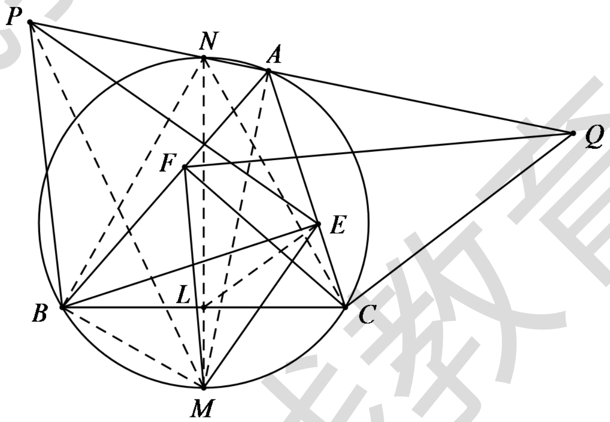
“根源杯”数学奥林匹克邀请赛参考答案

2020 年 01 月

一、(本题满分 40 分)

设点 E, F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AC, AB 上，且 $BE \perp AC, CF \perp AB$. M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\overset{\frown}{BC}$（不含点 A）的中点，P, Q 两点在 $\angle BAC$ 的外角平分线上，且 $EP \perp EM, FQ \perp FM$.

求证：$BP = CQ$.



证明：如图, 设 $\angle BAC$ 的外角平分线 PQ 与 $\triangle ABC$ 外接圆的另一交点为 N，MN 与 BC 交于 L. 则 N 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点，L 是 BC 的中点. 则 $BN = CN$，且这两条弦所对圆周角 $\angle CBN = \angle BML$. 由于 MN 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，$EP \perp EM$, 则 $\angle PAM = 90° = \angle PEM$，$A, P, M, E$ 四点共圆. ………………（10 分）

又 A, C, B, N 四点共圆，则

$$\angle PME = 180° - \angle PAE = 180° - \angle CAN = \angle CBN = \angle BML.$$

又 $\angle PEM = 90° = \angle BLM$，则 $\triangle MEP \backsim \triangle MLB$. ………………（20 分）

进一步有，$\dfrac{MP}{MB} = \dfrac{ME}{ML}$，$\angle PMB = \angle EML$，$\triangle MPB \backsim \triangle MEL$. 又 BL 是直角 $\triangle BMN$ 斜边 MN 上的高, 可知 $\triangle MLB \backsim \triangle BLN$. 故 $\dfrac{BP}{LE} = \dfrac{MB}{ML} = \dfrac{BN}{BL}$. ………………（30 分）

又 $BE \perp AC$，L 是 BC 的中点，则 $BL = LE$. 结合 $\dfrac{BP}{LE} = \dfrac{BN}{BL}$ 知，$BP = NB$. 同理，$CQ = CN$. 又 $BN = CN$，则 $BP = CQ$. ………………（40 分）

二、(本题满分 40 分)

记 α 为方程 $x^2 + x = 5$ 的正根，正整数 n 及非负整数 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 满足

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \alpha^k = 2019.$$

求 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_k$ 的最小值.

解： 易得 α 是无理数. 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kx^k-2019=(x^2+x-5)g(x)+ax+b$，$g(x)$ 是整系数多项式，$a,b\in\mathbb{Z}$. 由题设，$0=f(\alpha)=a\alpha+b$. 由 α 是无理数知 $a=0,b=0$. 故 $f(x)=(x^2+x-5)g(x)$.

…………………（10 分）

易见 $S=\sum\limits_{k=0}^{n}C_k$ 有最小值. 设 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ 使得 S 取得最小值 S_0.

下面证明 $0\leqslant C_i\leqslant 4$. 假设 $C_j\geqslant 5,0\leqslant j\leqslant n$，则有

$$C_0+C_1\alpha+\cdots+C_{j-1}\alpha^{j-1}+(C_j-5)\alpha^j+(C_{j+1}+1)\alpha^{j+1}+(C_{j+2}+1)\alpha^{j+2}+\cdots+C_n\alpha^n=2019,$$

$(\alpha^2+\alpha=5,\alpha^{j+2}+\alpha^{j+1}=5^{\alpha^j})$，此时上式左边各项 α 的方幂系数之和 $=S_0-3$，与 S_0 的最小性矛盾.

…………………（20 分）

由 $f(x)=(x^2+x-5)g(x)$，可设 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-2}a_kx^k$. 比较同次幂的系数：

$C_0-2019=-5a_0$, 则 $C_0\equiv 4\pmod 5$，所以 $C_0=4,a_0=403$；

$C_1=a_0-5a_1$, 则 $C_1\equiv 3\pmod 5$，所以 $C_1=3,a_1=80$；

$C_2=-5a_2+a_1+a_0$, 则 $C_2\equiv 3\pmod 5$，所以 $C_2=3,a_2=96$；

$C_3=-5a_3+a_2+a_1$, 则 $C_3\equiv 1\pmod 5$，所以 $C_3=1,a_3=35$；

$C_4=-5a_4+a_3+a_2$, 则 $C_4\equiv 1\pmod 5$，所以 $C_4=1,a_4=26$；

$C_5=-5a_5+a_4+a_3$, 则 $C_5\equiv 1\pmod 5$，所以 $C_5=1,a_5=12$；

$C_6=-5a_6+a_5+a_4$, 则 $C_6\equiv 3\pmod 5$，所以 $C_6=3,a_6=7$；

$C_7=-5a_7+a_6+a_5$, 则 $C_7\equiv 4\pmod 5$，所以 $C_7=4,a_7=3$；

$C_8=-5a_8+a_7+a_6$, 则 $C_8\equiv 0\pmod 5$，所以 $C_8=0,a_8=2$；

$C_9=-5a_9+a_8+a_7$, 则 $C_9\equiv 0\pmod 5$，所以 $C_9=0,a_9=1$；

$C_{10}=-5a_{10}+a_9+a_8$, 则 $C_{10}\equiv 3\pmod 5$，所以 $C_{10}=3,a_{10}=0$；

$C_{11}=-5a_{11}+a_{10}+a_9$, 则 $C_{11}\equiv 1\pmod 5$，所以 $C_{11}=1,a_{11}=0$.

$C_{12}=-5a_{12}+a_{11}+a_{10}$, 则 $C_{12}\equiv 0\pmod 5$，所以 $C_{12}=0$. 这样的递推关系意味着 $f(x)$ 是 11 次多项式 (可以认为更高次项系数均为 0). 计算得 $S=\sum\limits_{k=0}^{n}C_k=24$. …………………（40 分）

三、（本题满分 50 分）

设正整数 a,b,c,d,e,f 之和 $s=p^n$，其中 p 为素数，n 为正整数. 已知

$$s\mid(abc+def),\ s\mid(ab+bc+ca-de-ef-fd).$$

证明：$\min\{a,b,c\}+\min\{d,e,f\}\geqslant p$.

证明： 设

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=(x+a)(x+b)(x+c)-(x-d)(x-e)(x-f)\\&=sx^2+(abc+def)x+(ab+bc+ca-de-ef-fd),\end{aligned}$$

则 $\varphi(x)$ 各项系数均为 s 的倍数. 故当 $x\in\mathbb{Z}$ 时，$s\mid\varphi(x)$. …………………（10 分）

特别地，$s\mid\varphi(d)$，即 $p^n\mid(a+d)(b+d)(c+d)$. 由于 $a+d,b+d,c+d$ 均小于 $s=p^n$，故 p 整除 $a+d,b+d,c+d$ 中至少两个数. 同理，由 $s\mid\varphi(e)$ 知 p 整除 $a+e,b+e,c+e$ 中至少两个数；由 $s\mid\varphi(f)$

知 p 整除 $a+f,b+f,c+f$ 中至少两个数. ………………（20 分）

不妨设 $p\mid a+d$，则 p 整除 $b+e,c+e$ 中至少一个数. 不妨设 $p\mid b+e$，则由 $p\mid s$ 知 $p\mid c+f$. 又 p 整除 $b+d,c+d$ 中至少一个数，不妨设 $p\mid b+d$. 则由 $p\mid a+d,p\mid b+d$ 知 $a\equiv b \pmod p$. 再结合 $p\mid a+d,p\mid b+e$ 可得，$d\equiv e \pmod p$. ………………（30 分）

又 p 整除 $a+f,b+f$ 中至少一个数，且 $a\equiv b \pmod p$，则 $p\mid a+f$. 由 $p\mid a+f,p\mid c+f$ 知 $a\equiv c \pmod p$. 再结合 $p\mid a+d,p\mid c+f$ 可得，$d\equiv f \pmod p$. 我们得到

$$a\equiv b\equiv c\equiv -d\equiv -e\equiv -f \pmod p.$$

………………（40 分）

这表明 $\min\{a,b,c\}+\min\{d,e,f\}$ 是 p 的倍数，当然大于或等于 p. ………………（50 分）

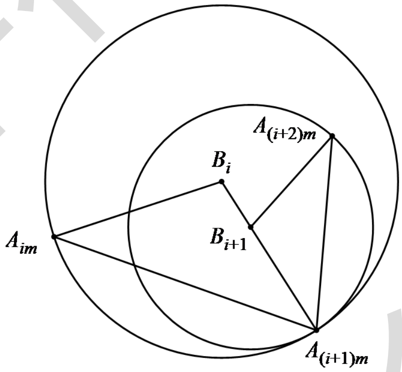
四、（本题满分 50 分）

给定互素的正整数 m,n，$n>2m$. 凸 n 边形 $A_0A_1\cdots A_{n-1}$ 满足：$\angle A_iA_{i+m}A_{i+2m}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 均相等，且 $|A_0A_m|\geqslant|A_mA_{2m}|\geqslant|A_{2m}A_{3m}|\geqslant\cdots\geqslant|A_{(n-1)m}A_{nm}|$，这里下标按模 n 理解. 将该凸 n 边形所有边和对角线的中点染为红色.

用 $f(C)$ 表示圆 C 上红色点的数目. 对平面上所有圆 C，求 $f(C)$ 的最大值，并求达到该最大值的圆 C 的个数.

解： 圆 C 上红色点数目 $f(C)$ 的最大值为 n，达到最大值的圆 C 的个数是 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$(不超过 $\dfrac{n-1}{2}$ 的最大整数).

由于 m,n 互素，故在模 n 意义下的下标 $\{0,m,2m\cdots,(n-1)m\}=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$. 对 $i=0,1,\cdots,n-1$，每条线段 A_iA_{i+m} 将凸 n 边形分为两侧，分别包含 m 条边与 $n-m$ 条边. 以 $A_{im}A_{(i+1)m}$ 为底，向凸 n 边形中包含 $n-m$ 条边的一侧作等腰 $\triangle A_mA_{(i+1)m}B_i, i=0,1,\cdots,n-1$，使底角 $=\dfrac{\alpha}{2}$ $(\alpha=\angle A_iA_{i+m}A_{i+2m}$ 是与 i 无关的常值). 以 B_i 为圆心，B_iA_{im} 为半径作圆 $\odot B_i$.



注意到 $n>2m$，线段 A_iA_{i+m} 将凸 n 边形分为两侧，顶点 $A_{(i+2)m}$ 在包含 $n-m$ 条边的那一侧，进而 $B_i,B_{i+1}(B_n=B_0)$ 均在 $\angle A_{im}A_{(i+1)m}A_{(i+2)m}$ 的角平分线上. 这表明 $\odot B_i$ 与 $\odot B_{i+1}$ 重合或内切 ($A_{(i+1)m}$ 是两圆公共点). 注意到等腰三角形 $\triangle B_iA_{im}A_{(i+1)m},\triangle B_{i+1}A_{(i+1)m}A_{(i+2)m}$ 相似，若 $|A_{im}A_{(i+1)m}|=|A_{(i+1)m}A_{(i+2)m}|$，则 $|B_iA_{(i+1)m}|=|B_{i+1}A_{(i+1)m}|$，$\odot B_i$ 与 $\odot B_{i+1}$ 重合；若 $|A_{im}A_{(i+1)m}|>|A_{(i+1)m}A_{(i+2)m}|$，则 $|B_iA_{i+1)m}|=|B_{i+1}A_{(i+1)m}|$，$\odot B_i$ 与 $\odot B_{i+1}$ 内切于点 $A_{(i+1)m}$，$\odot B_{i+1}$ 在 $\odot B_i$ 内. ………………（10 分）

因此，在不等式链 $|A_0A_m|\geqslant|A_mA_{2m}|\geqslant\cdots\geqslant|A_{(n-1)m}A_{nm}|$ 中，只要有某个等号不成立，则圆 $\odot B_0,\odot B_{n-1}$ 不相等，且 $\odot B_{n-1}$ 一定在 $\odot B_0$ 内. 若 $\odot B_0$ 与 $\odot B_{n-1}$ 有公共点，则两圆只可能内切于它

们的公共点 A_0. 但另一方面，若 $|A_{jm}A_{(j+1)m}| > |A_{(j+1)m}A_{(j+2)m}|$ 对某个 $j \in \{0,1,\cdots,n-2\}$ 成立，则 $\odot B_j$ 与 $\odot B_{j+1}$ 的唯一公共点是 $A_{(j+1)m}$(不同于点 A_0)，而 $\odot B_j$ 在 $\odot B_0$ 内 (可能重合)，$\odot B_{n-1}$ 在 $\odot B_{j+1}$ 内 (可能重合)，故 $\odot B_0$ 与 $\odot B_{n-1}$ 的唯一可能公共点是 $A_{(j+1)m}$，矛盾. 故 $|A_0A_m| = |A_mA_{2m}| = \cdots = |A_{(n-1)m}A_{nm}|$，且圆心 $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$ 重合 (记为点 O). 以点 O 为旋转中心, 将点 A_{im} 旋转 $\pi-\alpha$ 得到点 $A_{(i+1)m}$，即各点 A_i 是正 n 边形的 n 个顶点. ………………（30 分）

考虑正 n 边形的中心 O. 每条边或对角线关于点 O 所张的角为 $\dfrac{2\pi k}{n}, k=1,2,\cdots,\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，所以红色点与点 O 的非零距离共有 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 种. 若 n 为偶数，则 O 也是红点. 以 O 为圆心，上述 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个非零距离为半径分别作 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个圆，每个圆上都有 n 个红点. 若平面上另有一个不同于这些圆的圆 C，C 与上述 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个圆中每个圆至多有 2 个交点. 若 n 为奇数，所有红点都在上述 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个圆上，$f(C) \leqslant 2\cdot\left[\dfrac{n-1}{2}\right] = n-1 < n$. 若 n 为偶数，则只有唯一红点 O 不在上述 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个圆上，$f(C) \leqslant 2\cdot\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+1 = n-1 < n$.

故平面上一个圆 C 上红色点至多有 n 个，使得 $f(C)$ 达到最大值的圆 C 恰有 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个.
………………（50 分）