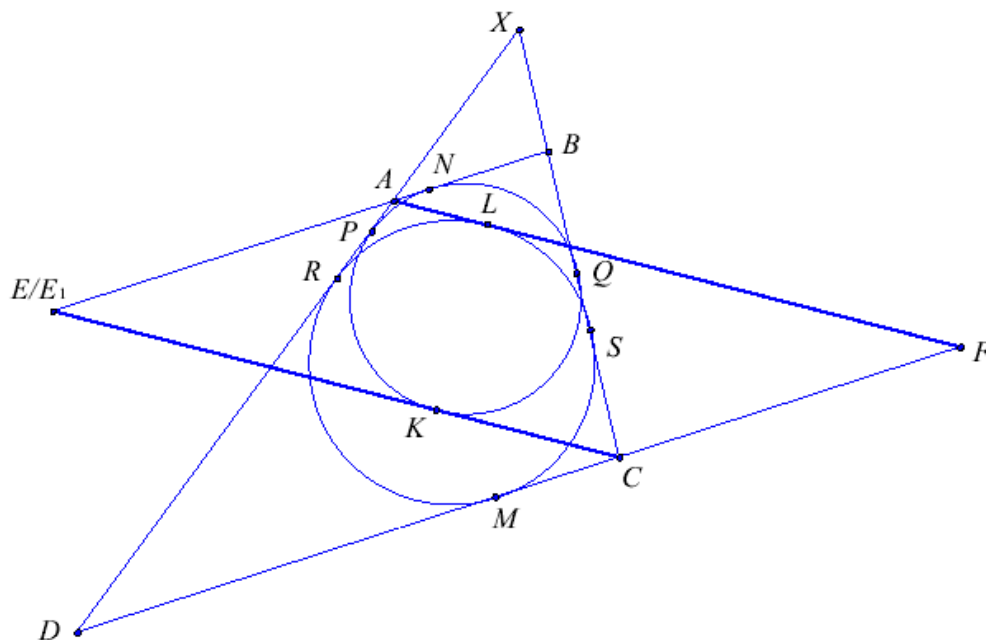


## 国家集训队考试试题解答（一）

2006年3月19日 8:30—12:30, 沈阳

1. 设  $ABCD$  是一个梯形并且  $AB \parallel CD$ ,  $ABCD$  内部有两个圆  $w_1$  和  $w_2$  满足  $w_1$  与三边  $DA$ 、 $AB$ 、 $BC$  相切, 圆  $w_2$  与三边  $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  相切. 令  $l_1$  是过点  $A$  的异于直线  $AD$  的圆  $w_2$  的另一条切线,  $l_2$  是过点  $C$  的异于直线  $CB$  的圆  $w_1$  的另一条切线. 证明:  $l_1 \parallel l_2$ .

解: 不失一般性, 设  $AB < CD$ . 令射线  $DA$  和射线  $CB$  相交于点  $X$ ,  $l_1$  与  $DC$ ,  $l_2$  与  $AB$  分别相交于点  $F$ ,  $E$ .  $w_1$  与三边  $AB$ 、 $DA$ 、 $BC$  分别相切于点  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ ;  $w_2$  与三边  $CD$ 、 $AD$ 、 $BC$  分别相切于点  $M$ ,  $R$  和  $S$ . (如下图)



由切线的性质可得

$$\begin{aligned} CE - AE &= CK + KE - AE = CQ + EN - AE = CQ + AN = CQ + AP \\ &= CQ + QX + AP - QX = CX + AP - XP \\ &= CX - XA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AF - CF &= AL + LF - CF = AR + FM - CF = AR + MC = AR + SC \\ &= AR + SC + SX - SX = AR + CX - SX = AR + CX - RX \\ &= CX - XA \end{aligned}$$

从而

$$CE - AE = AF - CF \quad \text{或者} \quad CE - AF = AE - CF.$$

在直线  $AB$  上取一点  $E_1$  使得  $E_1AFC$  是平行四边形。则  $AE_1 = CF$ ,  $AF = CE_1$ 。因此

$$AE - AE_1 = AE - CF = CE - AF = CE - CE_1$$

即,  $|EE_1| = |CE - CE_1|$ . 由三角不等式知  $E = E_1$ , 从而  $l_1 \parallel l_2$ 。

2. 求所有的正整数对  $(a, n)$  使得

$$\frac{(a+1)^n - a^n}{n}$$

是整数.

解: 若  $a$  为任意正整数, 则  $(a, 1)$  显然是原问题的解, 下面我们证明原问题没有其他解。

假设  $(a, n)$   $n \geq 2$  是原问题的一个解, 则存在某正整数  $k$ , 使得

$$(a+1)^n - a^n = kn.$$

由于  $a$  和  $a+1$  互素, 由上面的方程可知  $n$  肯定和  $a$  和  $a+1$  都互素。由欧拉定理可得

$$(a+1)^{\varphi(n)} \equiv a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

令  $d = \gcd(n, \varphi(n))$ 。由 Bezout 不等式, 存在整数  $\alpha$  和  $\beta$  使得  $d = \alpha n + \beta \varphi(n)$ 。由

$(a+1)^n \equiv a^n \pmod{n}$  和  $(a+1)^{\varphi(n)} \equiv a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  可推出

$$(a+1)^d \equiv (a+1)^{\alpha n + \beta \varphi(n)} \equiv a^{\alpha n + \beta \varphi(n)} \equiv a^d \pmod{n}.$$

显然  $d > 1$  (否则  $a+1 \equiv a \pmod{n}$  推出  $n = 1$ )。同时注意到  $\varphi(n) < n$ , 所以  $d < n$ 。因此

$(a, d)$  是原问题的另一个解并且  $1 < d < n$ 。重复上述过程我们就得到了一个无穷递降正整数序列, 而这是不可能的, 因此上面的假设是错误的, 即没有  $n > 1$  的解。

3. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是给定的  $n$  个实数 ( $n \geq 1$ )。求证: 存在实数  $b_1, b_2, \dots, b_n$  满足下列条件:

(a) 对任何的  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i - b_i$  是正整数;

$$(b) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_i - b_j)^2 \leq \frac{n^2 - 1}{12}.$$

解：我们首先考虑下面的问题：

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是给定的  $n$  个实数 ( $n \geq 1$ )。求证：存在实数  $b_1, b_2, \dots, b_n$  满足下列条件：

(a') 对任何的  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i - b_i$  是整数；

$$(b) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_i - b_j)^2 \leq \frac{n^2 - 1}{12}.$$

显然条件(a)强于条件(a')。另一方面，如果序列  $(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$  满足条件(a')和(b)，

不难证明序列  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  (其中  $b_i = b'_i - \sum_{i=1}^n |a_i - b'_i| - 1$  ( $1 \leq i \leq n$ )) 满足条件

(a)和(b)。因此两个问题是等价的。我们将给出新问题的解答。

对一个实数序列  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ ，我们用  $\Delta(X)$  表示  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ 。对一个实数序列

$A = \{a_i\}_{i=1}^n$  我们用  $\Phi(A)$  表示使得  $a_i - b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为整数的所有序列  $B = \{b_i\}_{i=1}^n$  的集合。我们有如下两个引理：

引理 1. 对一个给定的序列  $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ ， $\Delta$  在  $\Phi(A)$  里有最小值。即存在  $B \in \Phi(A)$  使得对所有的  $X \in \Phi(A)$  有  $\Delta(B) \leq \Delta(X)$ 。

证明：很显然  $\Phi(A)$  里有无穷多项序列，不失一般性，我们可以仅考虑序列  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \Phi(A)$  其中  $b_1 = a_1$ 。因为我们可以同时对  $b_i$  加上任意一个整数，则如果对于某  $i$ ,  $|b_i - b_1| > \sqrt{\Delta(A)}$ ，则  $\Delta(B) > \Delta(A)$ 。因此只有有限个  $B \in \Phi(A)$  其中  $b_1 = a_1$ ，使得  $\Delta(B) \leq \Delta(A)$ 。又因  $A \in \Phi(A)$ ，从而  $\Delta$  在  $\Phi(A)$  里有最小值。

引理 2. 设序列  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$  和  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$  满足对所有的  $i = 1, 2, \dots, n$  部分和  $x_1 + x_2 + \dots + x_i$  小于等于部分和  $y_1 + y_2 + \dots + y_i$ 。则

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

证明：令  $s_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$ ,  $t_i = y_1 + y_2 + \dots + y_i$ ，则  $s_{i+1} - s_i = x_{i+1}$ ,  $t_{i+1} - t_i = y_{i+1}$ ,  $s_i \leq t_i$ 。由 Abel 公式，要证不等式左边等价于

$$\begin{aligned}
& s_1(x_1 - x_2) + s_2(x_2 - x_3) + \cdots + s_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + s_n x_n \\
& \leq t_1(x_1 - x_2) + t_2(x_2 - x_3) + \cdots + t_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + t_n x_n \\
& = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\
& = s_1(y_1 - y_2) + s_2(y_2 - y_3) + \cdots + s_{n-1}(y_{n-1} - y_n) + s_n y_n \\
& \leq t_1(y_1 - y_2) + t_2(y_2 - y_3) + \cdots + t_{n-1}(y_{n-1} - y_n) + t_n y_n \\
& = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,
\end{aligned}$$

证毕。

由引理 1, 对于一个给定的序列  $A = \{a_i\}_{i=1}^n$  我们可以选择序列  $B = \{b_i\}_{i=1}^n \in \Phi(A)$  使得  $\Delta(B)$  最小。因为我们可以对  $a_i(b_i)$  进行排序并且可以给每一项加上一个常数, 不失一般性, 我们假设  $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$  并且  $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{n+1}{2}$ 。选择一  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  考虑序列  $C = \{c_i\}_{i=1}^n \in \Phi(A)$ , 其中当  $i \leq k$  时  $c_i = b_i$ , 否则  $c_i = b_i + 1$ 。由  $B$  的选择可知  $\Delta(B) \leq \Delta(C)$ , 即

$$\sum_{1 \leq i \leq k < j \leq n} (b_i - b_j)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq k < j \leq n} (b_i - b_j - 1)^2 = \sum_{1 \leq i \leq k < j \leq n} [(b_i - b_j)^2 - 2(b_i - b_j) + 1]$$

从而

$$0 \leq -2 \sum_{1 \leq i \leq k < j \leq n} (b_i - b_j) + k(n-k)$$

或者

$$2n \sum_{1 \leq i \leq k} b_i \leq 2k \sum_{1 \leq i \leq n} b_i + k(n-k) = k(2n+1-k)$$

计算可得

$$\sum_{1 \leq i \leq k} b_i \leq \frac{k(2n+1-k)}{2n} = \frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{n-k+1}{n}$$

对序列  $b_1, b_2, \dots, b_n$  和  $\frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{1}{n}$  运用引理 2 得

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

最后, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_i - b_j)^2 &= (n-1) \sum_{1 \leq i \leq n} b_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j = n \sum_{1 \leq i \leq n} b_i^2 - \left( \sum_{1 \leq i \leq n} b_i \right)^2 \\
&\leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

从而序列  $B$  满足条件 (a') 和 (b)。

## 国家集训队考试试题解答 (二)

2006年3月20日 8:30—12:30, 沈阳

1. 设两正数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  满足

$$(a) \quad a_0 = 1 \geq a_1, \quad a_n(b_{n-1} + b_{n+1}) = a_{n-1}b_{n-1} + a_{n+1}b_{n+1}, \quad n \geq 1;$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^n b_i \leq n^{\frac{3}{2}}, \quad n \geq 1,$$

求  $\{a_n\}$  的通项.

解: 由(a), 我们有

$$a_n - a_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}(a_{n-1} - a_n)$$

故

$$a_n - a_{n+1} = \frac{b_0 b_1}{b_n b_{n+1}}(a_0 - a_1), \quad (*)$$

若  $a_1 = a_0 = 1$ , 则  $a_n = 1$ . 下证  $a_1 < a_0 = 1$ . 由(\*)

$$a_0 > a_0 - a_n = b_0 b_1 (a_0 - a_1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{b_k b_{k+1}},$$

这推出

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{b_k b_{k+1}} < \frac{a_0}{b_0 b_1 (a_0 - a_1)}. \quad (**)$$

令  $x_n = \sqrt{b_n b_{n+1}}$ , 则

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\leq \frac{b_1 + b_2}{2} + \frac{b_2 + b_3}{2} + \cdots + \frac{b_n + b_{n+1}}{2} \\ &< b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1} \leq (n+1)^{\frac{3}{2}} \leq 4n^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

对任意正整数  $k$ ,

$$\frac{k}{\frac{1}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{x_{k+2}^2} + \cdots + \frac{1}{x_{2k}^2}} \leq \sqrt[k]{x_{k+1}^2 \cdots x_{2k}^2} \leq \left( \frac{x_{k+1} + \cdots + x_{2k}}{k} \right)^2 < \frac{\left( 4(2k)^{\frac{3}{2}} \right)^2}{k^2}.$$

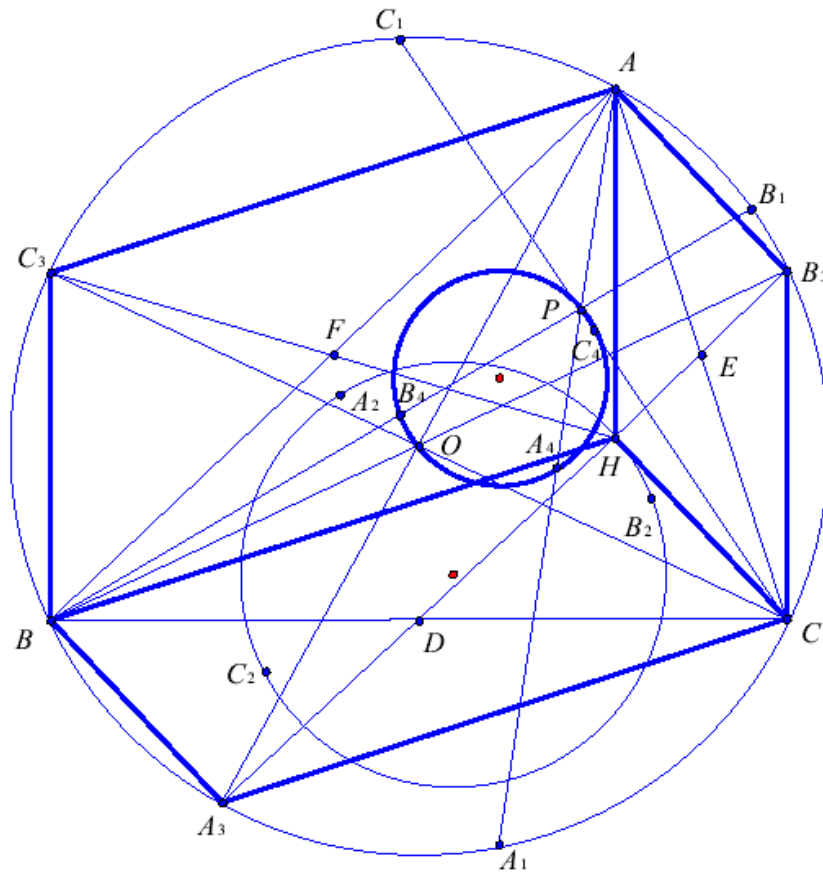
这推出

$$\frac{1}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{x_{k+2}^2} + \cdots + \frac{1}{x_{2k}^2} \geq \frac{1}{2^7}.$$

故  $\sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{b_k b_{k+1}} \geq \frac{n}{2^7}$ . 这与(\*\*)矛盾. 这表明  $a_n = 1, n \geq 0$ .

2. 设圆  $w$  是  $\triangle ABC$  的外接圆, 点  $P$  是  $\triangle ABC$  的一个内点, 射线  $AP, BP, CP$  分别交圆  $w$  于点  $A_1, B_1, C_1$ . 设  $A_1, B_1, C_1$  关于三边  $BC, CA, AB$  的中点的对称点为  $A_2, B_2, C_2$ . 求证:  $\triangle A_2 B_2 C_2$  的外接圆通过  $\triangle ABC$  的垂心.

证明: 我们用  $O$  和  $H$  分别表示  $\triangle ABC$  的外心和垂心, 用  $D, E, F$  分别表示边  $BC, CA, AB$  的中点. 在圆  $w$  上选择三点  $A_3, B_3, C_3$  使得  $AA_3, BB_3, CC_3$  为圆  $w$  的直径. (如下图)



因为  $A_3 B \perp AB$ ,  $A_3 B \parallel CH$ , 类似有  $A_3 C \parallel BH$ . 因此  $A_3 CHB$  是平行四边形并且  $D$  是  $HA_3$  的中点. 同样的方法我们得到  $E$  和  $F$  分别是  $HB_3$  和  $HC_3$  的中点.

设  $O$  点在直线  $PA, PB, PC$  上的正交投影分别为  $A_4, B_4, C_4$ , 则  $A_4, B_4, C_4$  三点落

在以  $OP$  为直径的圆周上。我们用  $w_2$  表示这个圆。由于  $D$  既是  $HA_3$  又是  $A_1A_2$  的中点，从而  $\overrightarrow{HA_2} = \overrightarrow{A_1A_3}$ （即  $HA_2A_3A_1$  是平行四边形）。另一方面，由  $\angle AA_1A_3 = 90^\circ$  可知  $\triangle AA_1A_3$  和  $\triangle AA_4O$  相似。因为  $AO/AA_3 = 1/2$ ， $\overrightarrow{A_1A_3} = 2\overrightarrow{OA_4}$ 。从而  $\overrightarrow{HA_2} = -2\overrightarrow{OA_4}$ 。同样的方法我们可以得到  $\overrightarrow{HB_2} = -2\overrightarrow{OB_4}$ ， $\overrightarrow{HC_2} = -2\overrightarrow{OC_4}$ 。这样就存在一个位似变换把点  $(H, A_2, B_2, C_2)$  映到  $(O, A_4, B_4, C_4)$ ，注意到  $O, A_4, B_4, C_4$  在圆  $w_2$  上，从而  $A_2, B_2, C_2, H$  共圆。

3. 设  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 是有理数使得对任意的实数  $x$  都有

$$x^2 + x + 4 = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2.$$

求  $n$  的最小可能值。

解：因  $x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ,

故  $n = 5$  是可以的。下证  $n = 4$  不可以。

反证法 设  $x^2 + x + 4 = \sum_{i=1}^4 (a_i x + b_i)^2$ ,  $a_i, b_i \in \mathcal{Q}$ ,

则

$$\sum_{i=1}^4 a_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^4 a_i b_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=1}^4 b_i^2 = 4.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{15}{4} &= \left(\sum_{i=1}^4 a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^4 b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^4 a_i b_i\right)^2 \\ &= (-a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3)^2 \\ &\quad + (-a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_4 b_2 + a_2 b_4)^2 \\ &\quad + (-a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_2 b_3 + a_3 b_2)^2 \end{aligned}$$

上式表明

$$a^2 + b^2 + c^2 = 15d^2 \equiv -d^2 \pmod{8}$$

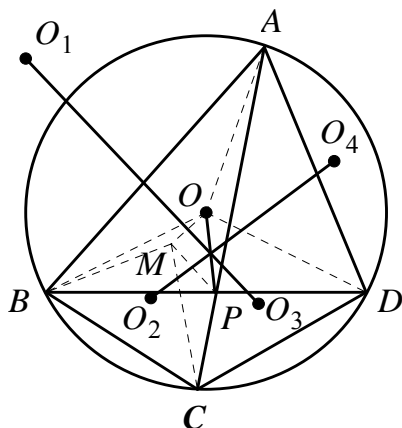
有解。不妨设  $a, b, c, d$  至少有一个奇数，且

$$a^2, b^2, c^2, d^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}, \quad \text{上式显然无解，矛盾。}$$

## 国家集训队考试试题解答（三）

2006年3月22日 8:30—12:30, 沈阳

1. 设四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ , 且圆心  $O$  不在四边形的边上, 对角线  $AC$  与  $BD$  交于点  $P$ ,  $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCD$ 、 $\triangle ODA$  的外心分别为  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$ . 求证: 三条直线  $O_1O_3$ 、 $O_2O_4$  与  $OP$  共点.



证明: 设  $\odot(OAB)$  与  $\odot(OCD)$  交于  $M$ , 则

$$\begin{aligned} \angle BMC &= 360^\circ - \angle CMO - \angle OMB = (180^\circ - \angle CMO) + (180^\circ - \angle OMB) \\ &= \angle ODC + \angle BAO = (90^\circ - \angle CBD) - (90^\circ - \angle ACB) \\ &= 180^\circ - \angle CBP - \angle PCB = \angle BPC, \end{aligned}$$

所以,  $M$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $P$  四点共圆. 同理,  $M$ 、 $P$ 、 $D$ 、 $A$  四点共圆. 于是

$$\begin{aligned} \angle PMO &= \angle CMO - \angle CMP = 180^\circ - \angle ODC - \angle CBP \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \angle CBP) - \angle CBP = 90^\circ \end{aligned}$$

这说明  $OM \perp MP$ . 但  $OM$  为  $\odot(OAB)$  与  $\odot(OCD)$  的公共弦, 所以  $O_1O_3$  垂直平分  $OM$ , 从而  $O_1O_3$  过  $OP$  的中点; 同理,  $O_2O_4$  也过  $OP$  的中点. 故三条直线  $O_1O_3$ 、 $O_2O_4$  与  $OP$  共点.

2. 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是正数, 且  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

求证: 
$$\left( \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+x_i}} \right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \quad (1)$$

解: 令  $x_i = \tan^2 \theta_i$ ,  $s = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos \theta_i}$ ,  $t = \sum_{i=1}^n \tan \theta_i$ .



$$\begin{aligned}
(1) \text{左} &= \left( \sum_{i=1}^n \tan \theta_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos \theta_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\tan^2 \theta_i}{\cos \theta_i} \right] \left( \sum_{i=1}^n \tan \theta_i \right) \\
&\leq \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos \theta_i} - \frac{\left( \sum_{i=1}^n \tan \theta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos \theta_i}} \right] \left( \sum_{i=1}^n \tan \theta_i \right) \\
&= \left( s - \frac{t^2}{s} \right) t = (s^2 - t^2) \frac{t}{s}.
\end{aligned}$$

故只须证明

$$(s^2 - t^2) \frac{t}{s} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \quad (2)$$

由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}
(n+1)(1 + \tan^2 \theta_i) &= (n+1) \left( 2 \tan^2 \theta_i + \sum_{j \neq i} \tan^2 \theta_j \right) \geq \left[ \sum_{i=1}^n \tan \theta_i + \tan \theta_i \right]^2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{\cos \theta_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left( \sum_{i=1}^n \tan \theta_i + \tan \theta_i \right) \\
&\Rightarrow s \geq \sqrt{n+1} t. \quad (3)
\end{aligned}$$

又  $(s^2 - t^2) \frac{t}{s} = st - \frac{t^3}{s}$  是关于  $s$  单调增的

$$\text{且 } s = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \tan^2 \theta_i} \leq \left[ \sum_{i=1}^n (1 + \tan^2 \theta_i) \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} = \sqrt{n(n+1)}.$$

所以

$$(s^2 - t^2) \frac{t}{s} \leq \sqrt{n(n+1)} t - \frac{t^3}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

下只须证明

$$\begin{aligned}
n(n+1)t - t^3 &\leq n^2 \sqrt{n} \\
\Leftrightarrow (t - \sqrt{n})(t^2 + \sqrt{nt} - n^2) &\geq 0 \quad (4)
\end{aligned}$$

而由(3)知  $t \leq \frac{s}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n}$ .

要证 (4) 只须证

$$t^2 + \sqrt{nt} - n^2 \leq 0.$$

事实上,  $t^2 + \sqrt{nt} \leq n + n = 2n \leq n^2$ .

3. 设  $d, n$  是正整数,  $d | n$ .  $n$  元数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  满足条件:

$$(1) \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq n;$$

$$(2) \quad d | (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

证明: 符合条件的所有  $n$  元数组中, 恰有一半满足  $x_n = n$ .

证明: 记符合条件的所有  $n$  元数组的集合为  $M$ ,  $M$  中,  $x_n = n$  的所有元素构成的子集为  $N$ ,

$N$  关于  $M$  的补集为  $\bar{N}$ , 则欲证

$$|M| = 2|N| \quad (|X| \text{ 表示集合 } X \text{ 的元素个数})$$

$$\text{只须证} \quad |N| = |\bar{N}|. \quad \textcircled{1}$$

对每一个  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ , 作一个  $n \times n$  的数表  $A = (a_{ij})$ , 满足

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } j \leq x_i \\ 0 & \text{若 } j > x_i \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad \textcircled{2}$$

则

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

将  $A$  中所有数字 0 改写为 1, 而所有数字 1 改写为 0 后, 得到一个新数表  $B = (b_{ij})$ . 显然

$$b_{ij} = 1 - a_{ij} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad \textcircled{3}$$

比如: 当  $d = 3, n = 9, (x_1, x_2, \dots, x_9) = (0, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9)$  时

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对每一个  $i$ , 显然有

$$a_{i1} \geq a_{i2} \geq \cdots \geq a_{in}. \quad (4)$$

$$b_{i1} \leq b_{i2} \leq \cdots \leq b_{in}. \quad (5)$$

令  $y_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}$  ( $1 \leq j \leq n$ ), 则据⑤得

$$0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq n. \quad (6)$$

因为将  $A$  与  $B$  重叠后, 恰是一个全为数字 1 的  $n \times n$  数表, 故

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^n y_j = n^2. \quad (7)$$

据已知条件  $d | n$ ,  $d | \sum_{i=1}^n x_i$ , 故由⑦得

$$d | \sum_{j=1}^n y_j. \quad (8)$$

⑥和⑧表明  $n$  元组  $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$  亦满足条件(1)和(2), 故  $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in M$ , 若定义映

射  $f: M \rightarrow M$ , 使得

$$f((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

因为对每一个  $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in M$ , 能且只能够作唯一的一个数表  $A$  及相应的  $B$ , 显然  $A$  与  $B$  是一对一的. 故  $f$  是  $M \rightarrow M$  的一个一一映射.

设经过映射  $f$ ,  $N$  和  $\bar{N}$  的象的集合分别为  $N^*$  和  $\bar{N}^*$ , 由于  $f$  是一一映射, 故

$$|N| = |N^*|, \quad |\bar{N}| = |\bar{N}^*|.$$

一方面, 对每一个  $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in N$ , 因为  $x_n = n$ , 故  $a_{nj} = 1$  ( $1 \leq j \leq n$ ). 从而

$b_{nj} = 0$ , 特别的,  $b_{nn} = 0$ , 于是  $y_n = \sum_{i=1}^n b_{in} < n$ .  $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \bar{N}$ . 故

$$N^* \subseteq \bar{N}, \quad |N| = |N^*| \leq |\bar{N}|. \quad (9)$$

另一方面, 对每一个  $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \bar{N}$ , 因为  $x_n < n$ , 又据条件(1)

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq n.$$

从而对  $i = 1, 2, \dots, n$ , 均有  $x_i < n$ , 据④得  $a_{1n} = a_{2n} = \dots = a_{nn} = 0$ , 于是

$$b_{1n} = b_{2n} = \dots = b_{nn} = 1. \quad y_n = \sum_{i=1}^n b_{in} = n. \quad (y_1, y_2, \dots, y_n) \in N. \quad \text{故}$$

$$\bar{N} \subseteq N^*, \quad |\bar{N}| = |\bar{N}^*| \leq |N|. \quad \text{⑩}$$

综合⑨,⑩即得

$$|N| = |\bar{N}|.$$

## 国家集训队考试试题解答（四）

2006年3月24日 8:30—12:30, 沈阳

1. 设  $K, M$  是  $\triangle ABC$  的边  $AB$  上的两点,  $L, N$  是边  $AC$  上的两点,  $K$  在  $M, B$  之间,  $L$  在  $N, C$  之间, 且  $\frac{BK}{KM} = \frac{CL}{LN}$ . 求证:  $\triangle ABC, \triangle AKL, \triangle AMN$  的垂心在一条直线上.

证明: 设  $\triangle ABC, \triangle AKL, \triangle AMN$  的垂心分别为  $H_1, H_2, H_3$ , 若  $H_1, H_2, H_3$  有两点重合, 显然它们共线, 若  $H_1, H_2, H_3$  两两不同, 过  $M$  点作  $AC$  的垂线, 交直线  $H_1H_2$  于  $H_3'$ .

过  $N$  作  $AB$  的垂线交直线  $H_1H_2$  于  $H_3''$ .

因为  $\overrightarrow{MH_3'} \perp \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KH_2} \perp \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BH_1} \perp \overrightarrow{AC}$ ,

所以  $\overrightarrow{MH_3'} \parallel \overrightarrow{KH_2} \parallel \overrightarrow{BH_1}$ . 从而  $\overrightarrow{H_2H_3'} = \frac{KM}{BK} \overrightarrow{H_1H_2}$ .

同理  $\overrightarrow{H_2H_3''} = \frac{LN}{CL} \overrightarrow{H_1H_2}$ . 又  $\frac{KM}{BK} = \frac{LN}{CL}$

所以  $\overrightarrow{H_2H_3'} = \overrightarrow{H_2H_3''}$

即  $H_3', H_3''$  是同一点, 它是过  $M$  的  $AC$  的垂线和过  $N$  的  $AB$  的垂线的交点.

所以  $H_3, H_3', H_3''$  是同一点. 从而  $H_1, H_2, H_3$  共线.

2. 设  $x, y, z$  是正实数且满足  $x + y + z = 1$ . 求证:

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+xz}} + \frac{xz}{\sqrt{xz+xy}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解: 因为  $(x+y)(y+z)(z+x) \leq \left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ .

所以我们只须证明更强一点的结论:

$$\begin{aligned} \frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+xz}} + \frac{xz}{\sqrt{xz+xy}} &\leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}. \\ \Leftrightarrow f &= \sqrt{\frac{x}{(x+z)(z+y)} \cdot \frac{xy}{(y+z)(z+x)}} + \sqrt{\frac{y}{(x+y)(y+z)} \cdot \frac{yz}{(z+x)(x+y)}} + \sqrt{\frac{z}{(y+z)(z+x)} \cdot \frac{zx}{(x+y)(y+z)}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

由于  $f$  关于  $x, y, z$  轮换对称, 不妨设  $x = \min\{x, y, z\}$ , 下只须分两种情况 (i)  $x \leq y \leq z$  和 (ii)  $x \leq z \leq y$  证明便可, 由于两种情况的证明本质上完全相同, 我们仅证第一种情况.

由  $x \leq y \leq z \Rightarrow xy \leq zx \leq yz$ ,  $(y+z)(z+x) \geq (y+z)(x+y) \geq (x+y)(z+x)$ .

于是

$$\frac{xy}{(y+z)(z+x)} \leq \frac{zx}{(x+y)(y+z)} \leq \frac{yz}{(z+x)(x+y)} \quad ①$$

$$\text{而 } x(y+z) \leq y(z+x) \Rightarrow \frac{x}{(z+x)(x+y)} \leq \frac{y}{(x+y)(y+z)}.$$

$$\text{同理 } \frac{y}{(x+y)(y+z)} \leq \frac{z}{(y+z)(z+x)}.$$

从而

$$\frac{x}{(z+x)(x+y)} \leq \frac{y}{(x+y)(y+z)} \leq \frac{z}{(y+z)(z+x)}. \quad ②$$

由①, ②及排序不等式知

$$\begin{aligned} f &\leq \sqrt{\frac{x^2 y}{(x+y)(z+x)^2(y+z)}} + \sqrt{\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2}} + \sqrt{\frac{yz^2}{(z+x)^2(x+y)(y+z)}} \\ &= \sqrt{\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2}} + \sqrt{\frac{y}{(x+y)(y+z)}} \left( \frac{x}{z+x} + \frac{z}{z+x} \right) \\ &= \sqrt{\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{(x+y)(y+z)}} \\ &\leq \sqrt{3 \left( \frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \frac{y}{(x+y)(y+z)} \right)}. \end{aligned}$$

因此要证  $f \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ , 只须证明

$$\begin{aligned} &\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2} + \frac{1}{2} \frac{y}{(x+y)(y+z)} \leq \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow &16xyz + 8y(x+y)(y+z) \leq 9(x+y)^2(y+z)^2 \\ \Leftrightarrow &9x^2z^2 + y^2 \geq 6xyz \\ \Leftrightarrow &(3xyz - y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. 求出所有整系数二次多项式  $d(x) = x^2 + ax + b$ , 使得存在整系数多项式  $p(x)$  和非零

整系数多项式  $q(x)$ , 满足

$$(p(x))^2 - d(x)(q(x))^2 = 1, \quad \forall x \in R. \quad (*)$$

解: 我们用  $Z[x]$  表示整系数多项式,  $Z_n[x]$  表示整系数  $n$  次多项式的集合。我们将证明如下命题:

**命题:** 方程(\*)存在非平凡解  $p, q \in Z(x)$  当且仅当

$$(a, b) = (2k+1, k^2+k), (2k, k^2 \pm 1), (2k, k^2 \pm 2), \quad k \in Z.$$

引理 1. 方程 (\*) 存在非平凡解  $p \in Z_1[x], q \in Z$ , 当且仅当

$$(a, b) = (2k+1, k^2+k), (2k, k^2-1), \quad k \in Z.$$

证明: 充分性: 若  $(a, b) = (2k+1, k^2+k)$ , 则  $p = 2x+2k+1, q = 2$  是 (\*) 的解. 若

$(a, b) = (2k, k^2-1)$  则  $p = x+k, q = 1$  是 (\*) 的解.

必要性: 令  $p = cx+e, q = l, c \neq 0, e, l \in Z$  满足 (\*).

则

$$(cx+e)^2 - l^2(x^2+ax+b) = 1, \quad \forall x \in R.$$

整理得

$$c^2 = l^2, \quad 2ce = l^2a, \quad e^2 = l^2b+1.$$

即

$$l = \pm c, \quad 2e = ca, \quad e^2 = c^2b+1.$$

若  $a = 2k$  为偶数, 则  $e = ck \Rightarrow c^2k^2 = c^2b+1 \Rightarrow b = k^2-1$ .

若  $a = 2k+1$  为奇数, 则

$$e = \frac{c(2k+1)}{2} \Rightarrow c^2(2k+1)^2 = 4c^2b+4 \Rightarrow c^2 = 4, \quad b = k^2+k.$$

引理 2.  $a = 2k$  为偶数, 则存在  $p \in Z_2[x], q \in Z_1[x]$  满足 (\*) 当且仅当

$$b = k^2 \pm 1, \quad k^2 \pm 2.$$

证明: 充分性: 若  $(a, b) = (2k, k^2 \pm 1)$ , 则  $p = 2(x+k)^2 \pm 1, q = 2(x+k)$  是 (\*) 的解. 若

$(a, b) = (2k, k^2 \pm 2)$ , 则  $p = (x+k)^2 \pm 1, q = x+k$  是 (\*) 的解.

必要性：做变量替换  $x+k \rightarrow x$ ，则  $d(x)$  变为  $d(x) = x^2 + l$ 。设  $p = cx^2 + hx + e$ ，

$q = fx + g$  带入(\*)后比较系数得

$$c^2 = f^2 \neq 0, \quad ch = fg, \quad h^2 + 2ce = lf^2 + g^2, \quad he = lfg, \quad e^2 = lg^2 + 1$$

$$\Rightarrow c = \pm f, \quad h = \pm g, \quad 2e = \pm lf$$

$$\text{上式推出 } e \neq 0, \quad l \neq 0, \quad h = \pm 2g \Rightarrow h = g = 0$$

$$\Rightarrow e = \pm 1, \Rightarrow lf = \pm 2, \Rightarrow l = \pm 1, \pm 2$$

引理 3. 设整系数二次多项式  $d(x) = x^2 + ax + b$  满足  $a = 0, 1$  且当  $a = 0$  时  $|b| \geq 2$ ，当

$a = 1$  时， $b \neq 0$ 。则对方程(\*)的任意解  $p(x), q(x) \in Z[x]$ ，都存在  $p_1(x) \in Z[x]$  使得

$$p(x) = p_1(x)d(x) \pm 1.$$

证明：令  $p(x) = p_1(x)d(x) + r(x)$ ， $r(x) = a_1x + b_1 \in Z_1[x]$ 。

$$x_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ 是 } d(x) = 0 \text{ 的两个根.}$$

则

$$r(x_+)^2 = r(x_-)^2 = 1$$

$$\text{即 } (a_1x_+ + b_1)^2 = (a_1x_- + b_1)^2 = 1$$

$$\text{从而 } a_1(-a_1a + 2b_1) = 0$$

如果  $-a_1a + 2b_1 = 0$ ，则  $r(x_+)^2 = 1 \Leftrightarrow a_1^2(a^2 - 4b) = 4$  矛盾。

故  $a_1 = 0, b_1 = \pm 1$ 。

由引理 1 和 2，命题结论的充分性已得到证明。

下证必要性：令  $a = 2k, 2k+1$ ，做变量替换  $x+k \rightarrow x$ ，则  $d(x) = x^2 + c$ ，

$x^2 + x + c, c \in Z$ 。我们将证明下面条件成立时，

$$d(x) = x^2 + c, \quad |c| \geq 3 \tag{1}$$

或

$$d(x) = x^2 + x + c, \quad |c| \geq 1 \tag{2}$$



方程(\*)没有非平凡的解  $p, q \in Z[x]$ .

我们将对  $n = \deg p$  做归纳法.

由引理 1 和 2, 当(1)(或(2))成立时, 方程(\*)没有非平方解  $p(x), q(x)$  满足  $\deg p(x) \leq 2$  ( $\deg p(x) \leq 1$ ).

下设方程(\*)在条件(1)(或(2))成立时, 没有满足  $\deg p < n$  的解  $p, q \in Z[x]$ . 我们用反证法证明它也没有满足  $\deg p = n$  的解.

设  $p \in Z_n[x], q \in Z_{n-2}[x]$  是(\*)的一个解, 由引理 3, 存在  $p_1 \in Z[x]$  使得  $p = dp_1 \pm 1$ . 带入(\*)得  $p_1(dp_1 + 2) = q^2$ . 由于  $p_1$  与  $dp_1 + 2$  互素, 从而存在  $c_1 \in Z, u(x), v(x) \in Z[x]$  满足

$$p_1 = c_1 u^2, \quad dp_1 \pm 2 = c_1 v^2. \quad \text{推出 } c_1(v^2 - du^2) = \pm 2.$$

令  $v(x) = dv_1 + a_1x + b_1, \quad a_1, b_1 \in Z, \quad v_1 \in Z[x]$ .

设  $x_+, x_-$  为  $d(x) = 0$  的两个根, 则

$$c_1(a_1x_+ + b_1)^2 = c_1(a_1x_- + b_1)^2 = \pm 2$$

若  $a_1 \neq 0$ , 则由上式可得(见引理 3 的证明)

$$c_1 a_1^2 (a^2 - 4c) = 4 \quad \text{矛盾.}$$

故  $a_1 = 0$ , 推出  $c_1 b_1^2 = \pm 2$ , 推出  $c_1 = \pm 2$ .

这样我们得到

$$v^2 - du^2 = 1.$$

注意到

$\deg V < \deg P = n$ , 由归纳法假设上式不成立.

## 国家集训队考试试题（五）

2006年3月26日 8:30—12:30, 沈阳

1. 设  $A$  为正整数集  $N^*$  的一个非空子集, 如果所有充分大的正整数都可以写成  $A$  中两个数之和(可以相同), 则称  $A$  为一个二阶基. 对  $x \geq 1$ , 记  $A(x)$  为  $A$  中所有不超过  $x$  的正整数组成的集合. 证明: 存在一个二阶基  $A$  及正常数  $C$ , 使得对所有  $x \geq 1$  都有  $|A(x)| \leq C\sqrt{x}$ .

证明: 令

$$A = \{2^{2b_1} + 2^{2b_2} + \cdots + 2^{2b_n} \mid 0 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_n, b_i \in \mathbb{Z}\} \\ \cup \{2^{2c_1+1} + 2^{2c_2+1} + \cdots + 2^{2c_m+1} \mid 0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_m, c_i \in \mathbb{Z}\}.$$

由每一个整数都可以表为  $2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_r}$ ,  $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r$  的形式及  $2^k = 2^{k-1} + 2^{k-1}$  ( $k \geq 1$ ) 知  $A$  为一个二阶基.

若  $2^{2b_1} + 2^{2b_2} + \cdots + 2^{2b_n} \leq x$ , 则  $2^{2b_n} \leq x$ ,  $2^{b_n} \leq \sqrt{x}$ .

从而

$$2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_n} < 2^{b_n+1} < 2\sqrt{x}.$$

因此  $A(x)$  中形如  $2^{2b_1} + 2^{2b_2} + \cdots + 2^{2b_n}$  的数的个数不超过  $2\sqrt{x}$ .

若  $2^{2c_1+1} + 2^{2c_2+1} + \cdots + 2^{2c_m+1} \leq x$  则  $2^{2c_m+1} \leq x$ ,  $2^{c_m} \leq \sqrt{\frac{x}{2}}$ .

从而

$$2^{c_1} + 2^{c_2} + \cdots + 2^{c_m} < 2^{c_m+1} < \sqrt{2x}.$$

因此  $A(x)$  中形如  $2^{2c_1+1} + 2^{2c_2+1} + \cdots + 2^{2c_m+1}$  的数的个数不超过  $\sqrt{2x}$ .

所以

$$|A(x)| \leq (2 + \sqrt{2})\sqrt{x}.$$

2. 设  $f(n)$  满足  $f(0) = 0$ ,  $f(n) = n - f(f(n-1))$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . 试确定所有实系数多项式  $g(x)$ , 使得

$$f(n) = [g(n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其中  $[g(n)]$  表示不超过  $g(n)$  的最大整数.

解：答案：  $g(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)(x+1)$ .

(1)先证明

$$f(n) = \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)(n+1) \right].$$

令  $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ . 只需证明对  $n=1, 2, \dots$  有  $[(n+1)\alpha] = n - [([n\alpha]+1)\alpha]$ .

设  $n\alpha = [n\alpha] + \delta$ , 则 (注意到  $\alpha^2 + \alpha = 1$ )

$$[(n+1)\alpha] = [[n\alpha] + \delta + \alpha] = [n\alpha] + [\delta + \alpha]$$

$$\begin{aligned} [([n\alpha]+1)\alpha] &= [(n\alpha - \delta + 1)\alpha] = [n\alpha^2 - \delta\alpha + \alpha] = [n - n\alpha - \delta\alpha + \alpha] \\ &= [n - [n\alpha] - \delta - \delta\alpha + \alpha] = n - [n\alpha] + [-\delta - \delta\alpha + \alpha] \\ &= n - [(n+1)\alpha] + [\delta + \alpha] + [-\delta - \delta\alpha + \alpha] \end{aligned}$$

因此只要证明  $[\delta + \alpha] + [-\delta - \delta\alpha + \alpha] = 0$ .

情形 1.  $\delta + \alpha < 1$ , 此时  $[\delta + \alpha] = 0$ .

$$-\delta - \delta\alpha + \alpha = -\delta(1+\alpha) + \alpha > (\alpha-1)(\alpha+1) + \alpha = \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$-\delta - \delta\alpha + \alpha \leq \alpha < 1$$

因此  $[-\delta - \delta\alpha + \alpha] = 0$ .

情形 2.  $\delta + \alpha \geq 1$ . 因为  $\delta + \alpha < 2$ , 故  $[\delta + \alpha] = 1$ .

此时,

$$-\delta - \delta\alpha + \alpha = -\delta(1+\alpha) + \alpha < (\alpha-1)(\alpha+1) + \alpha = \alpha^2 + \alpha - 1 = 0.$$

$$-\delta - \delta\alpha + \alpha = -\delta(1+\alpha) + \alpha > -(1+\alpha) + \alpha = -1.$$

因此  $[-\delta - \delta\alpha + \alpha] = -1 = -[\delta + \alpha]$ .

即  $[\delta + \alpha] + [-\delta - \delta\alpha + \alpha] = 0$ .

所以  $g(x) = (n+1)\alpha$  满足要求.

(2)证明  $g(x) = ax + b$ ,  $a, b \in R, a \neq 0$ .

设  $g(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_k \neq 0$

由条件

$$[g(n)] = n - [g(g(n-1))]. \quad (*)$$

因此

$$\frac{[g(n)]}{n^{k^2}} = \frac{n}{n^{k^2}} - \frac{[g(g(n-1))]}{n^{k^2}}. \quad (**)$$

若  $k \geq 2$ , 则令  $n \rightarrow \infty$ , 有  $0 = 0 - a_k^{k+1}$ , 与  $a_k \neq 0$  矛盾.

因此  $k \leq 1$ . 又由(\*)知  $g(x)$  不能恒为常数, 故  $k = 1$ , 即  $g(x) = a_1x + a_0$ ,  $a_1 \neq 0$

(3) 证明  $0 \leq f(n) \leq n$ .

对  $n$  用归纳法:

- 1)  $n = 0$  显然成立;
- 2) 假设  $n-1$  成立, 现看  $n$  的情形. 由归纳假设

$$0 \leq f(n-1) \leq n-1, \quad 0 \leq f(f(n-1)) \leq f(n-1) \leq n-1.$$

因此  $1 \leq f(n) \leq n$ .

由数学归纳法知对所有的  $n$ , 有  $0 \leq f(n) \leq n$ .

(4) 证明  $g(x) = \alpha x + b$ ,  $b \in R$ .

由(2)知  $g(x) = ax + b$ ,  $a, b \in R, a \neq 0$ .

在(\*\*)中令  $n \rightarrow \infty$ , 有  $a = 1 - a^2$ .

由(3)知  $a > 0$ , 因此  $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$ .

即  $g(x) = \alpha x + b$ .

(5) 证明  $g(x) = \alpha x + \alpha$ .

$$\begin{aligned} f(n) &= [g(n)] = [\alpha n + b] = [\alpha(n+1) + b - \alpha] \\ &= [\alpha(n+1)] + [\{\alpha(n+1)\} + b - \alpha] \end{aligned}$$

由(1)知对所有的  $n \geq 0$ , 有  $[\{\alpha(n+1)\} + b - \alpha] = 0$ .

令  $n = 0$  知  $0 \leq b \leq 1$ .

若  $b - \alpha < 0$ , 我们将证明存在  $n$ , 使得

$$\{\alpha(n+1)\} < \frac{1}{2}(\alpha - b). \quad \text{此时 } [\{\alpha(n+1)\} + b - \alpha] \leq -1.$$

若  $b - \alpha > 0$ , 我们将证明存在  $n$ , 使得

$$\{\alpha(n+1)\} > 1 - \frac{1}{2}(b - \alpha). \text{ 此时 } [\{\alpha(n+1)\} + b - \alpha] \geq 1.$$

为此要证明

引理: 设  $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ,  $\varepsilon > 0$ , 则存在正整数  $n_1, n_2$  使得

$$\{n_1\alpha\} < \varepsilon, \quad \{n_2\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

证: 设  $N$  为一正整数,  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ .

考虑  $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\}$  共  $N+1$  个数, 一定存在  $0 \leq k, l \leq N$ ,  $k \neq l$  使得

$$0 < \{k\alpha\} - \{l\alpha\} < \frac{1}{N}.$$

即  $0 < (k-l)\alpha - [k\alpha] + [l\alpha] < \frac{1}{N}.$

若  $k > l$ , 则

$$0 < \{(k-l)\alpha\} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

此时, 设  $L$  为整数, 使

$$L\{(k-l)\alpha\} < 1 < (L+1)\{(k-l)\alpha\}.$$

由于  $L(k-l)\alpha = L[(k-l)\alpha] + L\{(k-l)\alpha\}$ ,

$$\text{故 } \{L(k-l)\alpha\} = L\{(k-l)\alpha\} > 1 - \{(k-l)\alpha\} > 1 - \varepsilon.$$

若  $k < l$ , 则

$$-\frac{1}{N} < (l-k)\alpha + [k\alpha] - [l\alpha] < 0.$$

即  $-\frac{1}{N} < \{(l-k)\alpha\} - 1 < 0.$

即

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{N} < \{(l-k)\alpha\} < 1.$$

取整数  $T$ , 使

$$T(1 - \{(l-k)\alpha\}) < 1 < (T+1)(1 - \{(l-k)\alpha\}).$$

则

$$\begin{aligned} T(l-k)\alpha &= T[(l-k)\alpha] + T\{(l-k)\alpha\} \\ &= T[(l-k)\alpha] + T + T(\{(l-k)\alpha\} - 1) \\ &= T[(l-k)\alpha] + T - 1 + 1 - T(1 - \{(l-k)\alpha\}) \end{aligned}$$

因此

$$\{T(l-k)\alpha\} = 1 - T(1 - \{(l-k)\alpha\}) < 1 - \{(l-k)\alpha\} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

引理得证.

所以  $b - \alpha = 0$ , 即  $b = \alpha$ .

综上得

$$g(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)(x + 1).$$

3. 给定正整数  $m, n$ . 将  $m \times n$  棋盘上的  $mn$  个  $1 \times 1$  方格交替地染成红蓝两色(有公共边的二个方格不同色, 左下角方格为红色). 此时从左下到右上的对角线被染成一些红、蓝线段(每条线段与它所在的方格同色). 试求所有红色线段的长度之和.

解: 令红色线段长度之和为  $L$ , 蓝色线段长度之和为  $S$ , 则  $L + S = \sqrt{m^2 + n^2}$ .

设  $(m, n) = d, m = ad, n = bd$ . 则  $(a, b) = 1$ . 对角线上共有  $d - 1$  个格点(方格的顶点), 将对角线等分为  $d$  段, 每段上线段的长度分布情况相同(颜色或相同或相反). 每段是一个  $a \times b$  棋盘的对角线, 内部不含格点, 因此各线段的颜色红蓝交替.

(1). 若  $a, b$  一奇一偶, 每个  $a \times b$  棋盘对角线的中点是某个方格一边的中点, 对角线上的各线段关于中点对称分布且颜色相反, 故两色线段总长度相等.  $L = S = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$ .

$$L = S = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}.$$

(2). 若  $a, b$  同为奇数. 由于  $a + b$  为偶数,  $d$  个  $a \times b$  棋盘的颜色分布彼此相同.

$L - S = du$ ,  $u$  是一个  $a \times b$  棋盘的对角线上红蓝线段总长度之差.

不妨设  $a \geq b$ .  $b = 1$  时, 对角线等分为  $a$  段, 第一段为红色, 各段红蓝交替, 段数为奇数, 故  $u = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ .

下设  $a > b > 1$ . 将对角线  $ab$  等分, 分点记为  $1, 2, \dots, ab - 1$ , 每小段长  $v = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$ .

分点  $jb$  ( $1 \leq j \leq a - 1$ ) 是对角线与水平方格线的交点,  $ia$  ( $1 \leq i \leq b - 1$ ) 是与竖直方格线的交点. 它们是红、蓝线段的分界点, 将其它分点抹去.  $jb$  将对角线等分为  $a$  个区间, 每个长为  $bv$ . 点  $ia$  分布在这些区间内, 每个区间至多含一个点, 故正好有  $b - 1$  个区间各含一个点, 另外  $a - b + 1$  个区间为空. 下面对两种区间分别求红蓝线段长度的代数和(红色取+, 蓝色取-). 任一线段的符号等于  $(-1)^k$ ,  $k$  是该线段左侧的分点个数, 含该线段的左端点).

空区间整段同色, 第一个为红色(因为  $a > b$ ). 相邻的两个空区间隔着偶数个线段, 故颜色相反. 又因空区间的个数为奇数, 故所有空区间长度的代数和等于  $bv$ .

令  $ia = q_i b + r_i$  ( $1 \leq r_i \leq b - 1$ ), 则分点  $ia$  在区间  $[q_i b, (q_i + 1)b]$  内, 将它分为颜色相

反的两线段, 左段长为  $r_i v$ , 右段长为  $(b - r_i)v$ . 注意到这个区间左侧共有  $q_i + i - 1$  个分点 (含  $q_i b$ ). 故这个区间两线段长度的代数和等于  $((-1)^{q_i+i-1} r_i + (-1)^{q_i+i} (b - r_i))v = (-1)^{q_i+i} (b - 2r_i)v$ . 因为  $a(q_i + i) = q_i(a + b) + r_i$ ,  $a + b$  为偶数,  $a$  为奇数, 故  $q_i + i$  与  $r_i$  同奇偶. 又因  $a$  与  $b$  互素,  $i$  取遍  $1, 2, \dots, b - 1$  时  $r_i$  也取遍  $1, 2, \dots, b - 1$ . 于是得到所有不空区间上线段长度的代数和等于

$$v \sum_{i=1}^{b-1} (-1)^{q_i+i} (b - 2r_i) = v \sum_{r_i=1}^{b-1} (-1)^{r_i} (b - 2r_i).$$

由于  $b - 1$  为偶数, 这个和式等于

$$v(0 - 2 \sum_{r=1}^{b-1} (-1)^r r) = -(b - 1)v.$$

于是  $u = bv - (b - 1)v = v$ ,  $L - S = du = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn} (m, n)^2$ .  $b = 1$  的结果与此一致.

综上所述, 当  $ab$  为偶数, 即  $m$  与  $n$  含素因子 2 的方次不同时,  $L = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$ ;

而  $m$  与  $n$  含素因子 2 的方次相同时,  $L = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn} ((m, n)^2 + mn)$ , 其中  $(m, n)$  是  $m$  与  $n$  的最大公因数.

## 国家集训队考试试题解答（六）

2006年3月28日 8:30—12:30, 沈阳

1. 设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于两点 $A, B$ . 点 $R$ 在 $\odot O_1$ 的弧 $AB$ 上, 点 $T$ 在 $\odot O_2$ 的弧 $AB$ 上(如图).  $AR, BR$ 与 $\odot O_2$ 交于 $C, D$ ,  $AT, BT$ 交 $\odot O_1$ 于 $Q, P$ . 若 $PR$ 与 $TD$ 交于 $E$ ,  $TC$ 与 $RQ$ 交于 $F$ . 求证:  $AE \cdot BT \cdot BR = BF \cdot AT \cdot AR$ .

证明: 延长 $AQ, DB$ 交于 $H$ . 连接

$BC, AD$ , 则有

$$HQ \cdot HA = HB \cdot HR$$

$$HT \cdot HA = HB \cdot HD$$

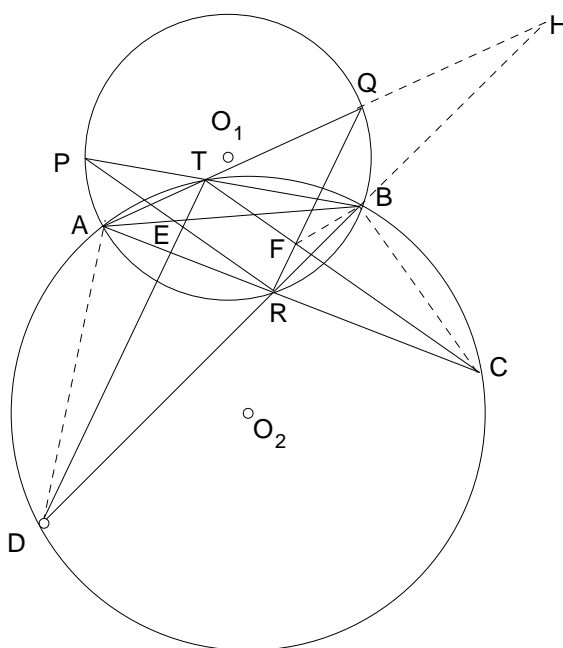
相除得

$$\frac{HQ}{HT} = \frac{HR}{HD} \Rightarrow QR \parallel TD.$$

同理  $PR \parallel TC$ .

又  $\angle RBC = \angle DTC = \angle RFC$

所以  $R, F, B, C$  共圆.



令  $\angle TCB = \angle FRB = \angle BAQ = \alpha$ ,  $\angle TBA = \angle ADT = \angle ARP = \beta$ .

由正弦定理, 在  $\triangle ABT$  中,  $\frac{AT}{BT} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ , 同理  $\frac{AR}{BR} = \frac{\sin \angle ABR}{\sin \angle BAR}$

从而  $\frac{AT \cdot AR}{BT \cdot BR} = \frac{\sin \beta \sin \angle ABR}{\sin \alpha \sin \angle BAR}$

又

$$\frac{AE}{TE} = \frac{\sin \angle ATE}{\sin \angle TAE} = \frac{\sin \angle AQR}{\sin \angle TPE} = \frac{\sin \angle ABR}{\sin \angle BTC} = \frac{\sin \angle ABR}{\sin \angle BAR}, \quad \frac{BF}{FR} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

相除得

$$\frac{AE \cdot FR}{BF \cdot TE} = \frac{\sin \angle ABR}{\sin \angle BAR} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

又  $TERF$  是平行四边形, 所以  $\frac{AE}{BF} = \frac{AT \cdot AR}{BT \cdot BR}$ .

2. 证明: 对任给正整数  $m, n$ , 总存在正整数  $k$ , 使得  $2^k - m$  至少有  $n$  个不同的素因子.



证明：固定  $m$ ，不妨设  $m$  为奇数. 我们将证明对任何正整数  $n$ ，总存在  $k_n$ ，使得  $2^{k_n} - m$  至少有  $n$  个不同得素因子. 对  $n$  用归纳法：

1) 当  $n = 1$  时， $2^{3m} - m$  至少有一个素因子.

2) 假设  $2^{k_n} - m$  至少有  $n$  个不同得素因子，令  $A_n = 2^{k_n} - m$ ，则  $(A_n, 2) = 1$ ，且

$$2^{k_n + \varphi(A_n^2)} - m \equiv 2^{k_n} - m \equiv A_n \pmod{A_n^2}.$$

因此  $A_n \mid 2^{k_n + \varphi(A_n^2)} - m$ .

取素数  $p$ ， $p \mid \frac{2^{k_n + \varphi(A_n^2)} - m}{A_n}$ ，由  $\frac{2^{k_n + \varphi(A_n^2)} - m}{A_n} \equiv 1 \pmod{A_n}$  知  $p$  不能整除  $A_n$ .

所以

$2^{k_n + \varphi(A_n^2)} - m$  至少有  $n + 1$  个不同素因子，由数学归纳法知结论成立.

3. 设  $k, n$  为大于 1 的正整数， $N$  为正整数集.  $A_1, A_2, \dots, A_k$  为  $N$  的两两不相交的子集，其并为  $N$ . 证明：对某个  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ，存在无穷多个不可约的  $n$  次多项式，使得每个多项式系数两两不同且都在  $A_i$  中.

解：我们先证一个引理.

引理：设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$  为整系数多项式. 如果  $a_0 = p$  为质数，且  $p > |a_1| + \dots + |a_n|$ ，则  $f$  为不可约多项式.

证明：设  $f(x) = g(x)h(x)$ ， $g, h$  为整系数多项式，则  $p = g(0)h(0)$ . 由于  $p$  是素数，所以  $|g(0)| = 1$  或者  $|h(0)| = 1$ . 不妨设  $|g(0)| = 1$ ，则  $g$  的所有复根的绝对值的乘积为 1，即  $g$  存在一个根  $\alpha$ ，满足  $|\alpha| \leq 1$ ，从而  $\alpha$  也是  $f$  的根.

但

$$|f(\alpha)| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \alpha^i + p \right| \geq p - \sum_{i=1}^n |a_i \alpha^i| \geq p - \sum_{i=1}^n |a_i| > 0$$

矛盾，故  $f$  为不可约多项式.

再由  $A_i$  包含有无穷多个质数，由引理我们可以找到无穷多个不可约的  $n$  次多项式，使得每个多项式系数两两不同且都在  $A_i$  中.

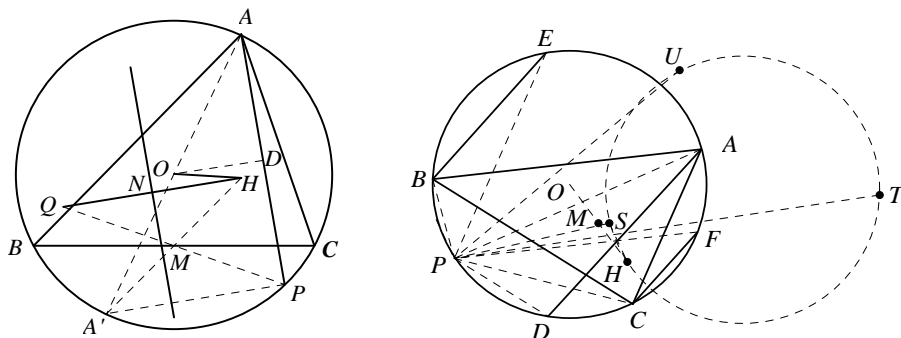
# 国家集训队选拔考试试题

2006年3月31日 8:00—12:30, 沈阳

1. 设  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心,  $D, E, F$  为  $\triangle ABC$  的外接圆上三点使得  $AD \parallel BE \parallel CF$ ,  $S, T, U$  分别为  $D, E, F$  关于边  $BC, CA, AB$  的对称点. 求证:  $S, T, U, H$  四点共圆.

**证明:** 先证明引理: 设  $O, H$  分别为  $\triangle ABC$  的外心和垂心,  $P$  为  $\triangle ABC$  的外接圆上任意一点,  $P$  关于  $BC$  的中点的对称点为  $Q$ , 则  $QH$  的垂直平分线与直线  $AP$  关于  $OH$  的中点对称.

事实上, 过  $A$  作  $\triangle ABC$  的外接圆的直径  $AA'$ , 则  $A'$  与  $\triangle ABC$  的垂心  $H$  也关于  $BC$  的中点对称, 所以  $QH \parallel A'P$ . 又  $A'P \perp AP$ , 因此,  $QH \perp AP$ . 设  $D, N$  分别为  $AP, QH$  的中点, 则  $A'P = 2OD, QH = 2NH$ , 于是,  $OD \parallel NH$ . 而  $AP \perp OD$ , 故  $QH$  的垂直平分线与直线  $AP$  关于  $OH$  的中点对称.



再证原题. 过点  $D$  作  $BC$  的平行线与  $\triangle ABC$  的外接圆交于另一点  $P$ . 由  $AD \parallel BE \parallel CF$  易知  $PE \parallel CA, PF \parallel AB$ . 因  $PD \parallel BC$ ,  $S$  是点  $D$  关于  $BC$  的对称点, 所以, 点  $P$  关于  $BC$  的中点的对称点是  $S$ . 于是, 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O, OH$  的中点为  $M$ , 由引理, 直线  $AP$  关于点  $M$  的对称直线是  $HS$  的垂直平分线; 同理, 直线  $BP, CP$  关于点  $M$  的对称直线分别是  $HT$  的垂直平分线和  $HU$  的垂直平分线. 而  $AP, BP, CP$  有公共点  $P$ , 因此  $HS, HT, HU$  这三条线段的三条垂直平分线交于一点. 故  $S, T, U, H$  四点共圆.

2. 给定正整数  $n$ , 求最大的实数  $C$ , 满足: 若一组大于 1 的整数 (可以有相同的) 的倒数之和小于  $C$ , 则一定可以将这一组数分成不超过  $n$  组, 使得每一组数的倒数之和都小于 1.

答案:  $C = \frac{n+1}{2}$ .

取这一组数为  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , 若  $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 2$  知  $C \leq \frac{n+1}{2}$ .

下面对  $n$  用数学归纳法证明: 若

$$\sum_{i=1}^s \frac{1}{a_i} < \frac{n+1}{2},$$

则可将  $a_1, a_2, \dots, a_s$  分成不超过  $n$  组, 使得每组数的倒数之和小于 1.

- 1)  $n = 1$ 时, 结论成立.  
 2) 假设  $n - 1$ 时结论成立, 现看  $n$  的情形.

3. 对正整数  $M$ , 如果存在整数  $a, b, c, d$ , 使得

$$M \leq a < b \leq c < d \leq M + 49, \quad ad = bc,$$

则称  $M$  为好数, 否则称  $M$  为坏数. 试求最大的好数和最小的坏数.

解: 最大的好数是 576, 最小的坏数是 443.

引理: 若正整数  $a, b, c, d$  满足  $a < b \leq c < d$ ,  $ad = bc$ , 则存在正整数  $u, v$ , 使得

$$a \leq (u - 1)(v - 1) < uv \leq d.$$

从而(不妨设  $u \leq v$ )

$$a \leq (u - 1)(v - 1) < (u - 1)v \leq u(v - 1) < uv \leq d.$$

$$[(u - 1)(v - 1)][uv] = [(u - 1)v][u(v - 1)].$$

证: 由  $ad = bc$  知  $\frac{a}{(b, c)} \frac{d}{(b, d)} = \frac{b}{(b, d)} \frac{c}{(a, c)}$ .

因为  $\left(\frac{a}{(a, c)}, \frac{c}{(a, c)}\right) = 1$ ,  $\left(\frac{d}{(b, d)}, \frac{b}{(b, d)}\right) = 1$ , 故

$$\frac{a}{(a, c)} = \frac{b}{(b, d)} = s, \quad \frac{d}{(b, d)} = \frac{c}{(a, c)} = t.$$

因此

$$a = (a, c)s, \quad b = (b, d)s, \quad c = (a, c)t, \quad d = (b, d)t.$$

由  $a < b$  知  $(a, c) < (b, d)$ , 由  $a < c$  知  $s < t$ .

令  $u = (b, d)$ ,  $v = t$ , 则

$$a = (a, c)s \leq (u - 1)(v - 1), \quad d = uv.$$

(i) 576 是最大的好数.

由  $576 = 24 \times 24 < 24 \times 25 = 24 \times 25 < 25 \times 25 = 625$ , 知 576 为好数.

设  $M \geq 577$ , 若  $M$  为好数, 则由引理知存在正整数  $u, v$ ,  $u \leq v$ , 使得

$$M \leq (u - 1)(v - 1) < uv \leq M + 49.$$

由此知  $uv - (u - 1)(v - 1) \leq 49$ , 即  $u + v \leq 50$ .

另一方面, 由  $577 \leq M \leq (u-1)(v-1) \leq \left(\frac{u+v-2}{2}\right)^2$  知

$(u+v-2)^2 \geq 2308 > 48^2$ , 从而  $u+v-2 \geq 49$ , 即  $u+v \geq 51$ , 矛盾.

所以 576 为最大的好数.

(ii) 当  $1 \leq M \leq 288$  时, 取整数  $n$ , 使得

$$13n \leq M + 49 < 13(n+1).$$

则  $13n \leq M + 49 \leq 337$ . 从而  $n \leq 25$ .

这样  $12(n-1) = 13(n+1) - n - 25 \geq M + 50 - n - 25 \geq M$ .

即

$$M \leq 12(n-1) < 13n \leq M + 49.$$

因此当  $1 \leq M \leq 288$ ,  $M$  为好数.

取

$$\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^{23} = \{(13, 26), (14, 25), (19, 19), (14, 26), (15, 25), (19, 20), (15, 26), (20, 20), \\ (17, 24), (19, 22), (20, 21), (13, 33), (18, 24), (20, 20), (21, 21), (15, 30), \\ (19, 24), (16, 29), (18, 26), (19, 25), (20, 24), (21, 23), (14, 35)\}.$$

验证知

$$u_i v_i \leq (u_{i-1} - 1)(v_{i-1} - 1) + 50, \quad i = 2, 3, \dots, 23.$$

$$(u_i - 1)(v_i - 1) = 300, \quad u_i v_i = 338, \quad (u_{23} - 1)(v_{23} - 1) = 442.$$

当  $288 < M \leq 300$  时,  $M \leq (u_1 - 1)(v_1 - 1) < u_1 v_1 \leq M + 49$ .

当  $(u_{i-1} - 1)(v_{i-1} - 1) < M \leq (u_i - 1)(v_i - 1)$  时

$$M \leq (u_i - 1)(v_i - 1) < u_i v_i \leq (u_{i-1} - 1)(v_{i-1} - 1) + 50 \leq M + 49, \quad i = 2, 3, \dots, 23.$$

因此, 当  $288 \leq M \leq 442$  时,  $M$  为好数.

下证 443 为坏数.

假设 443 为好数, 则由引理知存在正整数  $u, v, u \leq v$ , 使得

$$443 \leq (u-1)(v-1) < uv \leq 492.$$

因此  $uv - (u-1)(v-1) \leq 49$ , 即  $u+v \leq 50$ .

又  $443 \leq (u-1)(v-1) \leq \left(\frac{u+v-2}{2}\right)^2$ , 得  $u+v \geq 45$ .

由  $443 \leq (u-1)(v-1) = uv - u - v + 1 \leq uv - 2\sqrt{uv} + 1 = (\sqrt{uv} - 1)^2$

知  $\sqrt{uv} \geq 22$ ,  $uv \geq 484$ .  $uv = 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492$  中满足  $45 \leq u + v \leq 50$  只有  $(u, v) = (14, 35), (18, 27)$  而  $13 \times 34 = 442, 17 \times 26 = 442$  与  $(u-1)(v-1) \geq 443$  矛盾. 所以 443 为最小的坏数.

## 国家集训队选拔考试试题解答

2006年4月1日 8:00—12:30, 沈阳

4. 设  $k \geq 3$  是奇数. 证明: 存在一个次数为  $k$  的非整系数的整值多项式  $f(x)$ , 具有下面的性质:

(1)  $f(0) = 0, f(1) = 1$ ;

(2) 有无穷多个正整数  $n$ , 使得: 若方程

$$n = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$$

有整数解  $x_1, \cdots, x_s$ , 则  $s \geq 2^k - 1$ .

(若对每个整数  $x$ , 都有  $f(x) \in \mathbb{Z}$ , 则称  $f(x)$  为整值多项式.)

解: 我们需要一个引理.

引理: 存在一个  $k$  次整值多项式  $f(x)$ , 系数不全是整数, 满足  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 以及

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2^k}, & \text{当 } x \text{ 为偶数,} \\ 1 \pmod{2^k}, & \text{当 } x \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

证明: 熟知, 满足  $f(0) = 0, f(1) = 1$  的  $k$  次整值多项式  $f(x)$  可表示为下面的形式

$$f(x) = a_k F_k(x) + a_{k-1} F_{k-1}(x) + \cdots + a_1 F_1(x) \quad (1)$$

其中  $F_i(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$ ,  $a_k, \cdots, a_1$  为整数,  $a_k > 0, a_1 = 1$ .

容易验证  $F_i(x+2) = F_i(x) + 2F_{i-1}(x) + F_{i-2}(x)$ , 故由(1)易知

$$f(x+2) - f(x) = 2a_k F_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (2a_i + a_{i+1}) F_{i-1}(x) \quad (2)$$

现在我们取  $a_k, \cdots, a_2$  满足

$$\begin{cases} 2a_k = 2^k, \\ 2a_i + a_{i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1. \end{cases}$$

则易解得(注意  $a_1 = 1$ ),  $a_k = 2^{k-1}, a_{k-1} = -2^{k-2}, \cdots, a_2 = -2$  从而(2)化为

$$f(x+2) - f(x) = 2^k F_{k-1}(x).$$

由此立得, 对所有整数  $x$ , 有

$$f(x+2) - f(x) \equiv 0 \pmod{2^k} \quad (3)$$

由于  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , 故由(3)易推出多项式

$$f(x) = 2^{k-1}F_k(x) - 2^{k-2}F_{k-1}(x) + \cdots - 2F_2(x) + F_1(x)$$

满足引理的要求(注意  $x^k$  的系数是  $\frac{2^{k-1}}{k!}$ , 这在  $k \geq 3$  时非整数.)

回到问题, 取  $n \equiv -1 \pmod{2^k}$ , 则若有整数  $x_1, \dots, x_s$  使得  $f(x_1) + \cdots + f(x_s) = n$ , 则更有

$$f(x_1) + \cdots + f(x_s) \equiv -1 \pmod{2^k}. \quad (4)$$

由引理可知, (4)中左边每一项  $\pmod{2^k}$  是 0 或 1, 故加项至少有  $2^k - 1$  个, 即  $s \geq 2^k - 1$ .

5. 给定正整数  $m, a, b$ ,  $(a, b) = 1$ .  $A$  是正整数集的非空子集, 使得对任意的正整数  $n$  都有

$an \in A$  或  $bn \in A$ . 对所有满足上述性质的集合  $A$ , 求  $|A \cap \{1, 2, \dots, m\}|$  的最小值.

解: (i)  $a = b = 1$  时,  $A \cap \{1, 2, \dots, m\} = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $|A \cap \{1, 2, \dots, m\}| = m$

(ii) 不妨设  $a > b$ . 令

$$A_1 = \{k \mid \text{若 } a^\alpha \mid k, a^{\alpha+1} \nmid k, \text{ 则 } \alpha \text{ 为奇数}\}$$

现验证  $A_1$  满足条件:

任取正整数  $n$ , 设  $n = a^\alpha n_1$ ,  $a$  不整除  $n_1$ .

若  $2 \mid \alpha$ , 则  $an = a^{\alpha+1} n_1 \in A_1$ ;

若  $a$  不整除  $\alpha$ , 则  $bn = a^\alpha b n_1 \in A_1$ .

我们有

$$|A_1 \cap \{1, 2, \dots, m\}| = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left\lfloor \frac{m}{a^i} \right\rfloor.$$

(iii) 对任何正整数  $n$ , 取  $c_n = a$  或  $b$ , 使  $nc_n \in A$ . 令  $B = \{c_1, 2c_2, 3c_3, \dots\}$ .

因此

$$|A \cap \{1, 2, \dots, m\}| \geq |B \cap \{1, 2, \dots, m\}|. \quad (1)$$

对任何  $n$ , 设  $n = a^\alpha n_1$ ,  $a$  不整除  $n_1$ , 取

$$d_n = \begin{cases} a, & \text{若 } 2 \mid \alpha, \\ b, & \text{若 } 2 \text{ 不整除 } \alpha. \end{cases}$$

令

$$B_n = \{d_1, 2d_2, \dots, nd_n, (n+1)c_{n+1}, (n+2)c_{n+2}, \dots\}, \quad B_0 = B.$$

我们将证明

$$|B_i \cap \{1, 2, \dots, m\}| \geq |B_{i+1} \cap \{1, 2, \dots, m\}|, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

对  $i$  用归纳法.

当  $i = 0$  时, 若  $c_1 = b$ , 则  $c_1 < ic_i$  ( $i \geq 2$ ), 并且

$$|B_0 \cap \{1, 2, \dots, m\}| = 1 + |\{2c_2, 3c_3, \dots, m\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|,$$

$$|B_1 \cap \{1, 2, \dots, m\}| \leq 1 + |\{2c_2, 3c_3, \dots, m\} \cap \{1, 2, \dots, m\}| \leq |B_0 \cap \{1, 2, \dots, m\}|.$$

若  $c_1 = a$ , 则  $B_0 = B_1$ . 因此对  $i = 0$ , (2) 成立.

下设  $i \geq 1$ , 假设  $c_{i+1} \neq d_{i+1}$ ,  $i+1 = a^\alpha n_i$ ,  $a$  不整除  $n_i$ .

若  $2 \mid \alpha$ , 则  $d_{i+1} = a$ , 从而  $c_{i+1} = b$ .

此时,  $(i+1)c_{i+1} = a^\alpha b n_i$ ,  $a$  不整除  $b n_i$ .

由于  $d_1, 2d_2, \dots, id_i$  中每一个含  $a$  的最高幂均为奇数,  $2 \mid \alpha$ , 故

$$(i+1)c_{i+1} \neq d_1, 2d_2, \dots, id_i.$$

当  $j > i+1$  时,

$$(i+1)c_{i+1} = (i+1)b < jb \leq jc_j.$$

此时, 若  $(i+1)c_{i+1} \leq m$ , 则

$$\begin{aligned} |B_i \cap \{1, 2, \dots, m\}| &= 1 + |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\ &\geq |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+1)d_{i+1}, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\ &= |B_{i+1} \cap \{1, 2, \dots, m\}|. \end{aligned}$$

若  $(i+1)c_{i+1} > m$ , 则

$$(i+1)d_{i+1} = (i+1)a > (i+1)b = (i+1)c_{i+1} > m.$$

此时(2)中等号成立.

若  $2$  不整除  $\alpha$ , 则  $d_{i+1} = b$ , 从而  $c_{i+1} = a$ . 此时



$$(i+1)d_{i+1} = a^\alpha b n_i = i' d_i, \quad i' = a^{\alpha-1} b n_i < i+1.$$

因此

$$\begin{aligned} |B_i \cap \{1, 2, \dots, m\}| &= |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+1)c_{i+1}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\ &\geq |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\ &= |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+1)d_{i+1}, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\ &= |B_{i+1} \cap \{1, 2, \dots, m\}|. \end{aligned}$$

即(2)成立.

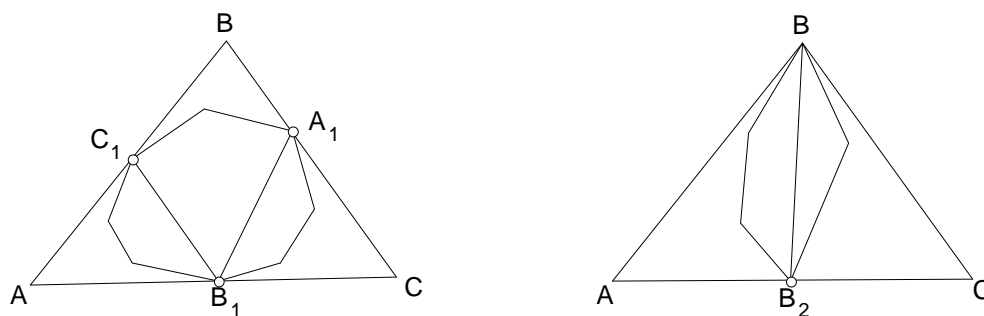
这就证明了(2)对所有  $i$  成立.

设  $n$  为最大的正整数, 使得  $nd_n \leq m$ . 则由(1), (2)知

$$\begin{aligned} |A \cap \{1, 2, \dots, m\}| &\geq |B \cap \{1, 2, \dots, m\}| = |B_0 \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\ &\geq |B_n \cap \{1, 2, \dots, m\}| = |A_1 \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left\lfloor \frac{m}{a^i} \right\rfloor. \end{aligned}$$

6. 已知  $\triangle ABC$  覆盖凸多边形  $M$ . 证明: 存在一个与  $\triangle ABC$  全等的三角形, 能够覆盖  $M$ , 并且它的一条边所在的直线与  $M$  的一条边所在的直线平行或者重合.

证明: 首先我们不妨设  $M$  有三个顶点位于  $\triangle ABC$  的边上或  $M$  有一个顶点与  $\triangle ABC$  的某顶点重合(比如  $B$ ),  $M$  的另一顶点位于  $A$  点的对边上. 如图



设初始状态下  $\angle AC_1B_1 = \theta_0$ , 我们分别将  $M$  绕  $C_1$  顺时针和逆时针旋转. 设顺时针转  $\delta_1$  时

$M$  第一次出现某一边与  $\triangle ABC$  某一边平行, 逆时针转  $\delta_2$  时  $M$  第一次出现某一边与  $\triangle ABC$

某一边平行. 对  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ,  $\theta_1 = \theta_0 - \delta_1$ ,  $\theta_2 = \theta_0 + \delta_2$ , 设  $M$  首先绕  $C_1$  旋转到相应的  $\theta$

角度, 然后再分别作以  $A$  和  $B$  为中心的位似变换, 使得  $M$  的像(记为  $M_\theta$ )的相应的两顶点

重新分别位于  $AC$  和  $BC$  上. 设  $C_1B_1 = mf(\theta)$ ,  $A_1B_1 = nf(\theta)$ ,  $f(\theta_0) = 1$ , 其中  $m, n$  分别是

初始状态下相应的距离. 令  $\varphi = \angle B + \angle C_1B_1A_1$  (为定值), 则

$$AC = AB_1 + B_1C = \frac{mf(\theta)\sin\theta}{\sin\angle A} + \frac{nf(\theta)}{\sin\angle C}\sin(\varphi - \theta).$$

故

$$f(\theta) = \frac{AC \sin\angle A \cdot \sin\angle C}{m \sin\theta \cdot \sin\angle C + n \sin(\varphi - \theta) \cdot \sin\angle A} = \frac{AC \sin\angle A \cdot \sin\angle C}{a \sin(\theta + \varphi_1)}$$

其中  $a, \varphi_1$  为常数. 由于  $\sin(\theta + \varphi_1)$  为上凸函数, 故其必然在端点达到最小值. 故  $\max\{f(\theta_1), f(\theta_2)\} \geq f(\theta_0) = 1$ , 故  $M_{\theta_1}$  或  $M_{\theta_2}$  与  $M$  相似比例常数不小于 1, 并且位于  $\triangle ABC$  中.

对于第二种情况可以类似讨论. 设  $BB_2 = mf(\theta)$ ,  $f(\theta_0) = 1$ ,  $AB_2 = \frac{BB_2}{\sin\angle A} \cdot \sin\theta$ ,

$CB_2 = \frac{BB_2}{\sin\angle C} \cdot \sin(\angle B - \theta)$ . 从而

$$AC = \frac{mf(\theta)\sin\theta}{\sin\angle A} + \frac{mf(\theta)}{\sin\angle C}\sin(\angle B - \theta) = \frac{f(\theta)a \sin(\theta + \varphi_1)}{\sin\angle A \cdot \sin\angle C}.$$

故

$$f(\theta) = \frac{AC \sin\angle A \cdot \sin\angle C}{a \sin(\theta + \varphi_1)}$$

结论一样.