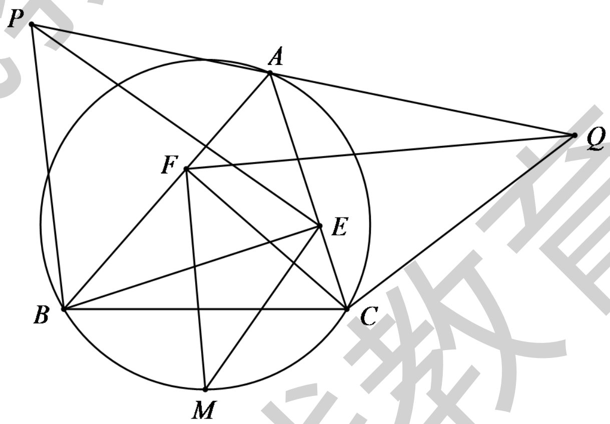
“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

2020 年 01 月

一、（本题满分 40 分）

设点 E,F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AC,AB 上，且 $BE\perp AC,CF\perp AB$. M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BC}$（不含点 A）的中点，P,Q 两点在 $\angle BAC$ 的外角平分线上，且 $EP\perp EM,FQ\perp FM$.

求证：$BP=CQ$.



二、（本题满分 40 分）

记 α 为方程 $x^2+x=5$ 的正根，正整数 n 及非负整数 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ 满足

$$\sum_{k=0}^{n}C_k\alpha^k=2019.$$

求 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_k$ 的最小值.

三、（本题满分 50 分）

设正整数 a,b,c,d,e,f 之和 $s=p^n$，其中 p 为素数，n 为正整数. 已知

$$s\mid(abc+def),\ s\mid(ab+bc+ca-de-ef-fd).$$

证明：$\min\{a,b,c\}+\min\{d,e,f\}\geqslant p$.

四、（本题满分 50 分）

给定互素的正整数 m,n，$n>2m$. 凸 n 边形 $A_0A_1\cdots A_{n-1}$ 满足：$\angle A_iA_{i+m}A_{i+2m}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 均相等，且 $|A_0A_m|\geqslant|A_mA_{2m}|\geqslant|A_{2m}A_{3m}|\geqslant\cdots\geqslant|A_{(n-1)m}A_{nm}|$，这里下标按模 n 理解. 将该凸 n 边形所有边和对角线的中点染为红色.

用 $f(C)$ 表示圆 C 上红色点的数目. 对平面上所有圆 C，求 $f(C)$ 的最大值，并求达到该最大值的圆 C 的个数.