

03

第三讲 巧用不变量

六年级数学

平行线教育线上课程
2020 年

PARALLEL EDUCATION

应当随时学习，学习一切；应该集中
全力，以求知道得更多，知道一切。

—— 高尔基

第三讲 寻找不变量

智慧导航

1. 学习不变量的三种类型
2. 用不变量解决分数应用题
3. 用不变量解决比例应用题

智慧基石

例 1

甲数和乙数的比是 5:6，乙数和丙数的比是 3:2，求甲数和丙数的比是多少？

$$\begin{aligned} \text{甲:乙} &= 5:6 = 5:6 \\ \text{乙:丙} &= 3:2 = 6:4 \end{aligned} \Rightarrow \text{甲:丙} = 5:4$$

练一练

学校把 102 棵树苗按各班人数分给六年级三个班。一班和二班分得树苗的比为 2:3，二班和三班分得树苗的比为 5:3。求三个班分别分到多少棵？

$$\begin{aligned} \text{一:二} &= 2:3 = 10:15 \\ \text{二:三} &= 5:3 = 15:9 \end{aligned} \Rightarrow \text{一:二:三} = 10:15:9$$

$$\begin{aligned} 1 \text{份: } &102 \div (10+15+9) = 3 \text{ (棵)} \\ \text{一: } &10 \times 3 = 30 \text{ (棵)} \\ \text{二: } &15 \times 3 = 45 \text{ (棵)} \\ \text{三: } &9 \times 3 = 27 \text{ (棵)} \end{aligned}$$

例 2

大宽和艾迪原来的体重比为 10:3，艾迪长胖了 40 千克后，两人的体重比变为 2:1，则艾迪现在的体重为多少千克？

$$\begin{aligned} \text{原 宽:迪} &= 10:3 = 10:3 \\ \text{现 宽:迪} &= 2:1 = 10:5 \\ 1 \text{份: } &40 \div (5-3) = 20 \text{ (kg)} \\ \text{艾迪: } &5 \times 20 = 100 \text{ (kg)} \end{aligned}$$

练一练

某校原有篮球和排球共 30 个，其中篮球与排球的比是 7:3，又买进几个排球，这时排球的个数占总数的 40%，则买进多少个排球？

$$\text{原 篮:排} = 7:3 = 21:9$$

$$\text{现 篮:排} = 3:2 = 21:14$$

$$1\text{份: } 30 \div (21+9) = 1(\text{个})$$

$$\text{买进: } (14-9) \times 1 = 5(\text{个})$$

例 3

涵涵老师与希希老师的课时费之比为 5:4。公司决定对这两位助教老师加快培养，给两位老师的课时费都上调了 20 元，她们的课时费之比变成了 6:5。上调之后，这两位老师的课时费之和为多少元？

$$\text{原 涵:希:差} = 5:4:1 = 5:4:1$$

$$\text{现 涵:希:差} = 6:5:1 = 6:5:1$$

$$1\text{份: } 20 \div (6-5) = 20(\text{元})$$

$$20 \times (6+5) = 220(\text{元})$$

练一练

15 年前父亲年龄是儿子的 7 倍，10 年后，父亲年龄是儿子的 2 倍。今年父亲多少岁？

$$15\text{年前 父:儿:差} = 7:1:6 = 7:1:6$$

$$10\text{年后 父:儿:差} = 2:1:1 = 12:6:6$$

$$1\text{份: } (15+10) \div (12-7) = 5(\text{岁})$$

$$10\text{年前: } 12 \times 5 = 60(\text{岁})$$

$$\text{今年父: } 60 - 10 = 50(\text{岁})$$

例4

甲、乙两人拥有邮票张数的比是 5:4, 如果甲给乙 5 张邮票, 则甲、乙两人邮票张数的比变成 4:5. 两人共有邮票多少张?

$$\text{原 甲:乙:和} = 5:4:9 = 5:4:9$$

$$\text{现 甲:乙:和} = 4:5:9 = 4:5:9$$

$$1\text{份: } 5 \div (5-4) = 5(\text{张})$$

$$5 \times 9 = 45(\text{张})$$

练一练

奥斑马与小泉共有若干本书, 其中奥斑马的书是小泉的 $\frac{3}{5}$, 后来小泉给了奥斑马 3 本书,

这样奥斑马的书是小泉的 $\frac{5}{7}$. 那么小泉原有多少本书?

$$\text{原 奥:泉:和} = 3:5:8 = 9:15:24$$

$$\text{现 奥:泉:和} = 5:7:12 = 10:14:24$$

$$1\text{份: } 3 \div (10-9) = 3(\text{本})$$

$$\text{原泉: } 15 \times 3 = 45(\text{本})$$

例5

有甲、乙两桶油, 甲桶油的质量是乙桶的 $\frac{5}{2}$ 倍, 从甲桶中倒出 5 千克油给乙桶后, 甲桶

油的质量是乙桶的 $\frac{4}{3}$ 倍, 乙桶中原有油多少千克?

$$\text{原 甲:乙:和} = 5:2:7 = 5:2:7$$

$$\text{现 甲:乙:和} = 4:3:7 = 4:3:7$$

$$1\text{份: } 5 \div (5-4) = 5(\text{kg})$$

$$\text{原乙: } 5 \times 2 = 10(\text{kg})$$

练一练

生产一种零件，次品数是正品数的 $\frac{1}{9}$ ，后来复查，发现正品中又有3个不合格，这时次

品数是正品数的 $\frac{3}{22}$ ，共生产了多少个零件？

$$\text{原} \quad \text{次:正:和} = 1:9:10 = 5:45:50$$

$$\text{现} \quad \text{次:正:和} = 3:22:25 = 6:44:50$$

$$1\text{份}: 3 \div (6-5) = 3(\text{个})$$

$$3 \times 50 = 150(\text{个})$$

例6

四位小朋友合购一个价值600元的生日礼物送给同学。第一位小朋友付的钱是其他小朋友付的总数的 $\frac{1}{3}$ ；第二位小朋友付的钱是其他小朋友付的总数的 $\frac{1}{4}$ ；第三位小朋友付的

钱是其他小朋友付的总数的 $\frac{1}{5}$ 。请问第四位小朋友付了多少钱？

$$\text{第一位付的钱占总数的} \frac{1}{4}$$

$$\text{第二位付的钱占总数的} \frac{1}{5}$$

$$\text{第三位付的钱占总数的} \frac{1}{6}$$

$$\text{第四位付的钱占总数的} 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{23}{60}$$

$$600 \times \frac{23}{60} = 230(\text{元})$$

练一练

兄弟4人合买一台彩电，老大出的钱是其他三人出钱总数的 $\frac{1}{2}$ ，老二出的钱是另外三人

出钱总数的 $\frac{1}{3}$ ，老三出的钱是另外三个人出钱总数的 $\frac{1}{4}$ ，老四比老三多出40元，问这台

彩电多少钱？

$$\text{老大出的钱占出钱总数的} \frac{1}{3}$$

$$\text{老二出的钱占出钱总数的} \frac{1}{4}$$

$$\text{老三出的钱占出钱总数的} \frac{1}{5}$$

$$\text{老四出的钱占出钱总数的} 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{13}{60}$$

$$40 \div \left(\frac{13}{60} - \frac{1}{5} \right) = 2400(\text{元})$$

智慧高峰

分数 $\frac{1997}{2000}$ 的分子和分母同时加上一个相同的自然数所得的新分数化简后是 $\frac{2005}{2006}$ ，求这

个自然数是多少？

$$\text{原：分子：分母：差} = 1997 : 2000 : 3 = 1997 : 2000 : 3$$

$$\text{现 分子：分母：差} = 2005 : 2006 : 1 = 6015 : 6018 : 3$$

$$6015 - 1997 = 4018$$

$$\text{或 } 6018 - 2000 = 4018$$

智慧攻略

1. 重点：

A. 三个不变量

(1) 和不变：一加一减和不变

(2) 差不变：同加同减差不变

(3) 单一量不变：改变其中某个量，其它量不变

2. 巧用不变量：

A. 转化单位 1

B. 统一份数

C. 增加或减少的用虚线或其它颜色

智慧磨炼

1. A 比 B 多 2 倍， B 比 C 多 $\frac{1}{2}$ ，求 $A:B:C$ 。

$$A:B = 3:1 = 9:3$$

$$B:C = \frac{3}{2}:1 = 3:2$$

$$\Rightarrow A:B:C = 9:3:2$$

2. 某班有学生 48 名, 女生占全班的 $\frac{3}{8}$, 之后又转来若干名女生, 这时女生恰好占全班人数的 $\frac{2}{5}$, 那么, 转来了多少名女生?

$$\text{原 女:男} = 3:5 = 9:15$$

$$\text{现 女:男} = 2:3 = 10:15$$

$$1\text{份: } 48 \div (9+15) = 2(\text{名})$$

$$\text{转来: } 2 \times (10-9) = 2(\text{名})$$

3. 东东喝一瓶浓度是 40% 的饮料, 喝到剩 60 克饮料时, 觉得饮料太浓了, 就加了一些水, 将饮料的浓度兑成了 30%, 那么, 东东加了多少克水?

$$\text{原 物质:水} = 2:3 = 6:9$$

$$\text{现 物质:水} = 3:7 = 6:14$$

$$1\text{份: } 60 \div (6+9) = 4(\text{克})$$

$$\text{加水: } 4 \times (14-9) = 20(\text{克})$$

4. 今年, 小军和小勇的年龄比是 3:5, 两年后, 两人的年龄比是 2:3. 那么, 小军和小勇今年分别多少岁?

$$\text{今年 军:勇:差} = 3:5:2 = 3:5:2$$

$$\text{2年后 军:勇:差} = 2:3:1 = 4:6:2$$

$$1\text{份: } 2 \div (4-3) = 2(\text{岁})$$

$$\text{今军: } 2 \times 3 = 6(\text{岁})$$

$$\text{今勇: } 2 \times 5 = 10(\text{岁})$$

5. 三个容积相等的瓶子里装满了硫酸溶液, 硫酸与水的体积比分别是 1:2, 1:3, 1:4. 把三瓶硫酸溶液混合后, 硫酸与水的体积比是多少?

$$\text{① 硫酸:水:总} = 1:2:3 = 20:40:60$$

$$\text{② 硫酸:水:总} = 1:3:4 = 15:45:60$$

$$\text{③ 硫酸:水:总} = 1:4:5 = 12:48:60$$

$$\text{硫酸:水} = (20+15+12):(40+45+48) = 47:133$$