03

第三讲

旋转结构题型大揭秘-从基础到中考

八年级数学

平行线教育线上课程

2020 年

PARALLEL EDUCATION

如果别人思考数学的真理像我一样深入持久，他也会找到我的发现。

——高斯

第三讲 旋转结构题型大揭秘-从基础到中考

智慧导航

1．旋转的性质

（1）对应点到旋转中心的距离相等

（2）对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角

（3）旋转前后的图形全等

2．旋转三要素

（1）旋转中心；（2）旋转方向；（3）旋转角

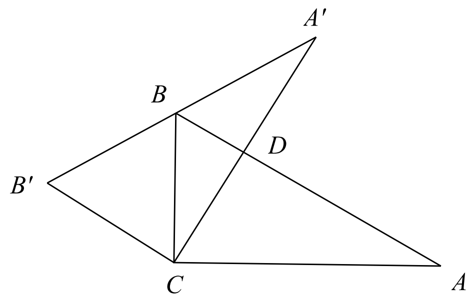
3．旋转作图

根据旋转的性质可知，对应角都相等，对应线段也相等，由此可以通过作相等的角，在角的边上截取相等的线段的方法，找到对应点，顺次连接得出旋转后的图形

智慧基石

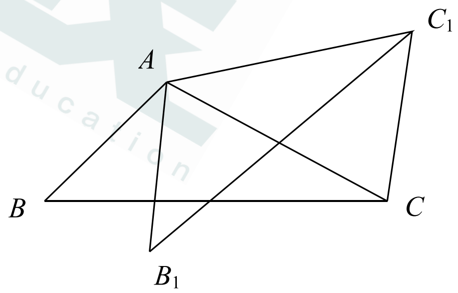
例 1

1. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=35^\circ$，以 C 为旋转中心，将$\angle ABC$ 旋转到$\triangle A'B'C$ 的位置，点 B 在斜边 $A'B'$ 上，则$\angle BDC$ 为 105°.



练一练

如图，已知$\triangle ABC$，将$\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 40°得到$\triangle AB_1C_1$，点 B、C 的对应点分别为 B_1、C_1，若$\angle BCC_1=100^\circ$，则$\angle B_1C_1C$ 的度数为 40°.



例 2

1. 每个小方格都是边长为 1 个单位长度的正方形，在建立平面直角坐标系后，$\triangle ABC$ 的顶点均在格点上，

（1）写出 A、B、C 的坐标.

（2）以原点 O 为中心，将 $\triangle ABC$ 围绕原点 O 逆时针旋转 180°得到 $\triangle A_1B_1C_1$，画出 $\triangle A_1B_1C_1$.

（3）求（2）中 C 到 C_1 经过的路径以及 OB 扫过的面积.

解：(1) $A(4,-2)$ $B(6,-4)$ $C(5,-1)$

(2) 如图所示

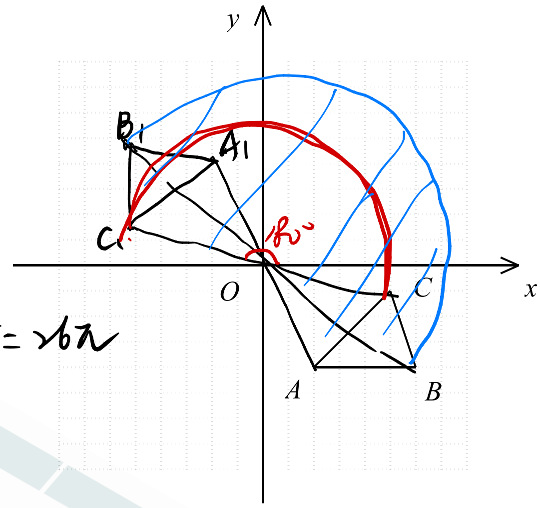
(3) 路径长：

$OC=\sqrt{26}$

∴路径长：$\frac{1}{2}\times 2\pi r=\sqrt{26}\pi$

OB扫过的面积：$OB=2\sqrt{13}$

$S=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\times\pi\times(2\sqrt{13})^2=26\pi$



练一练

如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 E 成中心对称.

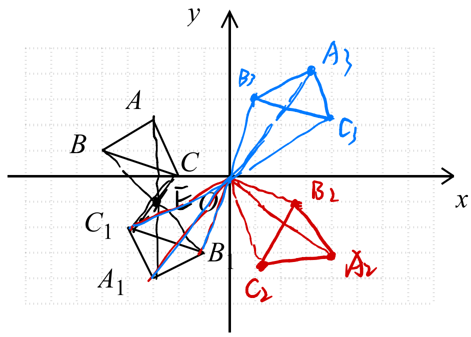
（1）画出对称中心 E，并写出点 E 的坐标 $(-3,-1)$；

（2）画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕点 O 逆时针旋转 90°后的 $\triangle A_2B_2C_2$；

（3）画出与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 O 成中心对称的 $\triangle A_3B_3C_3$.

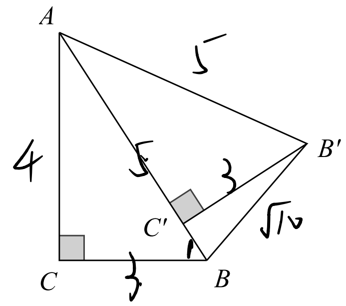
(2) 如图所示

(3) 如图所示



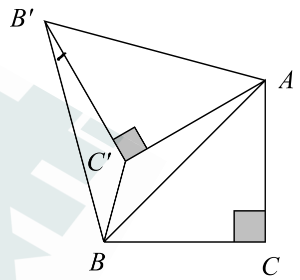
例 3

1．如图，将 Rt$\triangle ABC$ 绕着顶点 A 逆时针旋转使得点 C 落在 AB 上的 C' 处，点 B 落在 B' 处，联结 BB'，如果 $AC=4$，$AB=5$，那么 $BB'=$ ___$\sqrt{10}$___．



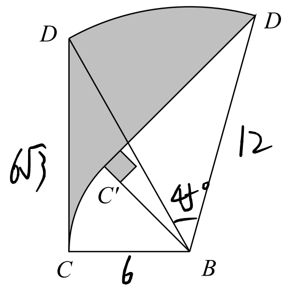
练一练

在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，将$\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 60°到$\triangle AB'C'$ 的位置，连结 $C'B$、BB'，则 $\angle BB'C'=$ ___$15°$___．



例 4

1．一对完全相同的三角板如图摆放，开始时有一边重合，现将其中一块三角板绕点 B 顺时针转 45°，同时另一块三角板静止不动，若 $BC=6\text{cm}$，则 CD 边扫过的面积（图中阴影部分）为 $\frac{27}{2}\pi$.



8

360

$S_{阴}=S_{\triangle BDC}+S_{扇DBD'}-S_{\triangle BC'D'}-S_{扇CBC'}$

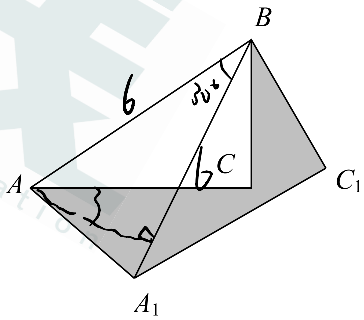
$=S_{扇DBD'}-S_{扇CBC'}$

$=\frac{1}{8}\pi\times12^2-\frac{1}{8}\pi\times6^2$

$=\frac{27}{2}\pi$

练一练

如图，在△ABC 中，$AB=6$，将△ABC 绕点 B 按逆时针方向旋转 30°后得到△A_1BC_1，则阴影部分的面积为 9.



$S_{阴}=S_{\triangle ABA_1}+S_{\triangle A_1BC_1}-S_{\triangle ABC}$

$=S_{\triangle ABA_1}$

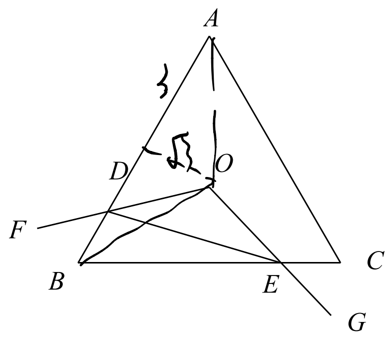
$=\frac{1}{2}\times6\times3$

$=9$

例 5

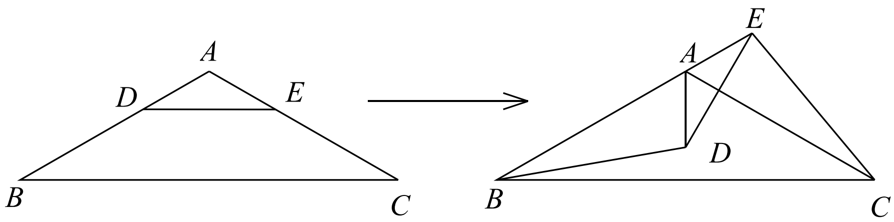
1. 等边三角形 ABC 的边长为 6，点 O 是三边垂直平分线的交点，$\angle FOG=120^\circ$，$\angle FOG$ 的两边 OF，OG 与 AB，BC 分别相交于 D，E，$\angle FOG$ 绕 O 点顺时针旋转时，下列四个结论正确的是 ① ④ .

① $OD=OE$；② $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle BDE}$；③ $S_{四边形ODBE}=\frac{27\sqrt{3}}{8}$；④ $\triangle BDE$ 周长最小值是 9.



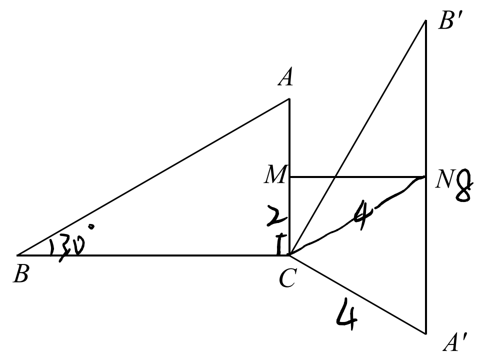
练一练

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle B=30^\circ$，点 D、E 分别为 AB、AC 上的点，且 $DE\parallel BC$．将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转至点 B、A、E 在同一直线上，连接 BD、EC．下列结论：① $\triangle ADE$ 的旋转角为 120° ② $BD=EC$ ③ $BE=AD+AC$ ④ $DE\perp AC$，其中正确的有 ② ③ ④



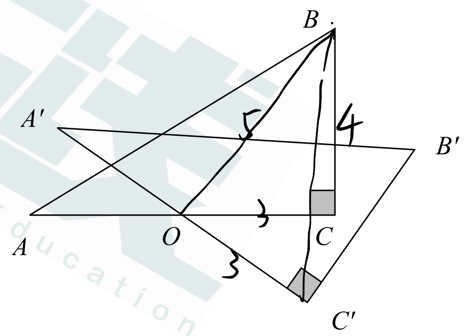
例 6

1．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，将$\triangle ABC$绕顶点 C 顺时针旋转得到$\triangle A'B'C$，M 是 AC 的中点，N 是 $A'B'$的中点，连接 MN，若 $AC=4$，$\angle ABC=30^\circ$，则线段 MN 的最小值为____2____.



练一练

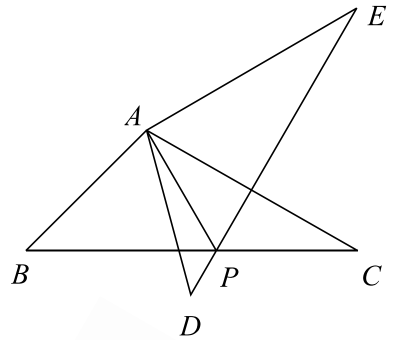
如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，$BC=4$，点 O 是 AC 的中点，以 O 为旋转中心，将$\triangle ABC$绕点 O 旋转一周，A、B、C 的对应点分别为 A'、B'、C'，则 BC' 的最大值为____8____.

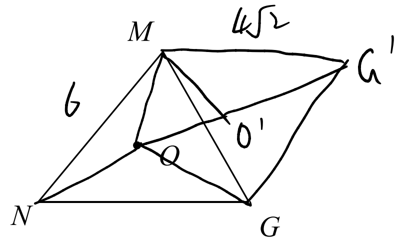


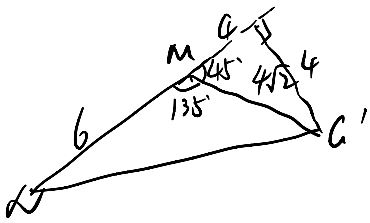
智慧高峰

1. **问题背景：**如图1，将$\triangle ABC$绕点A逆时针旋转60°得到$\triangle ADE$，DE与BC交于点P，可推出结论：$PA+PC=PE$.

问题解决：如图2，在$\triangle MNG$中，$MN=6$，$\angle M=75^\circ$，$MG=4\sqrt{2}$．点O是$\triangle MNG$内一点，则点O到$\triangle MNG$三个顶点的距离和的最小值是$\underline{2\sqrt{29}}$.







智慧攻略

1．重点：旋转的性质及应用

2．难点：

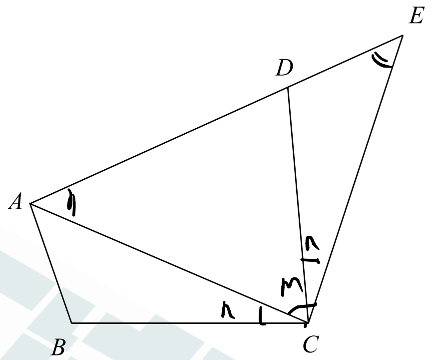
A．理解旋转产生的点的运动路径

B．构造旋转型的全等

C．最值的判断

智慧磨炼

1．如图，将$\triangle ABC$绕点C顺时针旋转$m°$得到$\triangle EDC$，若点A、D、E在同一直线上，$\angle ACB=n°$，则$\angle ADC$的度数是$\left(\frac{180-m}{2}+n\right)^{\circ}$（用$m$、$n$表示）．



$\frac{180-m}{2}$

$\therefore \angle ADC=\angle E+\angle DCE=\frac{180-m}{2}+n$

2．如图，在平面直角坐标系中，O为坐标原点，$\triangle ABC$各顶点坐标分别为$A(-2,3)$，$B(-3,2)$，$C(-1,1)$

（1）画出$\triangle ABC$关于x轴的对称的图形$\triangle A_1B_1C_1$；

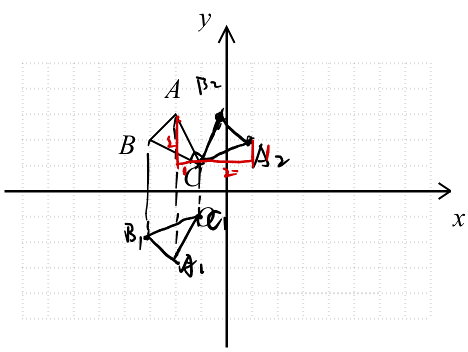
（2）将$\triangle ABC$绕点C顺时针旋转$90°$得到$\triangle A_2B_2C$，请在网格中画出$\triangle A_2B_2C$，并直接写出线段A_2C_1的长．

解：(1) 如图所示

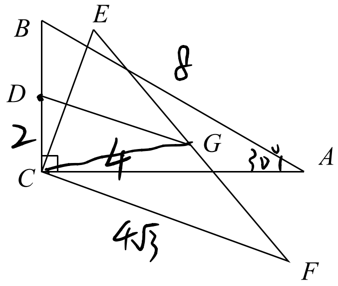
(2) $A(-2,3)$ $A_2(1,2)$

$C(-1,1)$ $C_1(-1,-1)$

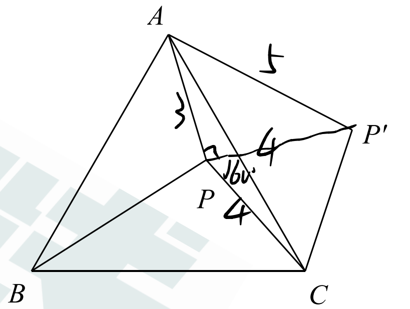
$\therefore A_2C_1=\sqrt{13}$



3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$AC=4\sqrt{3}$，BC 的中点为 D，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转任意一个角度得到$\triangle FEC$，EF 的中点为 G，连接 DG 在旋转过程中，DG 的最大值是__6__.



4. 如图，P 是等边三角形 ABC 内一点，将线段 CP 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到线段 CP'，连接 AP'. 若 $PA=3$，$PC=4$，$PB=5$，则四边形 $APCP'$ 的面积为__$4\sqrt{3}+6$__



$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2+\frac{1}{2}\times 3\times 4$

$=4\sqrt{3}+6$