第三讲　中考必杀技题之反比例函数综合

例1

例 1

1. 将 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度．则所得图象的解析式为 $y=\frac{1}{x-1}+1$．

练一练

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上有一点 $P(2,n)$，将点 P 向右平移 1 个单位，再向下平移 1 个单位得到点 Q．若点 Q 也在该函数的图象上，则 $k=$ 6．

$Q(3,n-1)$

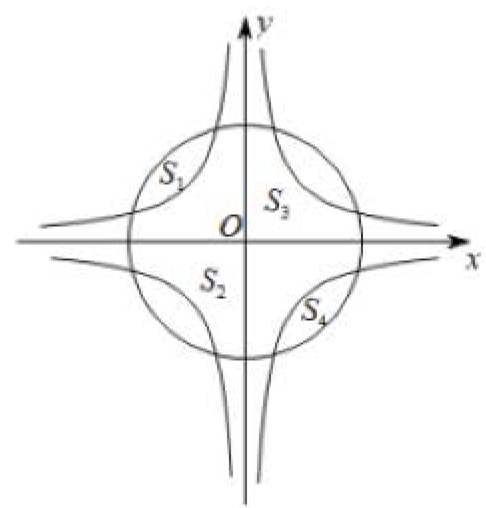
$k=3(n-1)=2n$，$n=3$，$k=6$

例2

例 2

1. 如图，⊙O 的半径为 2，双曲线的解析式分别为 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=-\frac{1}{x}$，则图中 $S_1+S_2+S_3+S_4=$ 2π．

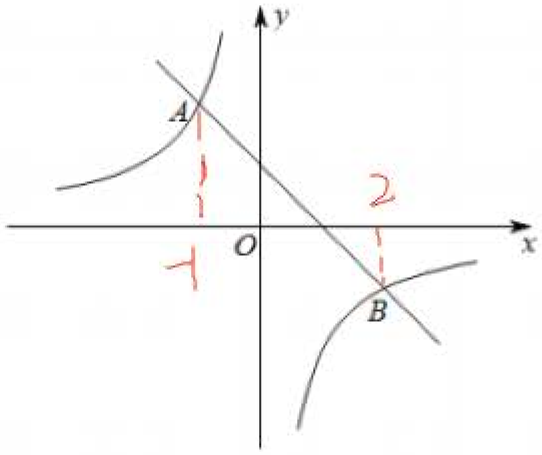
$S=\frac{1}{2}\pi\times2^2=2\pi$



例3

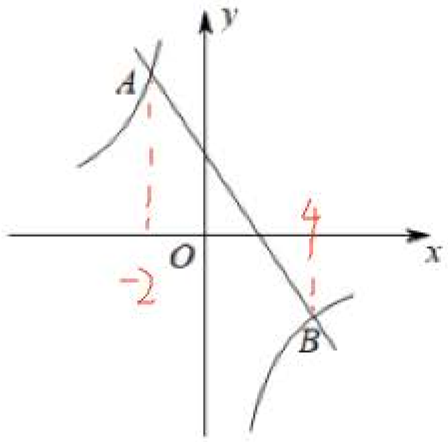
例 3

1. 如图，一次函数 $y_1=kx+b(k\neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$（m 为常数且 $m\neq 0$）的图象，都经过 $A(-1,2)$，$B(2,-1)$，结合图象，则不等式 $kx+b>\frac{m}{x}$ 的解集是 $x<-1$或$0<x<2$.



练一练

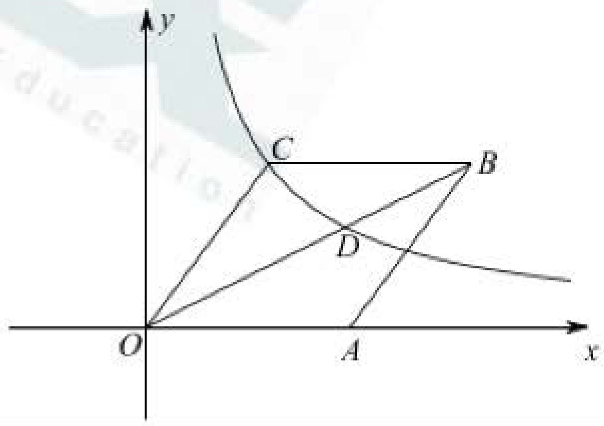
如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象都经过点 $A(-2,6)$ 和点 $B(4,n)$，则不等式 $kx+b\leq\frac{m}{x}$ 的解集为 $-2\leq x<0$或$x\geq 4$



例4

例 4

1. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的边 OA 在 x 轴的正半轴上，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过对角线 OB 的中点 D 和顶点 C．若菱形 $OABC$ 的面积为 12，则 k 的值为 4 .



设 $A(a,0)$ $C(c,\frac{k}{c})$

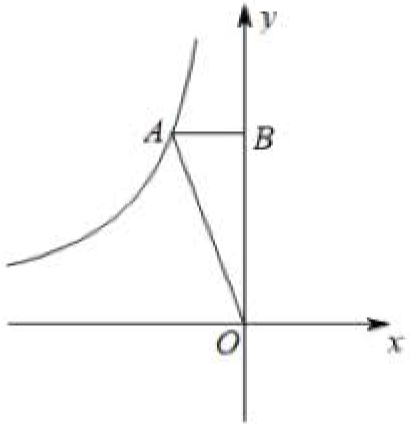
$D(\frac{a+c}{2},\frac{k}{2c})$

$\therefore\begin{cases} a\cdot\frac{k}{c}=12 \\ \frac{a+c}{2}\cdot\frac{k}{2c}=k \end{cases}$

$\therefore k=4$

练一练

如图，已知 A 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图象上一点，过点 A 作 $AB\perp y$ 轴，垂足为 B．若△OAB 的面积为 2，则 k 的值为 $\underline{\quad -4 \quad}$．



$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|k|=2$

$|k|=4$

$\because k<0$

$\therefore k=-4$

例5

例 5

1．如图，一次函数 $y=-x+3$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 在第一象限的图象交于 $A(1，a)$ 和 B 两点，与 x 轴交于点 C．

（1）求反比例函数的解析式；

（2）若点 P 在 x 轴上，且△APC 的面积为 5，求点 P 的坐标．

解:(1) 将 $A(1,a)$ 代入 $y=-x+3$，得：$a=2$，$\therefore A(1,2)$

将 $A(1,2)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得：$k=2$

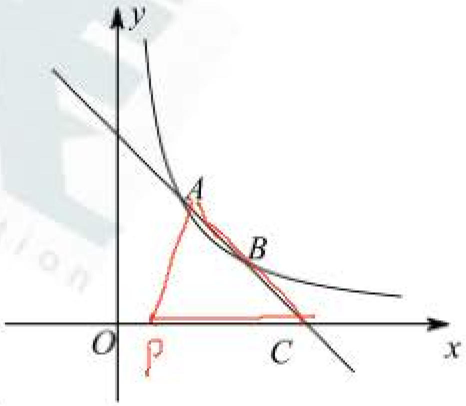
$\therefore$ 反比例函数解析式：$y=\frac{2}{x}$

(2) 设 $P(x,0)$，易知 $C(3,0)$

$\therefore PC=|3-x|$

$\therefore S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\cdot|3-x|\cdot 2=5$

则 $x=-2$ 或 $x=8$　$\therefore P(-2,0)$ 或 $P(8,0)$



例6

例 6

1．如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y_1=kx+b(k\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}(m\neq0)$ 的图象相交于第一、三象限内的 $A(3，5)$，$B(a，-3)$ 两点，与 x 轴交于点 C.

-5

（1）求该反比例函数和一次函数的解析式；

（2）在 y 轴上找一点 P，使 $PB-PC$ 最大，求 $PB-PC$ 的最大值及点 P 的坐标；

（3）直接写出当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围.

解：(1) $y_2=\frac{15}{x}$，$y_1=x+2$

(2) 易知：$C(-2,0)$，$B(-5,-3)$

① B，C，P三点不共线时，由三角形三边关系：$PB-PC<BC$

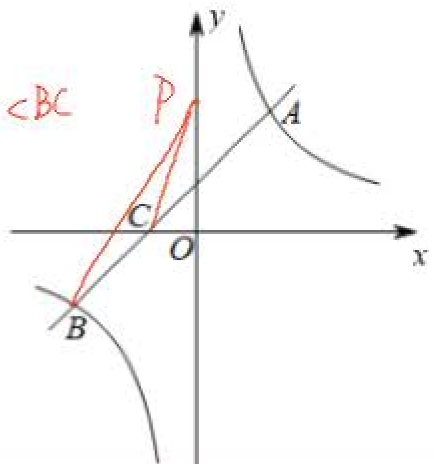
② B，C，P三点共线时，$PB-PC=BC$

∴ $PB-PC\leq BC$

由勾股定理：$BC=\sqrt{(5-2)^2+(3)^2}=3\sqrt{2}$

∴ $PB-PC$ 最大值是 $3\sqrt{2}$，此时 $P(0,2)$

(3) $-5<x<0$ 或 $x>3$



练一练

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第二象限交于点 B，与 x 轴交于点 C，点 A 在 y 轴上，满足条件：$CA\perp CB$，且 $CA=CB$，点 C 的坐标为 $(-3，0)$，$\cos\angle ACO=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（1）求反比例函数的表达式；

（2）直接写出当 $x<0$ 时，$kx+b<\frac{m}{x}$ 的解集.

解：(1) 如图，过B作 $BD\perp x$ 轴于点D.

∵ $AC\perp BC$

∴ $\angle1+\angle ACO=\angle1+\angle2=90^\circ$

∴ $\angle ACO=\angle2$

又∵ $\angle BDC=\angle AOC=90^\circ$，$CA=CB$

∴ $\triangle AOC\cong\triangle CDB$ (AAS)

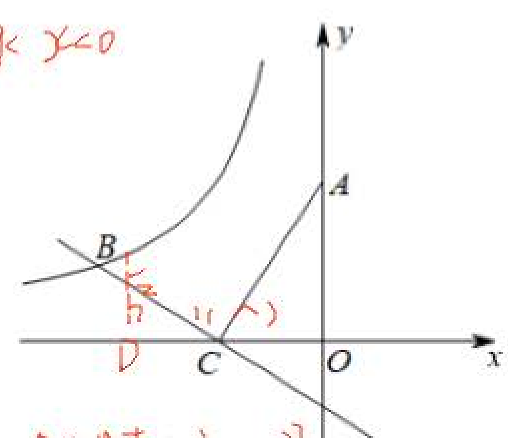
∴ $OC=DB=3$，$CD=AO$

∵ $\cos\angle ACO=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ∴ $AC=3\sqrt{5}$

∴ $CD=AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=6$

∴ $OD=OC+CD=3+6=9$ ∴ $B(-9,3)$ 则反比例函数表达式 $y=\frac{-27}{x}$

(2) $-9<x<0$



智慧高峰

智慧高峰

1. 如图，A 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（其中 $k>0$）图象上的一点，在 x 轴正半轴上有一点 B，$OB=4$，连接 OA，AB．且 $OA=AB=2\sqrt{10}$．

（1）求 k 的值；

（2）过点 B 作 $BC\perp OB$，交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（其中 $k>0$）的图象于点 C，连接 OC 交 AB 于点 D，求 $\frac{AD}{DB}$ 的值．

解：(1) 如图，过A作AH⊥OB于H，交OC于M

∵ $OA=AB=2\sqrt{10}$，$OB=4$

∴ $OH=\frac{1}{2}OB=2$，$AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=6$

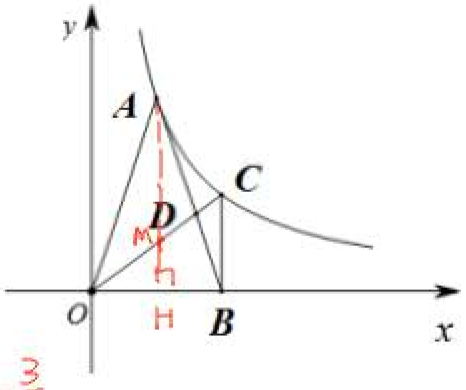
∴ $A(2,6)$，$k=2\times6=12$

(2) ∵ BC⊥x轴，$OB=4$，∴ $BC=\frac{k}{OB}=3$

又∵ AH∥BC，OH=BH　∴ $MH=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$

∴ $AM=AH-MH=\frac{9}{2}$

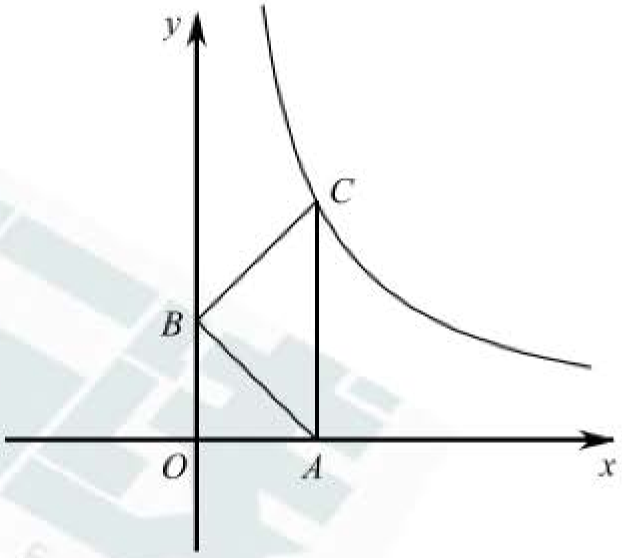
∵ AM∥BC　∴ △ADM∽△BDC　∴ $\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{BC}=\frac{3}{2}$



智慧磨炼

智慧磨炼

1. 如图，在平面直角坐标系中等腰直角三角形 ABC 的顶点 A，B 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，$\angle ABC=90°$，$CA\perp x$ 轴，点 C 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，若 $AB=1$，则 k 的值为__1__．

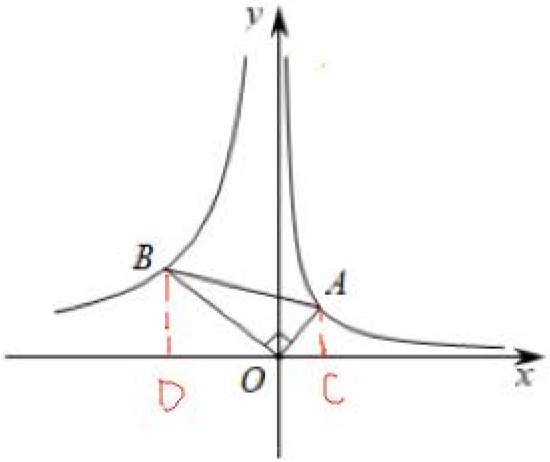


$OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=\sqrt{2}$

∴ $C(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$

$k=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1$

2. 如图，Rt△AOB 中，$\angle AOB=90°$，顶点 A，B 分别在反比例函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 与 $y=\frac{-5}{x}(x<0)$ 的图象上．则 $\tan\angle BAO$ 的值为 $\sqrt{5}$ ．



$S_{\triangle BDO}=\frac{5}{2}$，$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}$

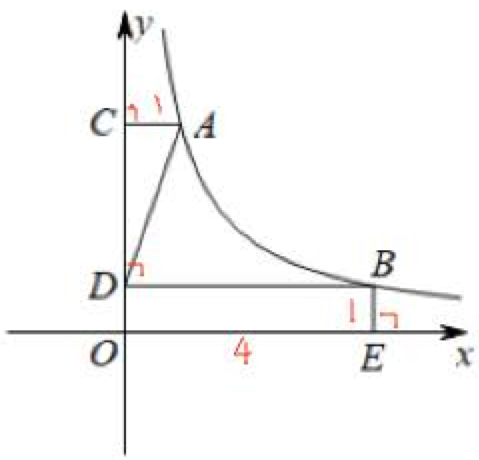
$\triangle BDO \backsim \triangle OCA$

$\therefore \frac{S_{\triangle BDO}}{S_{\triangle OCA}}=\left(\frac{OB}{OA}\right)^2=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$

$\therefore \frac{OB}{OA}=\sqrt{5}$

即 $\tan\angle BAO=\sqrt{5}$

3. 如图，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 经过 A，B 两点，过点 A 作 $AC\perp y$ 轴于点 C，过点 B 作 $BD\perp y$ 轴于点 D，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E，连接 AD，已知 $AC=1$，$BE=1$，$S_{矩形BDOE}=4$，则 $S_{\triangle ACD}=$ $\frac{3}{2}$ ．



$K=4$

$OC=\frac{K}{AC}=4$

$CD=OC-OD=3$

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$

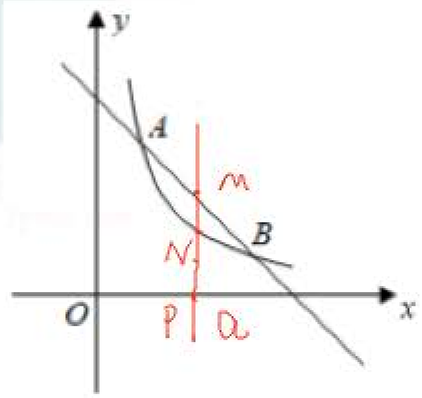
4. 如图，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象与一次函数 $y=-x+b$ 的图象在第一象限交于 $A(1,3)$，$B(3,1)$ 两点.

（1）求反比例函数和一次函数的表达式；

（2）已知点 $P(a,0)\ (a>0)$，过点 P 作平行于 y 轴的直线，在第一象限内交一次函数 $y=-x+b$ 的图象于点 M，交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 上的图象于点 N. 若 $PM>PN$，结合函数图象直接写出 a 的取值范围.

解：(1) 反比例：$y=\frac{3}{x}$，一次函数：$y=-x+4$

(2) $1<a<3$



5. 如图，双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 经过点 $P(2,1)$，且与直线 $y=kx-4(k<0)$ 有两个不同的交点.

（1）求 m 的值；

（2）求 k 的取值范围.

解：(1) $m=2\times1=2$

(2) ∵ $y=\frac{2}{x}$ 与 $y=kx-4$ 有两个不同的交点，

∴ $\frac{2}{x}=k-4$，化简得 $kx^2-4x-2=0$

∴ $\Delta=(-4)^2-4k\cdot(-2)>0$

∴ $k>-2$

即 k 的取值范围：$-2<k<0$