vec{E}_2 + \vec{P}_0$, 使得 $\nabla \cdot D_1 = \rho_f$, $\nabla \cdot D_2 = 0$, 易验证此分法满足麦氏方程。(提出电场分解 3分, 验证 4分)

先解 $E_2 D_2$, 有 $\nabla \cdot D_2 = 0$, $\vec{D}_2 = \epsilon_0(1 + x_{e0})\vec{E}_2 + \vec{P}_0$, $\nabla \times E_2 = 0$,

即为 a) 中结果, 令 $\epsilon_r = 1$, 有 $\sigma = \frac{3\vec{P}_0 \cdot \hat{r}}{1 - x_{e0}} = \frac{3P_0 \cos\theta}{1 - x_{e0}}$ ($E_2 D_2$ 的解共 6分, 过程 4分, 结果 2分,

可以不利用 a) 中结论)

再解 $E_1 D_1$, 有 $\nabla \cdot D_1 = \rho_f$, $\nabla \times E_1 = 0$, $D_1 = \epsilon_0(1 + x_{e0})\vec{E}_1$, 为正常介质球极化, 得: $(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0})x_{e0}\epsilon_0 = \sigma_0$ (分开解的 σ_0 并不一样, 注意!)

$$\text{可得 } \sigma_0 = \frac{3\epsilon_0 x_{e0} E_0}{3 + x_{e0}}, \text{ 即 } \sigma = \frac{3\epsilon_0 x_{e0} \vec{E}_0 \cdot \hat{r}}{3 + x_{e0}} \quad (E_1 D_1 \text{ 的解共 } 6\text{分, 过程 } 4\text{分, 结果 } 2\text{分})$$

$$\text{综上所述, 有 } \sigma_T = \frac{3\epsilon_0 x_{e0} E_0}{3 + x_{e0}} \cos\theta + \frac{3P_0 \cos\theta}{1 - x_{e0}} \quad (\text{最终结果 } 1\text{分})$$

六、(50分)

解析:

(1)

1.1

由题干信息知小球接受到的入射辐射光强:

$$I_0 = \frac{PG}{4\pi R^2}$$

(2分)

则小球散射总功率:

$$P_{\text{散}} = \frac{kr^6}{\lambda^4} \frac{PG}{4\pi R^2}$$

(2分)

设雷达半径为 r_0 , 则接受到的回波功率为:

$$P_{\text{回}} = P_{\text{散}} \left(\frac{\pi r_0^2}{4\pi R^2} \right)$$

(2分)

现在估算 r_0 :

辐射集中区域半张角

$$\Delta\theta = \frac{0.61\lambda}{r_0}$$

(3分)

由G定义

$$G = \frac{4\pi}{\pi\Delta\theta^2}$$

(2分)

得:

$$r_0^2 = \frac{(0.61\lambda)^2 G}{4}$$

(2分)

则可得回波总功率:

$$P_{\text{回}} = \frac{(0.61)^2 \pi}{4} \frac{kr^6 PG^2}{\lambda^2 (4\pi R^2)^2}$$

(2分)

1.2

在物质团的情况下，要考虑多大范围内的反射要计算进去。

由于雷达发射的脉冲长度为 L ，故实际有效反射深度为 $L/2$ 。(即此深度内反射脉冲可以同时到达雷达)

(6分)

故有：

$$P_{\text{回}} = \frac{(0.61)^2 \pi}{4} \frac{kPG^2}{\lambda^2 (4\pi R^2)^2} r^6 N = \frac{(0.61)^2 \pi}{4} \frac{kPG^2}{\lambda^2 (4\pi R^2)^2} r^6 \frac{\pi(\Delta\theta R)^2 L}{2} n = \frac{0.61^2 kPGLr^6 n}{32\lambda^2 R^2}$$

(7分)

2.1

$$\text{由于 } \eta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2R \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{故可得: } v_r = F(R_2 - R_1) = \frac{F\lambda}{4\pi} (\eta_2 - \eta_1) \quad (3 \text{ 分})$$

2.2

当反射时间差 t 比两次发生脉冲时间间隔 $\frac{1}{F}$ 大的话会发生距离折叠，无法判断：

$$R_{\text{max}} = \frac{c}{2F}$$

(5分)

当两次相差 η 比 2π 大时，会发生速度模糊：

$$V_{\text{max}} = \frac{F\lambda}{2}$$

(5分)

2.3

图一是向右的匀速风场（风的速度大小，方向与高度无关）

(2分)

图二是向右的风场，但是风速随高度增高而增大（方向与高度无关）

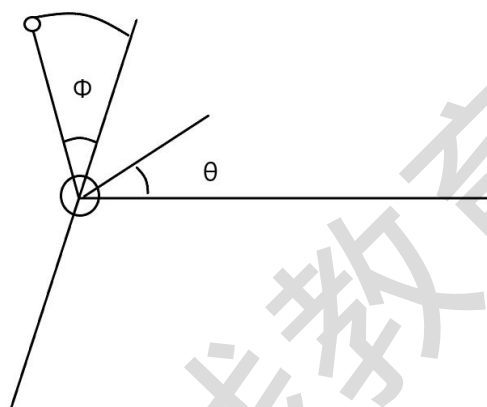
(2分)

图三是风向随高度变化的风场

(2分)

七、(50分)

解析：(1)



恒星会照亮朝向恒星的行星一侧表面，若观察者能看到的被照亮部分的直射面积为 S_0

直射面积：即在恒星方向的投影面积

则行星反射光度：

$$L_{\text{反}} = \frac{LS_0}{4\pi R^2}$$

(2分)

由几何关系知：

观察者能看到的亮的部分即求观察者半球（观察者能看到的一半）和恒星照亮半球的交，则形状一定是球等分状(切西瓜)。且张角 η 即为两半球截面的法线夹角，则有：

$$\cos\eta = \sin\phi\sin\theta$$

(2分)

式中 ϕ 为在行星轨道平面看行星的转角（如图），有：

$$\phi = \frac{2\pi}{P}t + \phi_0$$

而观察者能看到的亮的部分在恒星方向投影面积：

$$S_0 = \frac{\pi r^2 - \pi r \cdot r \cos \eta}{2} = \frac{\pi r^2}{2} (1 - \sin \phi \sin \theta)$$

(3分)

则：

$$L_{\text{反}} = \frac{LS_0}{4\pi R^2} = \frac{Lr^2}{8R^2} (1 - \sin \left(\frac{2\pi}{P} t + \phi_0 \right) \sin \theta)$$

(3分)

(2)

2.1

频谱移动周期即为恒星运动周期，运用二体动力学方程：

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{Mm}{M+m} \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

(1分)

式中 m 为行星质量， r 为恒行星距离

又有恒星在视线方向最大速率为 $v \sin \theta$ (轨道平面法线与观察者观察方向夹角为 θ , v 为恒星圆轨道运动速率) 则由多普勒：

$$\frac{v \sin \theta}{c} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

则： $v \geq \frac{c \Delta \lambda}{\lambda}$

(1分)

又有：

$$v = \frac{2\pi}{T} r \frac{m}{M+m}$$

综上并考虑到： $M + m \approx M$

(2分)

得：

$$m \geq \frac{c\Delta\lambda}{\lambda} \left(\frac{TM^2}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}}$$

(1分)

此即行星质量下限

2.2

由上问得：

$$m = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda \sin\theta} \left(\frac{TM^2}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{m_0}{\sin\theta}$$

m_0 为质量下限

则 $m > 3m_0$ 的概率即：

$$\frac{2 \arcsin \frac{1}{3}}{\pi}$$

(2分)

(3)

3.1

降低 1%即遮住 1%的面积，则行星半径是恒星半径的 1/10

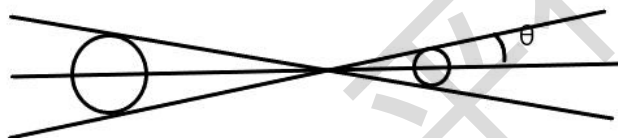
(2分)

猜测原因：

恒星有自转，由于多普勒效应，不同位置辐射光谱不太一样，从而行星挡住不同位置的光，会使能量按波长分布有小的变化

(3分)

3.2



如图有 $\theta = \arctan \frac{r_1+r_2}{R}$

(1分)

由于行星在运转，故可能产生行星凌日现象区域立体角：

$$\Omega = 4\pi\sin\theta$$

(2分)

故可看到该现象概率 $P = \frac{\Omega}{4\pi} = \sin\theta = \frac{r_1+r_2}{\sqrt{R^2+(r_1+r_2)^2}}$

(2分)

4.1

由等效原理，光线轨迹与粒子同，由于偏转角很小，故可认为沿直线匀速运动，通过求垂直方向动量改变来求偏转角：

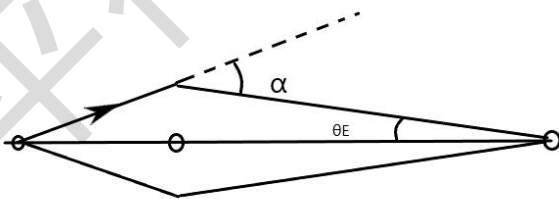
$$\alpha = \frac{\Delta p_{\text{垂直}}}{p} = \frac{1}{p} \int \left(\frac{GM \left(\frac{p}{c} \right)}{\frac{b}{\sin\theta}} \right) \sin\theta dt = \frac{GM}{c^2 b} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2GM}{c^2 b}$$

(6分)

4.2

4.2.1

源天体发出的光线到达地球径迹如图：



由于旋转对称性，会观察到一个圆环（爱因斯坦环）

(2分)

特征角度量（圆环半径对观察者张角）设为 θ_E

则有：

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{4GM}{c^2 D_2 \theta_E}$$

又有小角近似下的正弦定理：

$$\frac{(D_1 + D_2)}{\alpha} = \frac{D_1}{\theta_E}$$

(2分)

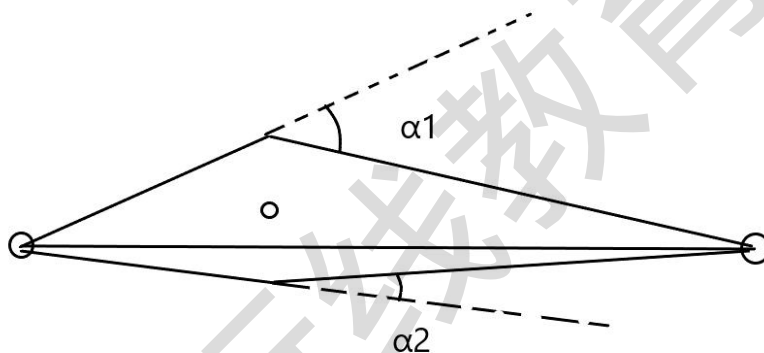
得:

$$\theta_E = \left(\frac{D_1}{(D_1 + D_2)} \frac{4GM}{c^2 D_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(1分)

4.2.2

源天体发出的光线到达地球径迹如图:



由于不再具有轴对称性, 故只有图示两个点像

(2分)

特征角度量 θ_1, θ_2

对上侧光线:

$$\alpha_1 = \frac{4GM}{c^2 b_1} = \frac{4GM}{c^2 (D_2 \theta_1 - h)}$$

(2分)

且有:

$$\frac{(D_1 + D_2)}{\alpha_1} = \frac{D_1}{\theta_1}$$

(1分)

解得:

$$\theta_1 = \frac{h}{2D_2} + \sqrt{\left(\frac{h}{2D_2}\right)^2 + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2} \frac{4GM}{c^2 D_2}\right)^2}$$

(1分)

同理可解得:

$$\theta_2 = -\frac{h}{2D_2} + \sqrt{\left(\frac{h}{2D_2}\right)^2 + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2} \frac{4GM}{c^2 D_2}\right)^2}$$

(1分)

4.3

原因:

恒星作为引力透镜对光线起到聚焦作用, 故亮度随时间有个大的突起, 小突起则是由于行星作为微引力透镜对光线的再次聚焦

(2分)

则易知当行星轨道半径为 $D_2\theta_E$ 时由于被恒星弯折的光线会经过附近, 故最容易产生可观测的亮度变化

(3分)

八、(30分)

解析:

A 杆参考系测得 B 杆相对其速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} = \frac{-2v}{1 + \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (1)$$

即 A 认为 B 相对其左行, 速度大小为 $v_{AB} = \frac{2v}{1 + \beta^2}$, 故 B 认为 A 相对其右行, 速度大小 v_{BA} 与 v_{AB} 相同。或者说, A、B 间相对速度大小可以记为:

$$\beta_{AB} = \frac{v_{AB}}{c}$$

由相对论公式可得:

$$\sqrt{1 - \beta_{AB}^2} = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \quad (2)$$

(1) S 系中

点事件: A_1 、 B_1 、 O 相遇 $\{0,0\}$

$$\text{点事件: } A_1、B_2、O \text{ 相遇 } \left\{ \frac{L}{2}\sqrt{1 - \beta^2}, \frac{\sqrt{1 - \beta^2}L}{2v} \right\} \quad (3)$$

S 系认为本系用两个静钟测得上述两个点事件所经过的时间间隔为:

$$T_{S \text{ 静}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}L}{2v} - 0 \quad (4)$$

S 系认为相对 S 系一个运动的时钟 A_1 测得该过程所经过的时间间隔为

$$T_{A \text{ 动}} = \sqrt{1 - \beta^2} T_{S \text{ 静}} \quad (5)$$

得:

$$t_{A1} = \frac{(1 - \beta^2)L}{2v} \quad (6)$$

B 系认为本系用两个静钟, 测得上述两个点事件的时间间隔为:

$$T_{B \text{ 静}} = t_{B2} - 0$$

B 系认为相对 B 系的一个运动的时钟 A_1 , 测得该过程所经过的时间间隔为

$$T_{A \text{ 动}} = \sqrt{1 - \beta_{AB}^2} T_{B \text{ 静}} \quad (7)$$

得:

$$t_{B2} = \frac{t_{A1}}{\sqrt{1 - \beta_{AB}^2}} = \frac{(1 - \beta^2)L}{2v} \cdot \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{(1 + \beta^2)L}{2v} \quad (8)$$

(2) 点事件: A_1 、 B_1 、 O 相遇 $\{0,0\}$

$$\text{点事件: } B_1、A_2、O \text{ 相遇 } \left\{ -\frac{L}{2}\sqrt{1 - \beta^2}, \frac{\sqrt{1 - \beta^2}L}{2v} \right\} \quad (9)$$

S 系认为本系用两个静钟测得上述两个点事件所经过的时间间隔为:

$$T_{S \text{ 静}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}L}{2v} - 0 \quad (10)$$

S 系认为相对 S 系一个运动的时钟 B_1 测得该过程所经过的时间间隔为

$$T_{B \text{ 动}} = \sqrt{1 - \beta^2} T_{S \text{ 静}} \quad (11)$$

得:

$$t_{B1} = \frac{(1 - \beta^2)L}{2v} \quad (12)$$

A 系中前述两个点事件的坐标分别为:

$$\{0, 0\}、\{-L, t_{A2}\}$$

由时空变换, 得:

$$t_{A2} = \frac{[\frac{\sqrt{1-\beta^2}v}{2v} - \frac{v}{c^2}(\frac{L}{2}\sqrt{1-\beta^2})]}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(1+\beta^2)L}{2v} \quad (13)$$

(3) S 系中

点事件: $A_1、B_1、O$ 相遇 $\{0,0\}$

$$\text{点事件: } A_2、B_2、O \text{ 相遇 } \{0, \frac{\sqrt{1-\beta^2}L}{v}\} \quad (14)$$

A 系认为本系用两个静钟测得上述两个点事件所经过的时间间隔为:

$$T_{Ae静} = t_{A22} - 0 \quad (15)$$

A 系认为相对 A 系一个运动的时钟 O , 测得该过程所经过的时间间隔为

$$T_{Se动} = \sqrt{1-\beta^2}T_{Ae静} \quad (16)$$

得:

$$t_{A22} = \frac{T_{Se动}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{v} \quad (17)$$

B 系认为 S 系的 O 点相对 B 系以速度 v 向右运动, 经过 L 路程到达 B_2 点:

$$t_{B22} = \frac{L}{v} \quad (18)$$

评分标准: (1) ~ (2)、(4) ~ (8)、(10) ~ (12)、(13)、(15) ~ (18) 式每个 2 分。