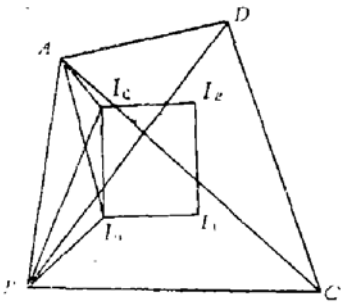
第一届（1986年）数学奥林匹克国家集训队选拔试题解答

1. 四边形$ABCD$内接于圆，$\triangle BCD$，$\triangle ACD$，$\triangle ABD$，$\triangle ABC$的内心依次记为I_A，I_B，I_C，I_D。试证：$I_AI_BI_CI_D$是矩形。



证明　如图所示，连AI_D，BI_C，AI_C，BI_D。有　$\angle I_CBI_D=\angle ABI_D-\angle ABI_C$

$$=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle ABD),$$

$$\angle I_CAI_D=\angle I_CAB-\angle I_DAB$$

$$=\frac{1}{2}(\angle BAD-\angle BAC).$$

又　$\because$　$ABCD$内接于圆，

$\therefore$　$\angle ADB=\angle ACB$.

$\therefore$　$\angle ABC+\angle BAC$

$=\angle ABD+\angle BAD$.

则　$\angle I_CBI_D=\angle I_CAI_D$.

于是ABI_DI_C内接于圆，从而有

$$\angle I_CI_DB=\pi-\angle BAI_C=\pi-\frac{1}{2}\angle BAD$$

同理　$\angle I_AI_DB=\pi-\frac{1}{2}\angle DCB$.

$\because \angle I_CI_DB+\angle I_AI_DB$

$=\pi-\frac{1}{2}\angle BAD+\pi-\frac{1}{2}\angle DCB$

$=2\pi-\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle DCB)$

$=\frac{3}{2}\pi$.

$\therefore$　$\angle I_CI_DI_A=\frac{\pi}{2}$.

同理可证：

$$\angle I_DI_AI_B=\angle I_BI_CI_D=\angle I_AI_BI_C=\frac{\pi}{2}.$$

故　$I_AI_BI_CI_D$为矩形。

2. a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n是实数。试证使对任何满足$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$的实数，不等式$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i$都成立的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant\sum_{i=1}^{k}b_i,\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$$

和　$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

证明　先证必要性：

令$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$，得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_i;$$

令$x_1=x_2=\cdots=x_n=-1$，得

$$-\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant-\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

故　$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

令$x_1=x_2=\cdots=x_k=0$，$x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots=x_n=1$，得

$$\sum_{i=k+1}^{n}a_i\leqslant\sum_{i=k+1}^{n}b_i.$$

又由　$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，可得

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i. \quad (i=1, 2, \cdots, n-1)$$

再证充分性：

令 $s_k = \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i)$,

$(i=1, 2, \cdots, n, s_0=0)$

则 $a_k - b_k = s_k - s_{k-1}$. $(k=1,2,\cdots,n)$

且 $s_k \geqslant 0$. $(k=1,2,\cdots,n-1, s_n=0)$

对任何满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ 的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i x_i - \sum_{i=1}^{n} s_{i-1} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} s_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i x_{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} s_i (x_i - x_{i+1}) \leqslant 0,$$

即 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$.

3. 自然数 A 的十进制表为 $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$. 令 $f(A) = 2^n a_0 + 2^{n-1} a_1 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$，并记 $A_1 = f(A)$，$A_{i+1} = f(A_i)$. $(i=1,2,\cdots,n)$ 求证：

i) 必有 $k \in N$，使 $A_{k+1} = A_k$；

ii) 若 $A = 19^{86}$，问上述 A_k 等于多少？

证明 i) $n=0$ 时. 对任意 k 有 $A_k = A$.

当 $n=1$ 时，

$A - f(A) = 10a_1 + a_0 - 2a_0 - a_1$

$= 9a_1 - a_0 \geqslant 9 \times 1 - 9 = 0$.

当 $n \geqslant 2$ 时，

$A - f(A)$

$\geqslant 10^n - (2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2 + 1) \times 9$

$> 10^n(10^{n-1} - 2^{n+1} + 1)$

$> 10(2^{3n-3} - 2^{n+1} + 1)$

> 0.

由上易知 $\{A_i\}$ 是递减的，又对任意 $i \in N$，有 $A_i \in N$. 故有 $k \in N$，使 $A_{k+1} = A_k$.

ii) $\because 10^n f(A) - A$

$= (20^n - 1)a_0 + (20^{n-1} - 1) \times 10 a_1$

$+ \cdots + (20 - 1) \times 10^{n-1} a_{n-1}$

以上每一项都被19整除，

$\therefore 19 \mid (10^n f(A) - A)$.

即 若 $19 \mid A$，则有 $19 \mid f(A)$.

又由于 $19 \mid 19^{86}$，则 $19 \mid A_k$.

由前知，当 $n \geqslant 2$ 时，$f(A) < A$.

$n=1$ 时，仅当 $a_1 = 1$，$a_0 = 9$ 时才有 $A = f(A)$.

故 $A_k = 19$.

4. 已知 $\triangle ABC$，$\angle C = 90°$. 求证：对于 $\triangle ABC$ 内任意 n 个点，必可适当地记为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，使得

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 \leqslant AB^2.$$

注：可以把命题加强为：必可适当地记为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，使得

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 + P_nB^2 \leqslant AB^2.$$

证明 只就加强命题来证. 应用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$\because \angle AP_1B \geqslant 90°$，

$\therefore AP_1^2 + P_1B^2 \leqslant AB^2$，命题成立.

假设 $n<k$ 时命题成立，下证 $n=k$ 时结论也成立.

过C引AB的垂线，垂足为D，不妨假设$\triangle ADC$和$\triangle BDC$中都有点。不然，如果k个点都在$\triangle ADC$内，则从D点引AC边的垂线，这种作法可一直进行下去，直到把k个点分割在两个三角形内为止。

设$\triangle ADC$内有s个点，$\triangle BDC$内有$k-s$个点，由归纳假设，可以分别标号这s个点和$k-s$个点，使得：

$$AP_1^2+P_1P_2^2+\cdots+P_{s-1}P_s^2+P_sC^2\leqslant AC^2, \quad (1)$$

$$CP_{s+1}^2+P_{s+1}P_{s+2}^2+\cdots+P_{k-1}P_k^2+P_kB^2\leqslant BC^2. \quad (2)$$

又 $\because \angle P_sCP_{s+1}<\angle ACB=90^\circ$,

$$\therefore \quad P_sP_{s+1}^2<P_sC^2+CP_{s+1}^2. \quad (3)$$

由(1),(2),(3)式，得

$$AP_1^2+P_1P_2^2+\cdots+P_{k-1}P_k^2+P_kB^2\leqslant AB^2.$$

于是命题成立。

5.正方形$ABCD$边长为1，AB,AD上各有一点P，Q。如果$\triangle APQ$的周长为2，求$\angle PCQ$的度数。

解 设$\angle BCP=\alpha$，$\angle DCQ=\beta$.

$\because BP=\mathrm{tg}\alpha$，$QD=\mathrm{tg}\beta$,

$AP=1-\mathrm{tg}\alpha$，$AQ=1-\mathrm{tg}\beta$.

$\therefore PQ=2-AP-AQ=\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta$.

由 $AP^2+AQ^2=PQ^2$，可知

$$(1-\mathrm{tg}\alpha)^2+(1-\mathrm{tg}\beta)^2=(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)^2,$$

整理得 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=1$.

又$\because 0\leqslant\alpha+\beta<90^\circ$，$\therefore \alpha+\beta=45^\circ$.

即 $\angle PCQ=90^\circ-\alpha-\beta=45^\circ$.

6.已知四面体$ABCD$，E,F,G分别在棱AB，AC,AD上,记$\triangle XYZ$的面积为$S_{\triangle XYZ}$，周长为$p_{\triangle XYZ}$。求证：

i) $S_{\triangle EFG}\leqslant\max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ABD}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}\}$;

ii) $p_{\triangle EFG}\leqslant\max\{p_{\triangle ABC}, p_{\triangle ABD}, p_{\triangle ACD}, p_{\triangle BCD}\}$.

在证明前，我们先给出两个引理。

引理1：给定空间两直线l,m。P,Q，R为l上顺次三点，它们到m的距离依次为d_1，d_2,d_3。则$d_2\leqslant\max\{d_1, d_3\}$.

证明从略。

引理2：给定两直线l，m及l上两点M，N。设P,Q,R为m上顺次三点，则

$QM+QN\leqslant\max\{PM+PN, RM+RN\}$.

引理2可通过将N点绕直线m旋转到平面MPQ上，且N与M分别位于直线m两侧而使问题得到简化。此处证明从略。

证明 设$\triangle EFG$所在的平面为π，不妨设B点到π的距离最小，则当B不与E重合时，考虑过B点平行于π的平面π'，设π'与四面体$ABCD$交成$\triangle BF'G'$。其中F'位于AC上，G'位于AD上。于是有

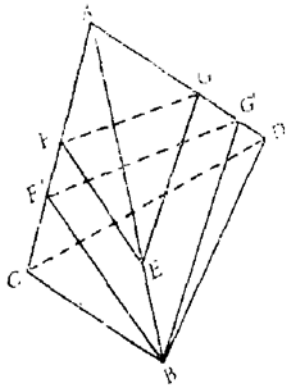
$EF\parallel BF'$，$EG\parallel BG'$，$FG\parallel F'G'$.

则$\triangle EFG\backsim\triangle BF'G'$.

显然 $S_{\triangle EFG}<S_{\triangle BF'G'}$;

$p_{\triangle EFG}<p_{\triangle BF'G'}$.

所以我们只须证明$\triangle BF'G'$满足i)和ii)即可。



如图，连接$F'D$.设A，G'，D到BF'的距离分别为d_1，d_2，d_3。则由引理1知：

$$d_2\leqslant\max\{d_1, d_3\}.$$

则有 $S_{\triangle BF'G'}\leqslant\max\{S_{\triangle BF'A}, S_{\triangle BF'D}\}$

$\leqslant\max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle BF'D}\}$.

同理可证

$$S_{\triangle BF'D}\leqslant\max\{S_{\triangle ABD}, S_{\triangle BCD}\}.$$

于是

$$S_{\triangle BF'G}\leqslant\max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ABD}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}\}.$$

问题i)即证。

运用引理2易得：

$$p_{\triangle BF'G} \leqslant \max\{p_{\triangle ABF'},\ p_{\triangle BDF'}\} \leqslant \max\{p_{\triangle ABC},\ p_{\triangle ABD},\ p_{\triangle BCD}\}.$$

则有 $p_{\triangle BF'G'} \leqslant \max\{p_{\triangle ABC},\ p_{\triangle ABD},\ p_{\triangle ACD},\ p_{\triangle BCD}\}$.

因此ii）成立。

7. 设x_1，x_2，…，x_n为实数（$n \geqslant 3$）。令 $p=\sum_{i=1}^{n} x_i$，$q=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} x_i x_k$。求证：

i）$\frac{n-1}{n}p^2-2q \geqslant 0$；

ii）$\left|x_i-\frac{p}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$.

$(i=1,\ 2,\ \cdots,n)$

证明 i）

$\because$ $(n-1)p^2-2nq$

$$=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2-2n\left(\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} x_i x_k\right)$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2-2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} x_i x_k$$

$$=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(x_i-x_k)^2 \geqslant 0 .$$

$\therefore$ $\frac{n-1}{n}p^2-2q \geqslant 0$.

ii）
$$\left|x_i-\frac{p}{n}\right|=\left|\frac{nx_i-\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{(x_i-x_1)+\cdots+(x_i-x_n)}{n}\right|$$

$$=\frac{n-1}{n}\left|\frac{(x_i-1)+\cdots+(x_i-x_{i-1})}{n-1}+\frac{(x_i-x_{i+1})+\cdots+(x_i-x_n)}{n-1}\right|$$

$$\leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{(x_i-x_1)^2+\cdots+(x_i-x_n)^2}{n-1}}$$

$$\leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(x_i-x_k)^2}{n-1}}$$

$$=\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)p^2-2nq}{n-1}}$$

$$=\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q} .$$

8. 以任意方式将圆周上$4k$个点标上1，2，…，$4k$，求证：

i）可以用$2k$条两两不交的弦联结这$4k$个点，使得每条弦的两端的标数之差不超过$3k-1$；

ii）对于任意的自然数k，i）中的数$3k-1$不能再减少。

证明 i）将1，2，…，$4k$这$4k$个数分成A，B两组。

$A=\{1,\ 2,\cdots,k,3k+1,3k+2,\cdots,4k\}$；

$B=\{k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 3k\}$。

则A中任一数与B中任一数的绝对值不大于$3k-1$。因此只须证明可以用$2k$条两两不交的弦联结A，B中正数，弦的一端在A中，另一端在B中。为此，所证化归为证明下面的引理。

引理 圆周上有$2n$个点，其中n个为“红点”，另外n个为“蓝点”，则可以用n条两两不相交的弦联结这$2n$个点，使每条弦的两端点不同色。

证明 用归纳法：

当$n=1$时，引理显然成立。

假设$n=k$时引理成立。则$n=k+1$时，一定能找到相邻的两点，设为P，Q，它们的颜色不相同。将P，Q用弦联结起来，然后去掉P，Q两点，还剩$2k$个点，有k个“红点”，k个“蓝点”，由假设可以用k条两两不相交的弦联结这$2k$个点，使每条弦的两端点不同色。注意到P，Q是相邻的两点，故弦PQ不可能与其余k条弦相交。这样我们就证明了$n=k+1$时引理也成立。从而引理对一切自然数n都成立。

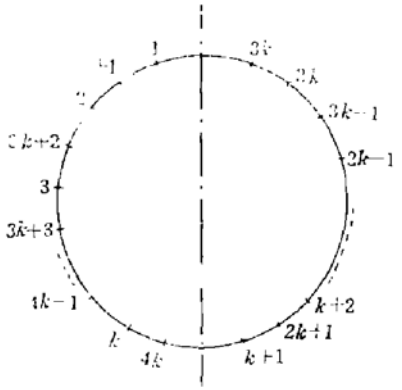
ii）对圆周上$4k$个点依次编号为1，2，…，$4k$。再填上适当的数，填法如下：

编号：1，2，3，4，5，…，$2k-2$，$2k-1$，$2k$；

填数：$1,3k+1,2,3k+2,3,\cdots,4k-1,k,4k$；

编号：$2k+1$，$2k+2$，$2k+3$，…，$4k-2$，$4k-1$，$4k$；

填数：$k+1,2k+1,k+2,\cdots,3k-1,2k,3k$.



A，B定义同i），则从填数过程能够证明：若A中的两数相连有一弦，则A中必有相邻两数，它们间有一弦相连，且两数之差不小于$3k-1$.

若A中任两数间没有弦相连，则A中的数只能"平行"地与B中的数相连（否则弦将相交），所以必有1和$3k$相连，从而两数之差为$3k-1$.

这就说明了i）中的数$3k-1$不能再减少.

（南开大学数学奥林匹克研究小组供解）

（上接32页）

$$2R(\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x)$$
$$=\frac{81}{\sin x}[2\sin x\cos x+(3\sin x-4\sin^3 x)+4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)]$$
$$=81[2\cos x+(3-4\sin^2 x)+4\cos x(1-\sin^2 x)]$$
$$=81\left[\frac{5}{3}+\left(3-\frac{11}{9}\right)+\frac{10}{3}\left(1-\frac{11}{18}\right)\right]$$
$$=135+243-99+270-165=384.$$

15. 把每一项$l_k=\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}$都看做为是一个直角三角形的斜边，其两直角边长为$2k-1$和$a_k$. 把这些直角三角形放在一起形成一个梯子，记$A$，$B$分别为其始点和终点.

从A到B的距离为

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2}=\sqrt{17^2+n^4}.$$

而$\sum_{k=1}^{n}t_k$是从A到B沿斜边走的长度，所以$\sum_{k=1}^{n}t_k\geq\sqrt{17^2+n^4}$. 且可选取$a_k$使等号成立. 故$S_n=\sqrt{17^2+n^4}$.

当S_n为整数，则

$$17^2=S_n^2-n^4=(S_n-n^2)(S_n+n^2).$$

由$\begin{cases}S_n+n^2=17^2\\S_n-n^2=1,\end{cases}$ 解得$S_n=145,n=12$.

（天津市于樵供稿）

更　正

本刊1991年第一期《漫谈获胜策略》一文作者来信更正：第18页右栏第2行："2)规定取得最后火柴者败，若（n_1，n_2，n_3）不为3—平衡态，则先者有获胜策略."后面应加上："（其中n_1，n_2，n_3不全为1）".