“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

2020 年 01 月

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 设实数 x 满足 $\log_8(\log_{32} x) = \log_{32}(\log_8 x)$, 则 $\log_4 x =$ ________.

2. 集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10, 2019, 2020\}$ 的非空子集中, 元素之和为 4 的倍数的非空子集个数为 ________.

3. 设 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 直角边长为 1, 点 P 是其边界上任意一点. 则 $PA \cdot PB \cdot PC$ 的最大值是 ________.

4. 设复数 a, b, c 的模长均为 1, $a + b + c = 1 + \mathrm{i}$, 这里 i 为虚数单位. 则 $|ab + bc + ca| =$ ________.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 上点 P 的横坐标为 $\dfrac{3}{2}a$, 且 P 到右焦点的距离大于它到左准线的距离. 则该双曲线两条渐近线所夹锐角的取值范围是 ________.

6. 四面体 $ABCD$ 被 10 个两两平行的平面 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{10}$ 分成 9 部分, 其中 $AB \subset \pi_1, CD \subset \pi_{10}$. 对 $i = 1, 2, \cdots, 9$, π_i 与 π_{i+1} 的距离记为 d_i, 四面体在平面 π_i, π_{i+1} 之间的部分体积记为 V_i. 若 $d_1 = d_2 = \cdots = d_9$, $P = V_1 + V_3 + V_5 + V_7 + V_9$, $Q = V_2 + V_4 + V_6 + V_8$, 则 $\dfrac{P}{Q} =$ ________.

7. 实数 x, y 满足 $(x-3)^2 + 4(y-1)^2 = 4$, 则 $\dfrac{x+y-3}{x-y+1}$ 的取值范围是 ________.

8. 正实数 x, y, z 满足 $\sqrt{x^2+y^2} + z = 1$, 则 $xy + 2xz$ 的最大值是 ________.

二、解答题（本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

9.（本题满分 16 分）

设 $\{a_n\}$ 为正项等差数列. 对任意正整数 n 和正实数 p, 证明:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i^p) \geqslant \left[1 + (a_1 a_n)^{\frac{p}{2}}\right]^n$$

10.（本题满分 20 分）

若函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 与实数 x_0 满足 $f(x_0) = 0$, 且存在实数 $c > 0$, 使得对任意正实数 $h < c$, $f(x_0 - h) \cdot f(x_0 + h) < 0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的变号零点. 函数

$$f(x) = \prod_{k=1}^{2020} \cos \frac{x}{k}$$

在区间 $(0, 1010\pi)$ 上有多少个变号零点?

11.（本题满分 20 分）

空间中两条异面直线 a, b 的距离为 2, 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$. 长为 4 的线段 AB 两端点分别在直线 a, b 上运动, 求线段 AB 中点的轨迹.