“根源杯”数学奥林匹克邀请赛参考答案

2020 年 01 月

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 设实数 x 满足 $\log_8(\log_{32} x) = \log_{32}(\log_8 x)$, 则 $\log_4 x =$ ________.

答案： $\dfrac{25\sqrt{15}}{18}$.

解析： 设 $\log_2 x = a$, $\log_2 a = b$. 则 $\log_8(\log_{32} x) = \log_8\left(\dfrac{a}{5}\right) = \dfrac{b-\log_2 5}{3}$.

类似地, $\log_{32}(\log_8 x) = \log_{32}\left(\dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{b-\log_2 3}{5}$.

由条件, $\dfrac{b-\log_2 5}{3} = \dfrac{b-\log_2 3}{5}$, 即 $\dfrac{2\log_2 a}{15} = \dfrac{2b}{15} = \dfrac{\log_2 5}{3} - \dfrac{\log_2 3}{5} = \log_2\left(\dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}\right)$, $a^{\frac{2}{15}} = \dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}$, 则 $a = \left(\dfrac{5^5}{3^3}\right)^{\frac{1}{2}}$. 故 $\log_4 x = \dfrac{a}{2} = \dfrac{25\sqrt{15}}{18}$.

2. 集合 $\{1,2,3,\cdots,9,10,2019,2020\}$ 的非空子集中, 元素之和为 4 的倍数的非空子集个数为 ________.

答案： 1023.

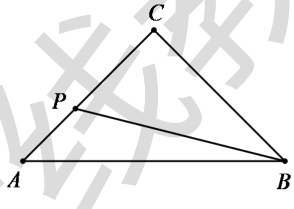
解析： 对 10 元集 $\{3,4,\cdots,10,2019,2020\}$ 的每个子集 A, 四个集合 $A, A\cup\{1\}, A\cup\{2\}, A\cup\{1,2\}$ 中有且仅有一个的元素和是 4 的倍数. 因此, $\{1,2,\cdots,10,2019,2020\}$ 的子集中, 恰有 $2^{10}=1024$ 个子集的元素和为 4 的倍数, 其中一个为空集. 故所求非空子集个数为 1023.

3. 设 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 直角边长为 1, 点 P 是其边界上任意一点. 则 $PA\cdot PB\cdot PC$ 的最大值是 ________.

答案： $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

解析： 不妨设 $CA=CB=1, AB=\sqrt{2}$.

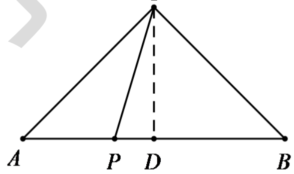
当 P 在直角边上时, 不妨设 P 在边 AC 上. 则



$$PA\cdot PC \leqslant \left(\frac{PA+PC}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ PB \leqslant AB = \sqrt{2},$$

且两个等号不同时取到. 故

$$PA\cdot PB\cdot PC < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



当 P 在斜边上时, 取 AB 中点 D. 则 $DA=DB=DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, CD\perp AB$. 设 $PD=a$ $(0\leqslant a\leqslant\sqrt{2})$, 则

$$PA\cdot PB = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-a\right),$$

$$PC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2},$$

故

$$PA\cdot PB\cdot PC=\left(\frac{1}{2}-a^2\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+a^2}\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+a^2}$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-a^2\right)+\left(\frac{1}{2}+a^2\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

当 $a=0$, 即 P 为 AB 中点时等号成立. 故所求最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

4. 设复数 a,b,c 的模长均为 1, $a+b+c=1+\mathrm{i}$, 这里 i 为虚数单位. 则 $|ab+bc+ca|=$ ________.

答案： $\sqrt{2}$.

解析： 由题意有

$$\begin{aligned}\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right|&=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\cdot\frac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}}\\&=\sqrt{\frac{(a\bar{b}c\bar{c}+\bar{a}bc\bar{c}+b\bar{c}a\bar{a}+\bar{b}ca\bar{a}+c\bar{a}b\bar{b}+\bar{c}ab\bar{b})+(a\bar{a}b\bar{b}+b\bar{b}c\bar{c}+c\bar{c}a\bar{a})}{(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{a}+\bar{c}a)+(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})}}\\&=\sqrt{\frac{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{a}+\bar{c}a+3}{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{a}+\bar{c}a+3}}=1.\end{aligned}$$

所以 $|ab+bc+ca|=|a+b+c|=\sqrt{2}$.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上点 P 的横坐标为 $\dfrac{3}{2}a$, 且 P 到右焦点的距离大于它到左准线的距离. 则该双曲线两条渐近线所夹锐角的取值范围是 ________.

答案： $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

解析： 记 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，$e=\dfrac{c}{a}>1$，则由双曲线第二定义及条件知：

$$e\left|\frac{3}{2}a-\frac{a^2}{c}\right|>\left|\frac{3}{2}a-\left(-\frac{a^2}{c}\right)\right|.$$

两边除以 a 得

$$e\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{e}\right|>\left|\frac{3}{2}+\frac{1}{e}\right|.$$

又 $e>1$，则

$$\frac{3}{2}e-1>\frac{3}{2}+\frac{1}{e},$$

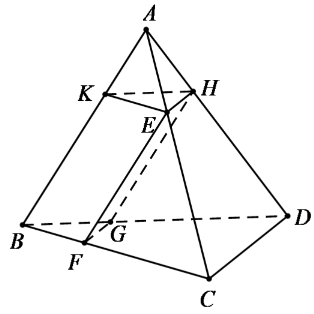
$e>2$ 或 $e<-\dfrac{1}{3}$（舍去），即 $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>2$，$\dfrac{b}{a}>\sqrt{3}$. 进而求得两渐近线所夹锐角的范围是 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

6. 四面体 $ABCD$ 被 10 个两两平行的平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{10}$ 分成 9 部分, 其中 $AB\subset\pi_1,CD\subset\pi_{10}$. 对 $i=1,2,\cdots,9$, π_i 与 π_{i+1} 的距离记为 d_i, 四面体在平面 π_i,π_{i+1} 之间的部分体积记为 V_i. 若 $d_1=d_2=\cdots=d_9$, $P=V_1+V_3+V_5+V_7+V_9$, $Q=V_2+V_4+V_6+V_8$, 则 $\dfrac{P}{Q}=$ ________.

答案： $\dfrac{365}{364}$.

解析： 如图, 设 E,F,G,H 分别在棱 AC,BC,BD,AD 上, 平面 $EFGH$ 与 AB,CD 均平行, AB 到平面 $EFGH$ 的距离 $=t\cdot$ 异面直线 AB,CD 的距离. 则 $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{BG}{BD}=\dfrac{AH}{AD}=t\in(0,1)$. 过 EH 作与平面 BCD 平行的平面与棱 AB 交于 K, 则 $\dfrac{AK}{AB}=t$.

设四面体 $ABCD$ 体积为 1, 则 $\dfrac{V_{AEHK}}{V_{ABCD}}=\left(\dfrac{AE}{AC}\right)^3=t^3$, 故 $V_{AEHK}=t^3$, 所以



$$\frac{3V_{AEHK}}{V_{EHK-FGB}}=\frac{AK}{AB}=\frac{t}{1-t}\Rightarrow V_{EHK-FGB}=\frac{1-t}{t}\cdot 3t^3=3t^2(1-t).$$

故

$$V_{AB-EFGH}=t^3+3t^2(1-t)=3t^2-2t^3,$$

即

$$V_i=\left[3\left(\frac{i}{9}\right)^2-2\left(\frac{i}{9}\right)^3\right]-\left[3\left(\frac{i-1}{9}\right)^2-2\left(\frac{i-1}{9}\right)^3\right]=\frac{1}{9^3}[27(2i-1)-2(3i^2-3i+1)].$$

故 $Q=\dfrac{1}{9^3}[27(3+7+11+15)-2(7+37+91+169)]=\dfrac{364}{729}$, 则 $P=1-Q=\dfrac{365}{729}$, 所以 $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{365}{364}$.

7. 实数 x,y 满足 $(x-3)^2+4(y-1)^2=4$, 则 $\dfrac{x+y-3}{x-y+1}$ 的取值范围是 ________.

答案： $[-1,1]$.

解析： 设 $x=3+2\cos\theta, y=1+\sin\theta, \theta\in\mathbb{R}$，

$$t=\frac{x+y-3}{x-y+1}=\frac{2\cos\theta+\sin\theta+1}{2\cos\theta-\sin\theta+3}\ \text{（显然分母恒非零）},$$

整理得

$$(2t-2)\cos\theta-(t+1)\sin\theta+3t-1=0.$$

设 $u=\tan\dfrac{\theta}{2}, \theta\neq(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$，则上式化为：

$$(2t-2)\frac{1-u^2}{1+u^2}-(t+1)\frac{2u}{1+u^2}+(3t-1)=0,$$

即

$$(t+1)u^2-2(t+1)u+(5t-3)=0. \quad ①$$

当 $t\neq-1$ 时，①有解 $\Leftrightarrow \Delta=4(t+1)^2-4(t+1)(5t-3)\geqslant 0\Leftrightarrow -1<t\leqslant 1$（注意到 u 的取值范围是 $\mathbb{R}$）. 当 $t=-1$ 时，①不成立，但当 $\theta=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$ 时，$t=-1$. 故 t 的取值范围是 $[-1,1]$.

8. 正实数 x,y,z 满足 $\sqrt{x^2+y^2}+z=1$, 则 $xy+2xz$ 的最大值是 ________.

答案： $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

解析： 由条件，$x^2=(1-z)^2-y^2=(1-z+y)(1-z-y)$，故

$$\begin{aligned}(xy+2xz)^2=x^2(y+2z)^2&=\frac{1}{3}(1-z+y)(3-3z-3y)(y+2z)(y+2z)\\&\leqslant\frac{1}{3}\left[\frac{(1-z+y)+(3-3z-3y)+(y+2z)+(y+2z)}{4}\right]^4\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

即 $xy+2xz\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, y=z=\dfrac{1}{3}$ 时，$xy+2xz$ 取到最大值 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

二、解答题（本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

9.（本题满分 16 分）

设 $\{a_n\}$ 为正项等差数列. 对任意正整数 n 和正实数 p, 证明:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^p) \geqslant [1+(a_1a_n)]^{\frac{p}{2}}.$$

证明： 设 $\{a_n\}$ 公差为 d. 对 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned} a_ia_{n+1-i} &= [a_1+(i-1)d]\,[a_1+(n-i)d] = a_1^2+(n-1)a_1d+(i-1)(n-i)d^2 \\ &\geqslant a_1^2+(n-1)a_1d = a_1\,[a_1+(n-1)d] = a_1a_n. \end{aligned}$$

…………………（4 分）

故

$$\begin{aligned} \left(1+a_i^p\right)\left(1+a_{n+1-i}^p\right) &= 1+\left(a_i^p+a_{n+1-i}^p\right)+\left(a_ia_{n+1-i}\right)^p \\ &\geqslant 1+2\left(a_ia_{n+1-i}\right)^{\frac{p}{2}}+\left(a_ia_{n+1-i}\right)^p \\ &= \left[1+\left(a_ia_{n+1-i}\right)^{\frac{p}{2}}\right]^2 \\ &\geqslant \left[1+\left(a_1a_n\right)^{\frac{p}{2}}\right]^2. \end{aligned}$$

…………………（10 分）…………………（12 分）

故

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\left(1+a_i^p\right)\left(1+a_{n+1-i}^p\right)\right] \geqslant \left[1+\left(a_1a_n\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{2n},$$

即

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+a_i^p\right) \geqslant \left[1+a_1a_n^{\frac{p}{2}}\right]^n.$$

…………………（16 分）

10.（本题满分 20 分）

若函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与实数 x_0 满足 $f(x_0)=0$, 且存在实数 $c>0$, 使得对任意正实数 $h<c$, $f(x_0-h)\cdot f(x_0+h)<0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的变号零点. 函数

$$f(x)=\prod_{k=1}^{2020}\cos\frac{x}{k}$$

在区间 $(0,1010\pi)$ 上有多少个变号零点?

解： 对 $1 \leqslant k \leqslant 2020$，$x=\dfrac{k(2m+1)\pi}{2}$ $(m\in\mathbb{Z})$ 是函数 $\cos\dfrac{x}{k}$ 的变号零点. $f(x)$ 的零点为 $x_i=\dfrac{\pi i}{2}$ $(1\leqslant i<2020)$，且 x_i 为 $f(x)$ 的变号零点当且仅当有奇数个 $k\in\{1,2,\cdots,2020\}$，使得 x_i 是函数 $\cos\dfrac{x}{k}$ 的变号零点. …………………（5 分）

x_i 是函数 $\cos\dfrac{x}{k}$ 的变号零点当且仅当 i 是 k 的倍数，且 $\dfrac{i}{k}$ 是奇数 $(1\leqslant i<2020, 1\leqslant k\leqslant 2020)$. 故 x_i 是函数 $f(x)$ 的变号零点当且仅当 i 有奇数个奇因数（i 的每个奇因数 t 对应着唯一的一个 $k=\dfrac{i}{t}\leqslant 2020$，使得 x_i 是函数 $\cos\dfrac{x}{k}$ 的变号零点）. …………………（10 分）

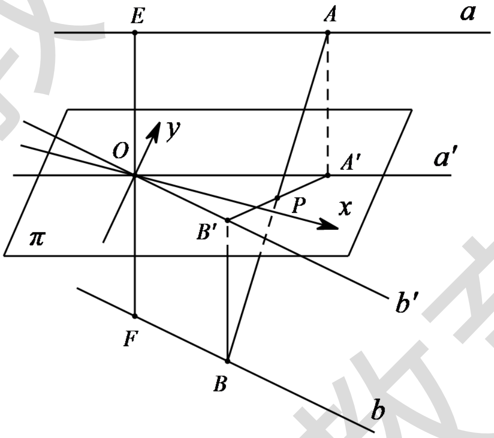
设 $i=2^lj$，l 为非负整数，j 为奇数，则 i 有奇数个奇因数 $\Leftrightarrow$ j 有奇数个奇因数 $\Leftrightarrow$ j 是完全平方数

$\Leftrightarrow i$ 是完全平方数或完全平方数的 2 倍. ………………（15 分）

$1,2,\cdots,2019$ 中有 $[\sqrt{2019}]=44$ 个完全平方数，有 $\left[\sqrt{\dfrac{2019}{2}}\right]=31$ 个数是完全平方数的 2 倍. 故变号零点共有 $44+31=75$ 个. ………………（20 分）

11.（本题满分 20 分）

空间中两条异面直线 a,b 的距离为 2, 夹角为 $\frac{\pi}{3}$. 长为 4 的线段 AB 两端点分别在直线 a,b 上运动, 求线段 AB 中点的轨迹.



解： 设 a,b 的公垂线与 a,b 分别交于点 E,F，线段 EF 的中点为 O. 过点 O 且与 a,b 均平行的平面为 π，点 A,B 在 π 上的投影分别为 A',B'. 连结 $OA',OB',A'B'$.

由 $AA'=OE=OF=BB'$ 及 $AA'\parallel BB'$ 知，四边形 $AA'BB'$ 为平行四边形，线段 AB 的中点 P 也是 $A'B'$ 的中点，P 为 π 与 AB 的交点. 由勾股定理，

$$|AB|^2=|A'B'|^2+|EF|^2,\quad |A'B'|=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}.$$

………………（5 分）

在 π 上，过点 O 分别作与 a,b 平行的直线，记为 a',b'. 则 $A'\in a',B'\in b'$，a' 与 b' 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$. 以点 O 为原点，a' 与 b' 夹角（锐角）的角平分线为 x 轴，在平面 π 内建立平面直角坐标系 xOy. 设 $|OA'|=m,|OB'|=n,P(x,y),m,n\geqslant 0$.

若点 A',B' 分别在第一、四象限或第三、二象限（含原点），则 $\angle A'OB'=\frac{\pi}{3}$. 由余弦定理，

$$|A'B'|^2=m^2+n^2-2mn\cos\frac{\pi}{3},$$

即

$$m^2+n^2-mn=12. \qquad ①$$

若 A',B' 分别在第一、四象限，则它们的坐标分别为

$$A':\left(m\cos\frac{\pi}{6},m\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m,\frac{1}{2}m\right),\ B':\left(n\cos\frac{\pi}{6},-n\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n,-\frac{1}{2}n\right),$$

$A'B'$ 中点

$$P(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(m+n),\frac{1}{4}(m-n)\right).$$

若 A', B' 分别在第三、二象限，类似地 $A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}m, -\frac{1}{2}m\right), B'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}n, \frac{1}{2}n\right)$，

$$P(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}(m+n), -\frac{1}{4}(m-n)\right).$$

……………………（10 分）

以上两种情况分别求得 $(m,n)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y, \frac{2}{\sqrt{3}}x-2y\right)$ 或 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-2y, -\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right)$. 代入①，

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-2y\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-2y\right)=12,$$

即

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1.$$

……………………（15 分）

若点 A', B' 分别在第一、二象限或第三、四象限（含原点），则 $\angle A'OB'=\frac{2\pi}{3}$. 由余弦定理

$$|A'B'|^2=m^2+n^2-2mn\cos\frac{2\pi}{3},$$

即

$$m^2+n^2+mn=12. \qquad ②$$

类似地，有 $P(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(m-n), \frac{1}{4}(m+n)\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}(m-n), -\frac{1}{4}(m+n)\right)$，则

$$(m,n)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y, -\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right) \text{ 或 } \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-2y, \frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right),$$

代入②：

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x+2y\right)=12,$$

即

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1.$$

由连续性可知线段 AB 中点的轨迹是椭圆（能取到椭圆上每一点），其中心为 a, b 的公垂线段中点 O，长半轴长为 3，短半轴长为 1，所在平面过点 O 且与 a, b 都平行，长轴与 a, b 夹角均为 $\frac{\pi}{6}$.

……………………（20 分）