

参加第36届IMO 中国代表队选拔考试

张筑生

1. 求不能表示成 $|3^a - 2^b|$ 的最小素数 p , 这里 a 和 b 是非负整数.

解 经检验, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ 都可以写成 $|3^a - 2^b|$ 的形式, 其中 a 和 b 是非负整数:

$$\begin{aligned} 2 &= 3^1 - 2^0, 3 = 2^2 - 3^0, 5 = 2^3 - 3^1, \\ 7 &= 2^3 - 3^0, 11 = 3^3 - 2^4, 13 = 2^4 - 3^1, \\ 17 &= 3^4 - 2^6, 19 = 3^3 - 2^3, 23 = 3^3 - 2^2, \\ 29 &= 2^5 - 3^1, 31 = 2^5 - 3^0, 37 = 2^6 - 3^3. \end{aligned}$$

猜测 41 是不能这样表示的最小素数. 为了证实这一猜测, 我们考察下面两个不定方程:

$$(I) 2^x - 3^y = 41;$$

$$(II) 3^x - 2^y = 41.$$

设 (u, v) 是方程 (I) 的非负整数解, 则有 $2^u > 41, u \geq 6$. 因此, $-3^v \equiv 1 \pmod{8}$.

但 3^v 模 8 的剩余只可能是 1 或 3, 所以方程 (I) 无非负整数解.

设 (x, y) 是方程 (II) 的非负整数解, 则 $3^x > 41, x \geq 4$. 因此,

$$2^y \equiv 1 \pmod{3}.$$

于是, y 只能是偶数. 设 $y = 2t$, 又得到

$$3^x \equiv 1 \pmod{4}.$$

由此得知 x 也只能是偶数, 设 $x = 2s$. 于是,

$$41 = 3^{2s} - 2^{2t} = 3^{2s} - 2^{2t} = (3^s + 2^t)(3^s - 2^t).$$

要使这式成立, 必须

$$\begin{cases} 3^s + 2^t = 41, \\ 3^s - 2^t = 1. \end{cases}$$

也就是 $3^s = 21, 2^t = 20$.

但这不可能. 因而, 方程 (II) 也没有非负整数解.

综上所述, 我们得出结论: 不能表示成 $|3^a - 2^b|$ (a 和 b 是非负整数) 的最小素数是 41.

2. 给定锐角 θ 和相内切的两个圆. 过公切点 A 作定直线 l (不过圆心) 交大圆于另一点 B . 设 M 点在外圆优弧上运动, N 是 MA 与内圆的另一交点, P 是射线 MB 上的点, 使得 $\angle MPN = \theta$. 试求 P 点的轨迹.

解法一 当动点 M 在大圆优弧的不同部位时, 相应的图形略有差异 (参看所附的图 1—3), 我们所写的文字说明统一地适用于各种情形.

设直线 l 与内圆的另一交点是 C , 连 NC . 过 A 点和 B 点作外圆的切线相交于 T 点.

$$\begin{aligned} \because \angle TAB &= \angle AMB \\ &= \angle ANC, \end{aligned}$$

$$\therefore MB \parallel NC.$$

$$\therefore \angle CNP = \angle MPN = \theta.$$

设直线 PN 与内圆的另一交点是 Q , 则 A, C, N, Q 四点都在内圆周上, 因而,

$$\begin{aligned} \angle CAQ &= \angle CNP \\ &= \angle MPN = \theta. \end{aligned}$$

由此得知: A, Q, P, B 四点共圆.

综上所述, Q 点是内圆上的定点,

$$\angle CAQ = \theta;$$

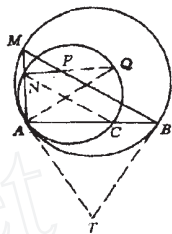


图 1

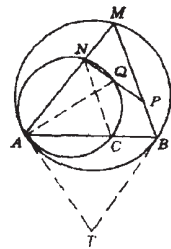


图 2

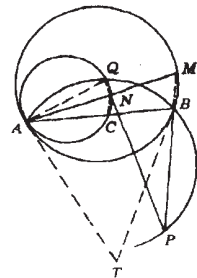


图 3

• 本文收稿日期: 1995-08-15.

并且 P 点在 $\triangle ABQ$ 的外接圆上. 因此, 我们可以按以下方式作出 P 点的轨迹 (请验证):

在内圆被直线 l 截得的优弧上取 Q 点, 使得 $\angle BAQ = \theta$.

然后作 $\triangle ABQ$ 的外接圆. 该外接圆周在 $\angle ABT$ 外的那段圆弧, 就是所求的轨迹.

解法二 过 A 点和 B 点作外圆的切线

相交于 T . 设直线 l 与内圆的另一交点是 C , 连 NC . 在切线 BT 上取一点 D , 使得 $\angle BDC = \theta$. 然后, 连 AD 和 CD (参看图 4).

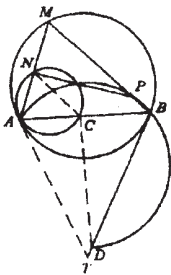


图 4

$$\begin{aligned} \because \angle NMP \\ = \angle CBD, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle MPN \\ = \angle BDC, \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle MNP \sim \triangle BCD.$$

$$\text{因而, } \frac{MN}{MP} = \frac{BC}{BD}. \quad (1)$$

$$\text{又因为 } MB \parallel NC, \text{ 所以, } \frac{AM}{MN} = \frac{AB}{BC}. \quad (2)$$

将(1)和(2)式两边分别相乘就得到

$$\frac{AM}{MP} = \frac{AB}{BD}.$$

$$\text{又因为 } \angle AMP = \angle ABD,$$

$$\text{所以, } \triangle AMP \sim \triangle ABD.$$

上式右端是一个完全确定的三角形. 因此, $\triangle AMP$ 的各角以及各边之比都是完全确定的. 我们看到, P 点可由 M 点经过绕 A 点的旋转相似变换而得到, 即

$$\angle PAM = \angle DAB (\text{定角}),$$

$$\frac{AP}{AM} = \frac{AD}{AB} (\text{定值}).$$

因此, 将所给的外圆的优弧作相应的旋转相似变换就得到 P 点的轨迹.

综上所述, P 点的轨迹是以 AD 为弦, 张角等于 $\angle ABD$ (定角) 的一段圆弧.

3. 21 人参加一次考试, 试卷共有 15 道是非题. 已知每两人答对的题中至少有一道是相同的. 问答对人数最多的题最少有多少人答对? 请说明理由.

解 设第 i 题有 a_i 个人的答案正确, 于是恰有

$$b_i = C_{a_i}^2,$$

个二人组答对该题 ($i = 1, 2, \dots, 15$).

以下我们着重考察和数 $\sum_{i=1}^{15} b_i$.

记 $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{15}\}$, 则有

$$\begin{aligned} 15C_a^2 \geq \sum_{i=1}^{15} b_i \geq C_{a-1}^2, \quad a(a-1) \geq \frac{420}{15} = 28, \\ a \geq 6. \end{aligned}$$

下面将指出 $a = 6$ 是不可能的, 因而, 答对人数最多的题至少有 7 人答对.

假设 $a = 6$, 即每题最多只有 6 人答对, 我们将导出矛盾. 倘若某人只答对了三道题, 则因每道题他至多只能与另外 5 人共同答对, 所以他至多与另外 15 人有共同答对的题, 与题设矛盾. 因而每人至少答对四道题.

又因为 $21 \times 5 > 6 \times 15$,

不能每人都答对五道或更多的题目, 所以至少有一人恰答对四道题. 将该人编号为 1. 该人与其他 20 人中的每一个都有共同答对的题目, 所以, 他答对的四道题中的每一道题都有另 5 人答对. 于是, 分别答对这四道题的人构成除了 1 号人员而外别无共同人员的四个集合, 不妨设为

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$S_2 = \{1, 7, 8, \dots, 11\},$$

$$S_3 = \{1, 12, 13, \dots, 16\},$$

$$S_4 = \{1, 17, 18, \dots, 21\}.$$

另一方面, 在全部 15 道题当中, 至少 12 道题每题有 6 人答对, 否则将导致矛盾:

$$C_{12}^2 \leq \sum_{i=1}^{15} b_i \leq 11C_6^2 + 4C_5^2 = 205.$$

除去前述四道题, 还有八道题每题有 6 人答对. 考察答对这八道题中某一道的 6 个人. 他们之中或者有三人以上属同一个 S_j ; 或者两人属某个 S_j , 并有另两个人属于 S_k ($j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq k$). 总之, 在

计算 $\sum_{i=1}^{15} b_i$ 时, 这八道题中的每一道题都至少产生两次重复计数. 由此得到

$$C_{12}^2 \leq \sum_{i=1}^{15} b_i - 8 \times 2 \leq 15C_6^2 - 16 = 209.$$

所导致的矛盾说明 $a = 6$ 的情形根本不可能出现.

根据以上讨论, 我们确认 $a \geq 7$.

下面构造例子说明 $a = 7$ 的情形可以实现. 为此, 先将参加考试的人员编号 1~21, 并定义以下一

些人员的集合:

$$P_i = \{2i-1, 2i\}, i=1, \dots, 6;$$

$$P_7 = \{13, 14, 15\},$$

$$P_8 = \{16, 17, 18\},$$

$$P_9 = \{19, 20, 21\}.$$

利用这些记号,我们构造下面的表格,指明做对各题的人员.容易验证:在表格所显示的情形中,参加考试的21个人每两个人都有共同答对的题目,并且最多有7个人答对同一道题.

题号	答对该题的人员集合
1	$P_1 \cup P_2 \cup P_3$
2	$P_4 \cup P_5 \cup P_6$
3	$P_1 \cup P_4 \cup P_7$
4	$P_2 \cup P_5 \cup P_8$
5	$P_3 \cup P_6 \cup P_9$
6	$P_1 \cup P_5 \cup P_9$
7	$P_2 \cup P_6 \cup P_7$
8	$P_3 \cup P_4 \cup P_8$
9	$P_1 \cup P_6 \cup P_8$
10	$P_2 \cup P_4 \cup P_9$
11	$P_3 \cup P_5 \cup P_7$
12	$P_7 \cup P_8$
13	$P_3 \cup P_5$
14	$P_6 \cup P_7$
15	\emptyset (空集)

4. 设 $S = \{A = (a_1, \dots, a_8) \mid a_i = 0 \text{ 或 } 1, i=1, \dots, 8\}$. 对于 S 中的两个元素 $A = (a_1, \dots, a_8)$ 和 $B = (b_1, \dots, b_8)$, 记

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^8 |a_i - b_i|,$$

并称其为 A 和 B 之间的距离. 向 S 中最多能取出多少元素, 它们之中任何两个的距离 ≥ 5 ?

说明 为了介绍本题的不同解法, 先要介绍一些记号和术语(解法二将要用到长度为7的码字). 我们把

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_l)$$

叫做长为 l 的码字. 这里 $x_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, l$.

约定把

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^l x_i$$

叫做码字 X 的权. 容易看出, 权 $\omega(X)$ 即码字 X 中出现的1的个数. 对于两个码字 $A = (a_1, \dots, a_l)$ 和 $B = (b_1, \dots, b_l)$, 约定将它们之间的距离定义为

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^l |a_i - b_i|.$$

我们的题目可以叙述为: 设 \mathcal{D} 是由长度为8的码字组成的集合, 该集合中任意两个元素之间的距离 ≥ 5 , 问 \mathcal{D} 最多能有多少元素?

若将 \mathcal{D} 中每一个码字第 i 位上的数字改变(0改成1, 1改成0), 则任两个码字之间的距离保持不变. 因此, 不妨设

$$(0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{D},$$

并约定将全由数字0组成的码字叫做零码字. 假定零码字属于 \mathcal{D} 之后, \mathcal{D} 中任何其他码字的权都必须 ≥ 5 .

下面, 分别叙述两种解法.

解法一

(I) 首先, 我们指出 \mathcal{D} 中任两个码字的权之和不超过11, 否则, 若

$$\omega(X) + \omega(Y) \geq 12,$$

则因 $12 - 8 = 4$, 这两个码字至少有四个1的位置相同, 它们之间的距离

$$d(X, Y) \leq 8 - 4 = 4.$$

因此, \mathcal{D} 中最多只能含有一个权 ≥ 6 的码字. 并且, 若 \mathcal{D} 中含有权 ≥ 7 的码字, 则 \mathcal{D} 就只能含有该码字和零码字两个元素.

(II) 注意到 $5 + 5 - 8 = 2$, 我们断定: 若 \mathcal{D} 中含有两个权为5的码字 A 和 B , 则这两个码字至少有两个1的位置相同. 还可以进一步断定: 这两个码字恰有两个1的位置相同. 否则, 若有三个1的位置相同, 则必定还有一个0的位置相同, 两码字的距离

$$d(A, B) \leq 4.$$

依据上述讨论可以断定: \mathcal{D} 中至多含有两个权为5的码字(否则, 第三个权为5的码字至少与 A 或 B 之一有三个1的位置相同).

(III) 综上所述, \mathcal{D} 中的码字最多只有四个, 其中一个权为0, 一个权为6, 两个权为5. 下面的例子说明, 由四个码字组成的 \mathcal{D} 可以实现:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ &(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1) \\ &(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ &(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

解法二 先考察一个较容易的问题: 最多能有多少个长为7的码字, 其中任意两个之间的距离 ≥ 5 ? 答案是: 最多两个. 首先, 不妨设 $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 是其中一个码字. 则不可能再有两个码字. 否则, 这两个码字每一个的权 ≥ 5 . 然而

$$5 + 5 - 7 = 3.$$

所以,两码字至少有三个1的位置相同.这两码字的距离不超过 $7-3=4$.

现在回到原来的题目.长为8的码字,第一位可为0或1.第一位同为 a 的码字($a \in \{0,1\}$),其余各位成为一个长为7的码字,因而至多只能有两个这样的码字距离 ≥ 5 .因而,最多只能有四个长为8的码字,其中任意两者之间的距离 ≥ 5 .

“最多四个”可实现的例子与解法一中相同.

5. 甲乙二人对一个至少4次的多项式

$$x^{2n} + \square x^{2n-1} + \square x^{2n-2} + \dots + \square x + 1$$

玩填系数的游戏:二人轮流选定上式中的一个空格填写一个实数作为该项的系数,直到填满为止.若所得多项式无实根,甲胜;否则乙胜.问:若甲先,谁有必胜策略?试说明理由.

解 乙有必胜策略.具体做法如下.

共有 $2n-1$ 个系数待填写,其中有 n 个奇数次项系数和 $n-1$ 个偶数次项系数.约定将甲和乙各填写一次叫做“一轮”.每轮只要有可能,乙都尽量填偶次项系数.到 $n-2$ 轮之后,至多还有一个偶次项系数未填,至少剩下两个奇次项的系数未填.不论下一次甲填什么,在总共 $2n-3$ 次填写之后,至少还剩有一个奇次项的系数未填.此时可将多项式写成

$$f(x) = g(x) + \square x^s + \square x^t,$$

其中 $g(x)$ 的系数已确定, s 是奇数,并且 $s \neq t$.现在轮到乙填写.他在 x^s 前填写这样一个实数 a (待定),希望做到:不论甲最后在 x^t 前填写怎样的 b ,都有

$$\frac{1}{2^t} f(2) + f(-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2^t} g(2) + 2^{t-s} a + b\right) + (g(-1) + (-1)^s a -$$

$b)$

$$= \left(\frac{1}{2^t} g(2) + g(-1)\right) + a(2^{t-s} + (-1)^s) = 0.$$

为此,只须取

$$a = -\frac{\frac{1}{2^t} g(2) + g(-1)}{2^{t-s} + (-1)^s}$$

($\because s \neq t, \therefore 2^{t-s} + (-1)^s \neq 0$).

乙这样填写 a 之后,不论甲在 x^t 前填怎样的 b ,都有

$$\frac{1}{2^t} f(2) + f(-1) = 0.$$

于是,或者 $f(-1)$ 和 $f(2)$ 都等于0;或者在-1和2处函数值 $f(-1)$ 和 $f(2)$ 异号.因而,在-1和2之间必有 $f(x)$ 的一个实根.乙取得胜利.

6. 试证能将区间 $[0,1]$ 分成若干个黑白相间的小区间,使得任意2次多项式 $P(x)$ 在所有黑色小区间上的增量之和等于在所有白色小区间上的增量之和.(称 $P(b) - P(a)$ 为 $P(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的增量.)

对3次多项式情形,同样的结论是否成立?

对5次多项式情形,同样的结论是否成立?

解 先证明更一般的结论.

定理 设 l 是正实数, k 是正整数.可以将区间 $[0,2^k l]$ 分成若干子区间,然后将这些子区间相间地染成黑子区间和白子区间.这样做好之后,任何一个不超过 k 次的多项式在所有的黑子区间上的增量之和等于它在所有白子区间上的增量之和.

证明(用归纳法)

(I) 对于 $k=1$ 的情形,可将 $[0,2l]$ 分为黑子区间 $[0,l]$ 和白子区间 $[l,2l]$.

(II) 假设对 $k=n$ 命题成立.约定以 B_n 表示所述的那些黑子区间组成的集合,以 W_n 表示所述的那些白子区间的集合.对于黑子区间 $b \in B_n$ 和白子区间 $w \in W_n$,约定分别以 $\Delta_b f$ 和 $\Delta_w f$ 表示多项式 f 在 b 和 w 上的增量.

对于任意一个不超过 $n+1$ 次的多项式 $f(x)$,我们记

$$g(x) = f(x+2^n l),$$

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

易见, φ 是不超过 n 次的多项式.因而,

$$\sum_{b \in B_n} \Delta_b \varphi = \sum_{w \in W_n} \Delta_w \varphi$$

由此得到

$$\sum_{b \in B_n} \Delta_b f + \sum_{w \in W_n} \Delta_w g = \sum_{w \in W_n} \Delta_w f + \sum_{b \in B_n} \Delta_b g.$$

(III) 如果将子区间族 B_n 中所有的区间都沿数轴正方向平移一个距离 τ ,那么就得到一个新的子区间族.约定将这样得到的新的子区间族记为 $B_n + \tau$.对记号 $W_n + \tau$ 也作类似的约定.我们记

$$B'_{n+1} = B_n \cup (W_n + 2^n l),$$

$$W'_{n+1} = W_n \cup (B_n + 2^n l).$$

则 $B'_{n+1} \cup W'_{n+1}$ 构成区间 $[0,2^{n+1}l]$ 的一个分划,并且(I)中最后得到的等式可以写成

$$\sum_{b \in B'_{n+1}} \Delta_b f = \sum_{w \in W'_{n+1}} \Delta_w f.$$

(IV) 由 $B'_{n+1} \cup W'_{n+1}$ 作成黑白子区间分划可能不是异色交替的.但是,只要将相邻的同色子区间之公共端点抽去使它们合并成一个子区间(保持原有染色),就能作成区间 $[0,2^{n+1}l]$ 的黑子区间与白子区间交替的分划 $B_{n+1} \cup W_{n+1}$.这样的分划满足要求:

$$\sum_{b \in B_{n+1}} \Delta_b f = \sum_{w \in W_{n+1}} \Delta_w f.$$

定理证完.

以上述定理为依据,考察 $k=2,3,5$ 的情形.

取 $l = \frac{1}{2^k}$,则题目中提出的一切问题都有了完全肯定的回答.

第37届IMO中国国家选拔赛试题解答

李成章

(南开大学数学系, 300071)

张筑生

(北京大学数学系, 100871)

一、以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为直径作半圆, 与 AB 、 AC 分别交于点 D 和 E . 过 D 、 E 作 BC 的垂线, 垂足分别为 F 、 G . 线段 DG 、 EF 交于点 M . 求证: $AM \perp BC$.

证明: 作 $\triangle ABC$ 的高 AH , 连结 BE 、 CD 、 DE . 则 BE 、 CD 为 $\triangle ABC$ 的两条高线. 记垂心为 O , DE 与 AH 交于点 K . 于是, 有

$$DK:KE$$

$$= S_{\triangle ADO} : S_{\triangle AEO}$$

$$\because \triangle AEO \sim \triangle BEC, \triangle ADO \sim \triangle CDB.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{AO^2}{BC^2} = \frac{S_{\triangle AEO}}{S_{\triangle BEC}}.$$

$$\text{故 } \frac{DK}{KE} = \frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle AEO}} = \frac{S_{\triangle CDB}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{DF}{EG} = \frac{DM}{MG}.$$

$$\therefore KM \parallel EG.$$

$$\because EG \perp BC,$$

$$\therefore KM \perp BC.$$

$$\because KH \perp BC,$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 在 } AH \text{ 上. 故 } AM \perp BC.$$

二、设 N 是自然数集, R 是实数集, S 是满足以下两个条件的函数 $f: N \rightarrow R$ 的集合:

$$(1) f(1) = 2;$$

$$(2) f(n+1) \geq f(n) \geq \frac{n}{n+1} f(2n)$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

试求最小的自然数 M , 使得对任何 $f \in S$ 及任何 $n \in N$, 都有

$$f(n) < M.$$

解: 首先估计 $\{f(n)\}$ 的上界. 鉴于 f 的单调性, 只须考察 $\{f(2^k)\}$ 的上界. 根据条件(1)和(2), 对于 $k \in N$ 有

$$f(2^{k+1}) \leq \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) f(2^k)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) f(2^{k-1})$$

.....

$$\leq 2\lambda_k,$$

$$\text{其中 } \lambda_k = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$$

通过对前几个 λ_k 的计算, 我们猜测

$$\lambda_k < 5, k=1, 2, \dots$$

为了证明这一猜测, 可采用加强命题的归纳法.

通过对 λ_k 定义式的观察分析, 可将命题加强为

$$\lambda_k \leq 5\left(1 - \frac{1}{2^k}\right), k=2, 3, \dots$$

首先, 对于 $k=2$, 所加强的命题显然成立:

$$\lambda_2 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = 5\left(1 - \frac{1}{2^2}\right).$$

假定已证得 $\lambda_m \leq 5\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$. 则有

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m \left(1 + \frac{1}{2^{m+1}}\right)$$

$$\leq 5\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{m+1}}\right)$$

$$= 5\left(1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{2m+1}}\right)$$

$$= 5\left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{2m+1}}\right)$$

$$< 5\left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

至此, 我们已证明, 对任何 $k \in N$, 必有

$$\lambda_k < 5.$$

对任何 $f \in S$ 和任何 $n \in N$, 存在自然数 k , 使得 $n < 2^{k+1}$. 因而

$$f(n) \leq f(2^{k+1}) \leq 2\lambda_k < 10.$$

为了证明题目所求的最小自然数 $M=10$, 还须构造一个适合题目条件的函数 f_0 , 该函数在某处的值大于9.

注意到 $2\lambda_5 > 9$. 我们定义一个函数 $f_0: N \rightarrow R$ 如下:

$$f_0(1) = 2;$$

$$f_0(n) = 2\lambda_k, \text{ 对于 } 2^k < n \leq 2^{k+1}$$

$$(k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \lambda_0 = 2).$$

对任何自然数 n , 易见

$$f_0(n+1) \geq f_0(n).$$

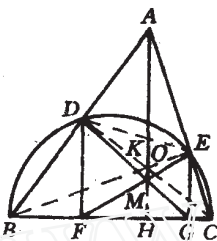
尚须验证

$$f_0(n) \geq \frac{n}{n+1} f_0(2n).$$

设 $k \in N \cup \{0\}$ 使得 $2^k < n \leq 2^{k+1}$, 则

$$2^{k+1} < 2n \leq 2^{k+2}.$$

$$\text{于是, } f_0(2n) = 2\lambda_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \times 2\lambda_k$$



$$\leq (1 + \frac{1}{n})f_0(n),$$

即 $f_0(n) \geq \frac{n}{n+1}f_0(2n)$.

如上定义的 f_0 在 $n=2^6$ 处的值大于 9:

$$f_0(2^6) = 2\lambda_5 > 9.$$

因此, 题目所求的最小自然数 $M=10$.

三、设 $M = \{2, 3, 4, \dots, 1000\}$. 求最小自然数 n , 使得 M 的任何 n 元子集中都存在 3 个互不相交的 4 元子集 S, T, U 满足下列三个条件:

(1) 对于 S 中任何两个元素, 大数都是小数的倍数, 对于 T 和 U 也有同样的性质;

(2) 对任何 $s \in S$ 和 $t \in T$, 都有 $(s, t) = 1$;

(3) 对任何 $s \in S$ 和 $u \in U$, 都有 $(s, u) > 1$.

解: 注意到 $999 = 37 \times 27$, 令 $A = \{3, 5, \dots, 37\}$, $B = M - A$, 于是, $|A| = 18, |B| = 981$.

下面证明, M 的子集 B 不能同时满足条件(1)~(3). 若不然, 设 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ 且有 $s_1 < s_2 < s_3 < s_4, t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. 因为 $(s_4, t_4) = 1$, 故二者中至少有 1 个为奇数, 不妨设 s_4 为奇数. 于是 s_1, s_2, s_3 也都是奇数. 从而,

$$s_4 \geq 3s_3 \geq 9s_2 \geq 27s_1 \geq 27 \times 39 > 1000. \text{ 矛盾.}$$

这表明所求的最小自然数 $n \geq 982$.

另一方面, 令

$$\begin{cases} S_1 = \{3, 9, 27, 81, 243, 729\}, \\ T_1 = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}, \\ U_1 = \{6, 12, 24, 48, 96, 192\}; \\ S_2 = \{5, 15, 45, 135, 405\}, \\ T_2 = \{41, 82, 164, 328, 656\}, \\ U_2 = \{10, 20, 40, 80, 160\}; \\ S_3 = \{7, 21, 63, 189, 567\}, \\ T_3 = \{43, 86, 172, 344, 688\}, \\ U_3 = \{14, 28, 56, 112, 224\}; \\ S_4 = \{11, 33, 99, 297, 891\}, \\ T_4 = \{47, 94, 188, 376, 752\}, \\ U_4 = \{22, 44, 88, 176, 352\}; \\ S_5 = \{13, 39, 117, 351\}, \\ T_5 = \{53, 106, 212, 424\}, \\ U_5 = \{26, 52, 104, 208\}; \\ S_6 = \{17, 51, 153, 459\}, \\ T_6 = \{59, 118, 236, 472\}, \\ U_6 = \{34, 68, 136, 272\}; \\ S_7 = \{19, 57, 171, 513\}, \\ T_7 = \{61, 122, 244, 488\}, \\ U_7 = \{38, 76, 152, 304\}; \\ S_8 = \{23, 69, 207, 621\}, \\ T_8 = \{67, 134, 268, 536\}, \\ U_8 = \{46, 92, 184, 368\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_9 = \{25, 75, 225, 675\}, \\ T_9 = \{71, 142, 284, 568\}, \\ U_9 = \{50, 100, 200, 400\}; \\ S_{10} = \{29, 87, 261, 783\}, \\ T_{10} = \{73, 146, 292, 584\}, \\ U_{10} = \{58, 116, 232, 464\}; \\ S_{11} = \{31, 93, 279, 837\}, \\ T_{11} = \{79, 158, 316, 632\}, \\ U_{11} = \{62, 124, 248, 496\}; \\ S_{12} = \{35, 105, 315, 945\}, \\ T_{12} = \{83, 166, 332, 664\}, \\ U_{12} = \{70, 140, 280, 560\}; \\ S_{13} = \{37, 111, 333, 999\}, \\ T_{13} = \{89, 178, 356, 712\}, \\ U_{13} = \{74, 148, 296, 592\}. \end{cases}$$

将 S_i, T_i, U_i 中序号相同的 3 个数组成一个三数组, 共可得到 57 个三数组. 对于 M 的任一 982 元子集 B , 只有 M 中的 17 个数不在 B 中, 故至少有上述 57 个三数组中的 40 个含在 B 中. 这 40 个三数组分属于上述的 13 组中, 由抽屉原理知必至少有 4 个三数组属于上述 13 组的同一组中. 将这 4 个三数组写成 3×4 的数表, 3 行数分别为 S, T, U 即满足题中要求.

综上所述, 所求的最小自然数 $n = 982$.

四、 A, B, C 三国进行围棋擂台赛, 每队 9 人. 规则如下: 每场由两队各出 1 人比赛, 胜者守擂, 负者被淘汰, 并由另一队派 1 人攻擂. 首先由 A, B 两队各派 1 人开始比赛并依次进行下去. 若有某队 9 人已全部被淘汰, 则剩下的两队继续比赛, 直到又有一队全部被淘汰为止. 最后一场比赛的胜者所在的队为冠军队. 回答以下问题并说明理由:

(1) 冠军队最少胜多少场?

(2) 若比赛结束时, 冠军队胜了 11 场, 那么整个比赛最少进行了多少场?

解: (1) 冠军队最后获胜时, 另两队的 18 人已全部被淘汰出局. 由于 C 队后出场, 因而 C 队获冠军时可以少胜一场. 为使 C 队胜场最少, 需要 A, B 两队尽量多地互相淘汰出局.

按比赛程序可知, A, B 两队互赛淘汰出局的每相邻两人之间必有 1 名 C 队成员被淘汰出局. 由于 C 队至多被淘汰 8 人, 故 A, B 两队互赛淘汰出局的人数至多 9 人. 所以 C 队至少胜 9 场.

另一方面, 如果 A_1 依次战胜 $B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_8, C_8, B_9$, 接着 C_9 全胜 A 队 9 人, 则 C 队得冠军且恰胜 9 场.

综上所述, 冠军队最少胜 9 场.

(2) 冠军队共胜 11 场, A, B 两队的 18 人中有 11 人负于冠军队成员, 而另 7 人则是 A, B 互赛而淘汰出局的. 从而 C 队有 6 人被淘汰出局. 至少共

赛 24 场.

另一方面, 如果 A_1 依次战胜 $B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_6, C_6, B_7$, 然后 C_7 依次战胜 $A_1, B_8, A_2, B_9, A_3, \dots, A_9$, 则 C 队共胜 11 场并取得冠军, 共赛 24 场.

综上可知, 整个比赛最少进行 24 场.

五、设 $n \geq 4, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是两组实数, 满足 $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 < 1, \sum_{j=1}^n \beta_j^2 < 1$. 记

$$A^2 = 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j^2, B^2 = 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j^2,$$

$$W = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right)^2.$$

求出一切实数 λ , 使得方程 $x^n + \lambda(x^{n-1} + \dots + x^3 + Wx^2 + ABx + 1) = 0$ 仅有实数根.

解: 显然 $\lambda = 0$ 时题中方程仅有实数根. 下面考察 $\lambda \neq 0$ 情形. 此时方程无 0 根. 假如方程的 n 个根全部是实数, 设为

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

其中 $\xi_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = 1, 2, \dots, n$.

我们观察根与系数的关系:

$$\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n = (-1)^n \lambda,$$

$$\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \dots + \frac{1}{\xi_n} \right)$$

$$= (-1)^{n-1} \lambda AB,$$

$$\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \left(\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{\xi_j \xi_k} \right) = (-1)^{n-2} \lambda W.$$

由以上关系式可得

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\xi_j} = -AB, \quad \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{\xi_j \xi_k} = W.$$

于是,

$$A^2 B^2 - 2W$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\xi_j} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{\xi_j \xi_k}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\xi_j^2} > 0.$$

$$\text{但 } A^2 B^2 = \left(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \right) \left(1 - \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)$$

$$\leq \left[\frac{\left(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \right) + \left(1 - \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)}{2} \right]^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \right)^2$$

$$\leq \left(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right)^2 = 4W.$$

上面得出的矛盾说明, 任何 $\lambda \neq 0$ 都不合要求.

答案: 为使题中的方程仅有实根, 必须且只须 $\lambda = 0$.

六、是否存在非零复数 a, b, c 及自然数 h , 使得

只要整数 k, l, m 满足 $|k| + |l| + |m| \geq 1996$, 就必定成立 $|ka + lb + mc| > \frac{1}{h}$?

解: 不存在. 若不然, 设有非零复数 a, b, c 及自然数 h 满足题中要求.

考察复平面. 不妨设复数 a, b 所对应的向量 \vec{a}, \vec{b} 之间的夹角既不等于 0 也不等于 π . 否则 3 个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都共线. 问题更简单. 取以 \vec{a}, \vec{b} 所在直线为坐标轴, 且分别以 $|a|, |b|$ 为单位长的斜角坐标系, 过坐标轴上每个整点作另一条坐标轴的平行线. 两组平行线彼此相交将复平面划分成网格平面. 这些网格是彼此全等的平行四边形.

再考察复数 c 所对应的向量 \vec{c} 所在的直线. 显然, 对每个整数 m, mc 都对应这条直线上的一点, 称为 c -整点. 易见, c -整点都位于某个平行四边形中(包括周界). 将每个含有 c -整点的平行四边形都平移到位于第一象限且以原点为顶点的平行四边形 P 上, 并使二者重合. 这时, 每个 c -整点也都随同所在的平行四边形移到 P 中, 记其象点为 c' -整点. 不难看出, 若 c -整点对应的复数为 mc , 其所在的平行四边形的右下方顶点对应的复数为 $\lambda a + \mu b$, 其中 λ, μ 都是整数, 则其象点 c' -整点对应的复数为 $mc - \lambda a - \mu b$.

将所有 c' -整点所在的平行四边形 P 用平行于其边的平行线划分成有限多个小平行四边形, 使每个小平行四边形的长对角线的长度都小于 $\frac{1}{h}$. c' -整点有无穷多个分布在有限多个小平行四边形中, 由抽屉原理知必有无穷多个 c' -整点落在同一个小平行四边形中. 显然, 这些 c' -整点两两之间的距离都小于 $\frac{1}{h}$.

将这样选出的无穷多个 c' -整点所对应的复数记为

$$m_i c - \lambda_i a - \mu_i b, i = 1, 2, \dots.$$

由于第 1 个 c' -整点与后面每点的距离都小于 $\frac{1}{h}$, 故有

$$|(m_1 - m_i)c + (\lambda_i - \lambda_1)a + (\mu_i - \mu_1)b| < \frac{1}{h}, \quad (1)$$

$i = 2, 3, \dots$. 由于这表示不同点对之间的距离, 故三数组 $\{(\lambda_i - \lambda_1), (\mu_i - \mu_1), (m_1 - m_i)\}$ 互不相同且有无穷多组. 又因满足

$$|\lambda_i - \lambda_1| + |\mu_i - \mu_1| + |m_1 - m_i| < 1996$$

的只有有限多组. 故必有一组使

$$|\lambda_{i_0} - \lambda_1| + |\mu_{i_0} - \mu_1| + |m_1 - m_{i_0}| \geq 1996,$$

且使式(1)成立. 矛盾.

第38届IMO中国国家队选拔考试

第一天

(1997-04-01 8:00~12:30)

一、给定 $\lambda > 1$, 设点 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆的弧 BAC 上的一个动点, 在射线 BP 和 CP 上分别取点 U 和 V , 使得 $BU = \lambda BA$, $CV = \lambda CA$, 在射线 UV 上取点 Q , 使得 $UQ = \lambda UV$. 求点 Q 的轨迹.

(张筑生 命题)

解: 连结 AU 、 AV 、 AQ .
在 BC 延长线上取点 D , 使 $BD = \lambda BC$. 连结 AD 、 QD .

$\therefore CV = \lambda CA$, $BU = \lambda BA$,

$$\begin{aligned} \angle ACV &= \angle ABU, \\ \therefore \triangle AVC &\sim \triangle AUB, \\ \therefore \frac{AU}{AV} &= \frac{AB}{AC}, \angle VAC = \angle UAB, \\ \therefore \angle UAV &= \angle BAC, \\ \therefore \triangle AUV &\sim \triangle ABC, \\ \therefore \frac{UV}{BC} &= \frac{AU}{AB}, \angle AUV = \angle ABC. \end{aligned}$$

又 $\because UQ = \lambda UV$, $BD = \lambda BC$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{UQ}{BD} &= \frac{UV}{BC} = \frac{AU}{AB}, \\ \therefore \triangle AUQ &\sim \triangle ABD, \\ \therefore \triangle AVQ &\sim \triangle ACD, \\ \therefore \triangle AQD &\sim \triangle AVC, \\ \therefore \frac{QD}{VC} &= \frac{AD}{AC}, \\ \therefore QD &= \frac{VC \cdot AD}{AC} = \lambda AD. \end{aligned}$$

这表明点 Q 位于以点 D 为圆心, 以 λAD 为半径的圆上.

当点 P 运动到点 B 和点 C 时, 割线 BP 和 CP

分别变为过点 B 和 C 的切线. 这时所分别得到的点 Q' 和 Q'' 即为轨迹弧的端点.

二、有 n 支足球队进行比赛, 每两队都赛一场. 胜队得 3 分, 负队得 0 分, 平局各得 1 分. 问一个队至少要得多少分, 才能保证得分不少于该队的至多有 $k-1$ 支队, 其中 $2 \leq k \leq n-1$?

(裘宗沪 命题)

解: 显然, 最坏的情形是有 $k+1$ 支队得分相同且均得最高分.

(1) 当 k 为偶数, 设 $k=2m$. 将 $2m+1$ 个队用圆周上的 $2m+1$ 个等分点来表示. 每个队都战胜由它所对应的点算起按顺时针接下去的 m 支队而负于另外的 m 支队. 同时, 这 $k+1$ 支队每队都战胜另外的 $n-k-1$ 支队的的所有队. 于是这 $k+1$ 支队中的每队得分都是

$$3(n-k-1) + 3m = 3n - \frac{3}{2}k - 3.$$

(2) 当 k 为奇数, 设 $k=2m+1$. 仍将 $2m+2$ 支队用圆周上的 $2m+2$ 个等分点来表示. 与(1)中一样, 每支队都战胜由它算起顺时针接下去的 m 支队, 战平第 $m+1$ 支队而负于另外的 m 支队. 此外, 这 $k+1$ 支队每队都全胜另外的 $n-k-1$ 支队. 所以, 这 $k+1$ 支队中的每队得分都是

$$3(n-k-1) + 3m + 1 = 3n - \frac{1}{2}(3k+1) - 3.$$

将(1)与(2)结合起来, 无论 k 是奇数还是偶数, 都有 $k+1$ 支队的得分同为 $3n - \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil - 3$. 这表明, 当一个队得分为 $3n - \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil - 3$ 时, 还不足以保证得分不少于该队的至多有 $k-1$ 支队.

下面证明, 当一个队得分不少于 $3n - \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil - 2$ 时, 得分不少于它的队至多有 $k-1$ 支队.

若不然, 设有 k 支队得分都不少于 $3n - \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil - 2$, 于是, 这 $k+1$ 支队的得分总数不少

于

$$(k+1)\left(3n - \left[\frac{3k+1}{2}\right] - 2\right).$$

记这 $k+1$ 支队为 A 组, 另外的 $n-k-1$ 支队为 B 组. A 组队与 B 组队比赛的得分总数至多为

$$3(k+1)(n-k-1).$$

A 组队之间比赛得分总数至多为

$$3C_{k+1}^2 = \frac{3}{2}k(k+1).$$

所以, A 组队总得分不多于

$$\begin{aligned} & 3(k+1)(n-k-1) + \frac{3}{2}k(k+1) \\ &= (k+1)\left(3n - 3k - 3 + \frac{3}{2}k\right) \\ &= (k+1)\left(3n - \frac{3}{2}k - 3\right) \\ &< (k+1)\left(3n - \left[\frac{3k+1}{2}\right] - 2\right). \end{aligned}$$

矛盾.

综上所述, 所求的得分数的最小值为

$$3n - \left[\frac{3k+1}{2}\right] - 2.$$

三、求证存在自然数 m , 使得有整数列 $\{a_n\}$, 满足:

$$(1) a_0 = 1, a_1 = 337;$$

$$(2) (a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2) + \frac{3}{4}(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) = m, \forall n \geq 1;$$

$$(3) \frac{1}{6}(a_n + 1)(2a_n + 1) \text{ 都是整数的平方.}$$

(黄玉氏 供题)

证明: 设自然数 m 及整数列 $\{a_n\}$ 满足条件(1),

$$(2) \text{ 和 } (3). \text{ 令 } b_n = a_n + \frac{3}{4}, n = 0, 1, 2, \dots, \text{ 则}$$

$$b_0 = 1 + \frac{3}{4}, b_1 = 337 + \frac{3}{4}$$

$$\text{且 } (2) \Leftrightarrow b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 = m, n = 1, 2, \dots. \quad (4)$$

用归纳法易知数列 $\{b_n\}$ 是严格递增的正数列.

$$\text{所以, } b_{n+1} = \frac{m + b_n^2}{b_{n-1}}, n = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

由此可知整个数列 $\{b_n\}$ 被 $b_0 = \frac{7}{4}, b_1 = \frac{1351}{4}$ 和递推关系(5)唯一决定.

设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_0 = b_0, c_1 = b_1$ 且

$$c_{n+1} = pc_n - c_{n-1}, n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\text{其中, } p = \frac{m + c_0^2 + c_1^2}{c_0c_1}. \quad (7)$$

$$\text{显然 } c_2c_0 - c_1^2 = pc_1c_0 - c_0^2 - c_1^2 = m.$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} c_{n+1}c_{n-1} - c_n^2 &= (pc_n - c_{n-1})c_{n-1} - c_n^2 \\ &= pc_nc_{n-1} - c_{n-1}^2 - c_n^2 \\ &= pc_n \frac{1}{p}(c_n + c_{n-2}) - c_{n-1}^2 - c_n^2 \\ &= c_nc_{n-2} - c_{n-1}^2. \end{aligned}$$

依此类推可得 $c_{n+1}c_{n-1} - c_n^2 = m, n = 1, 2, \dots$.

由 $\{b_n\}$ 的唯一性, 则

$$c_n = b_n, n = 0, 1, 2, \dots.$$

(6) 的特征方程为 $\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$, 显然 $p > 2$, 从而它有两个不同实根

$$\lambda_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - 1}, \lambda_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - 1}. \quad (8)$$

于是, $b_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n, n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\text{其中 } \begin{cases} A + B = b_0 = \frac{7}{4}, \\ \lambda_1 A + \lambda_2 B = b_1 = \frac{1351}{4}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} A = \frac{1}{4} \cdot \frac{1351 - 7\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ B = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1351 + 7\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{从而 } a_n = b_n - \frac{3}{4} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n - \frac{3}{4}, n = 0, 1, 2, \dots.$$

由此, 易证数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系

$$a_{n+1} = pa_n - a_{n-1} + \frac{3}{4}(p-2), n = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(a_n + 1)(2a_n + 1) &= \frac{1}{48}[(4a_n + 3)^2 - 1] \\ &= \frac{1}{48}(16A^2\lambda_1^{2n} + 16B^2\lambda_2^{2n} + 32AB - 1) \\ &= \frac{1}{3}A^2\lambda_1^{2n} + \frac{1}{3}B^2\lambda_2^{2n} + \frac{2}{3}AB - \frac{1}{48} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}A\lambda_1^n - \frac{1}{\sqrt{3}}B\lambda_2^n\right)^2 + \frac{4}{3}AB - \frac{1}{48}, \end{aligned}$$

$$\text{注意到(3), 令 } \frac{4}{3}AB - \frac{1}{48} = 0,$$

$$\text{即 } AB = \frac{1}{64}. \quad (11)$$

由(8)和(9)可知

$$AB = \frac{-1351^2 - 7^2 + 7 \times 1351p}{64 \left(\frac{p^2}{4} - 1 \right)},$$

所以(11) $\Leftrightarrow p^2 - 4 \times 7 \times 1351p + 4 \times 1351^2 + 4 \times 7^2 - 4 = 0$.

从而

$$\begin{aligned} p &= 2 \times 7 \times 1351 \\ &\quad \pm \sqrt{4 \times 7^2 \times 1351^2 - 4 \times 1351^2 - 4 \times 7^2 + 4} \\ &= 2 \times 7 \times 1351 \pm \sqrt{4 \times 1351^2 \times 48 - 4 \times 48} \\ &= 2 \times 7 \times 1351 \pm \sqrt{4 \times 48 \times 1350 \times 1352} \\ &= 2 \times 7 \times 1351 \pm \sqrt{4 \times 48 \times 3 \times 450 \times 8 \times 169} \\ &= 2 \times 7 \times 1351 \pm 24 \times 60 \times 13 \\ &= 18914 \pm 18720, \end{aligned}$$

即 $p = 194$ 或者 $p = 37634$. 由(7)得

$$\begin{aligned} m &= pc_0c_1 - c_0^2 - c_1^2 \\ &= \frac{1}{16} (7 \times 1351p - 7^2 - 1351^2) \\ &= \frac{1}{16} [1351(7p - 1351) - 7^2]. \end{aligned}$$

当 $p = 194$ 时, 由于 $7p - 1351 = 1358 - 1351 = 7$, 所

以, $m = \frac{7}{16} \times (1351 - 7) = 588$.

容易验证 $m = 588$ 满足本题之要求.

事实上, 取数列 $\{a_n\}$ 满足(1), 即 $a_0 = 1, a_1 = 337$, 以及递推关系(10), 其中 $p = 194$, 即

$$a_{n+1} = 194a_n - a_{n-1} + 144, n = 1, 2, \dots$$

显然 $\{a_n\}$ 是整数列. 由上述推导易知 $\{a_n\}$ 满足(2)

$$\text{且 } \frac{1}{6} (a_n + 1)(2a_n + 1) = d_n^2, n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{其中 } d_n = \frac{A}{\sqrt{3}} \lambda_1^n - \frac{B}{\sqrt{3}} \lambda_2^n.$$

由于数列 $\{d_n\}$ 满足

$$d_0 = \sqrt{\frac{1}{6} (a_0 + 1)(2a_0 + 1)} = 1,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{1}{6} (337 + 1)(2 \times 337 + 1)} = 195$$

和递推关系 $d_{n+1} = 194d_n - d_{n-1}, n = 1, 2, \dots$,

所以, $\{d_n\}$ 为整数列. 于是 $\{a_n\}$ 也满足(3).

当 $p = 37634$ 时, $m = 22129968$. 同样容易验证 $m = 22129968$ 也满足本题的要求.

第二天

(1997-04-02 8:00-12:30)

四、试求所有满足下列各条件的实系数

多项式 $f(x)$:

$$(1) f(x) = a_0x^{2n} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_{2n-2}x + a_{2n}, a_0 > 0;$$

$$(2) \sum_{j=0}^n a_{2j} a_{2n-2j} \leq C_{2n}^n a_0 a_{2n};$$

(3) $f(x)$ 的 $2n$ 个根都是纯虚数.

(张筑生 供题)

解: 首先记 $g(i) = a_0t^n - a_2t^{n-1} + \dots + (-1)^j a_{2j} t^{n-j} + \dots + (-1)^n a_{2n}$.

易见 $f(x) = (-1)^n g(-x^2)$.

设 $\pm i\beta_1, \dots, \pm i\beta_n$ 是多项式 $f(x)$ 的 $2n$ 个根 (不妨设 $\beta_j > 0, j = 1, \dots, n$).

则多项式 $g(t)$ 的 n 个根为 $t_j = \beta_j^2 > 0, j = 1, \dots, n$.

$$\text{因而 } \frac{a_{2j}}{a_0} = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_j} t_{k_1} t_{k_2} \dots t_{k_j} > 0.$$

(在下面几行式子中, 符号 Σ 下方未标出的求和范围都是 $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq n$.)

$$\begin{aligned} (I) (C_n^j)^2 \frac{a_{2n}}{a_0} &= \left[\sum \sqrt{t_{k_1} \dots t_{k_j}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{a_{2n}}{a_0}}}{\sqrt{t_{k_1} \dots t_{k_j}}} \right]^2 \\ &\leq \left(\sum t_{k_1} \dots t_{k_j} \right) \left[\sum \frac{\left(\frac{a_{2n}}{a_0} \right)}{t_{k_1} \dots t_{k_j}} \right] \\ &= \frac{a_{2j}}{a_0} \cdot \frac{a_{2n-2j}}{a_0}. \end{aligned}$$

注意到 $C_{2n}^n = \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2$, 并根据(1)和题目的条件(2), 可得

$$\begin{aligned} (II) C_{2n}^n \frac{a_{2n}}{a_0} &= \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2 \frac{a_{2n}}{a_0} \\ &\leq \sum_{j=0}^n \frac{a_{2j}}{a_0} \cdot \frac{a_{2n-2j}}{a_0} \\ &\leq C_{2n}^n \frac{a_{2n}}{a_0}. \end{aligned}$$

由(II)中式看出, 对于 $j = 1, 2, \dots, n$, 在(I)中式中的“ \leq ”号都恰为“=”号. 依据 Cauchy 不等式及等号成立的条件, 可知 $t_1 = t_2 = \dots = t_n$.

将这正数记为 γ^2 , 就得到

$$\frac{a_{2j}}{a_0} = C_n^j \gamma^{2j}, a_{2j} = a_0 C_n^j \gamma^{2j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

于是 $f(x) = a_0(x^2 + \gamma^2)^n$ ($a_0 > 0, \gamma > 0$).

易验证, 这样的多项式 $f(x)$ 满足题目的全部条件.

五、设自然数 $n > 6$. 给定 n 元集合 X . 任取 X 的 m 个互不相同的 5 元子集 A_1, A_2, \dots, A_m . 求证: 只要

$$m > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)}{600},$$

就必定有 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_6}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_6 \leq m$), 使得 $|\bigcup_{k=1}^6 A_{i_k}| = 6$.

(张筑生 供题)

证明: (用反证法) 对于满足题中不等式的自然数 m , 假设有 X 的 m 个互不相同的 5 元子集, 其中任意 6 个的并集都不是 6 元集合. 约定将这 m 个指定的集合组成的类记为 \mathcal{A} , 并记

$$\mathcal{A} = \left\{ B \mid \begin{array}{l} B \subset X, |B| = 4, \text{ 并且} \\ \text{存在 } A \in \mathcal{A}, \text{ 使得 } B \subset A \end{array} \right\}.$$

对于 $B \in \mathcal{A}$, 考察 X 的子集

$$\{x \in X \setminus B \mid B \cup \{x\} \in \mathcal{A}\}.$$

约定将这子集的元素个数记为 $\alpha(B)$.

对于任意给定的一个 $A \in \mathcal{A}$, 考察含于 A 中的 4 元子集 B (对每个 A 恰有 5 个这样的 4 元子集 B). 由反证法假设, 每个 $x \in X \setminus A$ 至多与 4 个 $B \subset A$ 组成一个属 \mathcal{A} 类的 5 元子集. 另外, $A \setminus B$ 的单个元素也与 B 组成 \mathcal{A} 类 5 元集 (即 A), 因此

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=4}} \alpha(B) \leq 4(n-5) + 5,$$

对一切 $A \in \mathcal{A}$, 将如上的不等式求和. 因为每个 $B \in \mathcal{A}$ 都被重复计数 $\alpha(B)$ 次, 所以

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=4}} \alpha(B) = \sum_{B \in \mathcal{A}} (\alpha(B))^2.$$

另一方面, 每个 $A \in \mathcal{A}$ 对 5 个含于其中的 $B \in \mathcal{A}$ 的 $\alpha(B)$ 计数各贡献 1.

$$\text{因此 } \sum_{B \in \mathcal{A}} \alpha(B) = 5m.$$

我们得到

$$\begin{aligned} (4n-15)m &\geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{B \subset A \\ |B|=4}} \alpha(B) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{A}} (\alpha(B))^2 \\ &\geq \frac{1}{C_n^4} \left(\sum_{B \in \mathcal{A}} \alpha(B) \right)^2 \\ &= \frac{1}{C_n^4} (5m)^2. \end{aligned}$$

$$m \leq \frac{4n-15}{25} C_n^4$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)}{600}.$$

这一矛盾证明了题目的论断正确.

六、有 A, B, C 三个药瓶, 瓶 A 中装有 1997 片药, 瓶 B 和 C 都是空的, 装满时可分别装 97 和 19 片药. 每片药含 100 单位有效成分, 每开瓶一次该瓶内每片药都损失 1 个单位有效成分. 某人每天开瓶一次, 吃一片药, 他可以利用这次开瓶的机会将药片装入别的瓶中以减少以后的损失, 处理后将瓶盖都盖好. 问当他将药片全部吃完时, 最少要损失多少个单位有效成分?

(李成章 供题)

解: 为了摸清解题的思路, 先证如下的引理.

引理: 当只有 B 和 C 两个瓶且 B 中装满药片, C 瓶空着时, 吃全部药片的最小损失是 903.

从简单入手来考察损失最小值的变化规律. 以下用三数组 $(a, b, 1)$ 表示当 B 瓶装 $a+b+1$ 枚药片时, 打开瓶吃 1 枚并趁机将 b 枚药片装入 C 瓶中. 而三数组括号外的数字表示总损失的最小值. 易见, 当 B 瓶药片总数依次为 1, 2, 3, 4, 5, 6 时, 情况如下:

$$\begin{array}{ll} 1(0, 0, 1)1 & 4(1, 2, 1)8 \\ 2(0, 1, 1)3 & 5(2, 2, 1)11 \\ 3(1, 1, 1)5 & 6(3, 2, 1)14 \end{array}$$

当 B 瓶有 7 片药时, 即再增加 1 片药时, 增加的 1 片应放入 B 瓶还是 C 瓶? 若放入 C 瓶, 则变为 $(3, 3, 1)$, 总损失为 18; 若放入 B 瓶, 则变为 $(4, 2, 1)$, 总损失也是 18. 故这时增加的 1 枚放入 C 瓶和 B 瓶效果是一样的. 接着, 从 $(3, 3, 1)$ 出发, 再增加 1 片药时, 放入 C 瓶增加 5, 而放在 B 瓶增加 4, 当然要放在 B 瓶中. 而且当 B 瓶药片数依次为 4, 5, 6 时, 每次都增加 3, 故当总数依次为 8, 9, 10 时, 每次增加的 1 枚都应放在 B 瓶中, 总损失的最小值每次都增加 4. 若从 $(4, 2, 1)$ 开始, 则也可依次增加 1 片药, 共 3 次, 其中有 1 次将药放在 C 瓶中, 而另 2 次放在 B 瓶中, 使得总损失的最小值每次都增加 4. 这就是说, 从 $(3, 2, 1)$ 出发, C 瓶药片数可从 2 增加到 3, B 瓶药片数可从 3 增加到 6, 每增加 1 片药都使损失最小值增加 4. 于是有

$$\begin{array}{ll} 7(3, 3, 1)18 & 9(5, 3, 1)26 \\ 8(4, 3, 1)22 & 10(6, 3, 1)30 \end{array}$$

当 B 瓶药片总数再增加时, 无论将新增加的 1 枚放入哪个瓶中, 都至少要使损失的最小值增加 5 而无法更少, 并且为保证每次增加 5, C 瓶药片数可由 3 增到 4, 即 1 次增加机会; B 瓶药片数可由 6 增

加到10,即有4次增加机会.共有5次:

$$\begin{array}{ll} 11(6,4,1)35 & 14(9,4,1)50 \\ 12(7,4,1)40 & 15(10,4,1)55 \\ 13(8,4,1)45 & \end{array}$$

这样一来,当药片总数从0开始每增加1片时,损失的最小值增加1的有1次,增加2的有2次,增加3的有3次,增加4的有4次.一般地,增加 k 的有 k 次.因为 $\frac{1}{2} \times 14 \times 13 = 91$,所以有

$$\begin{array}{ll} 91(78,12,1)819 & 95(81,13,1)875 \\ 92(78,13,1)833 & 96(82,13,1)889 \\ 93(79,13,1)847 & 97(83,13,1)903 \\ 94(80,13,1)861 & \end{array}$$

这就证明了引理.

考察3个瓶的情形.这时用四数组来表示第1次打开A瓶吃一片后3个瓶中药片的分布状态:括号前的数表示开始时A瓶中的药片数,括号中第4个数“1”表示吃1片,前3个数依次表示A,B,C瓶中的药片数,括号后的数表示损失总数的最小值.于是有

$$\begin{array}{ll} 1(0,0,0,1)1 & 13(4,5,3,1)37 \\ 2(0,0,1,1)3 & 14(4,6,3,1)41 \\ 3(0,1,1,1)5 & 15(5,6,3,1)45 \\ 4(1,1,1,1)7 & 16(6,6,3,1)49 \\ 5(1,1,2,1)10 & 17(7,6,3,1)53 \\ 6(1,2,2,1)13 & 18(8,6,3,1)57 \\ 7(1,3,2,1)16 & 19(9,6,3,1)61 \\ 8(2,3,2,1)19 & 20(10,6,3,1)65 \\ 9(3,3,2,1)22 & 21(10,6,4,1)70 \\ 10(4,3,2,1)25 & 22(10,7,4,1)75 \\ 11(4,3,3,1)29 & 23(10,8,4,1)80 \\ 12(4,4,3,1)33 & 24(10,9,4,1)85 \end{array}$$

可见,当A瓶中的药片总数从0算起每增加1片时,损失的最小值增加1的有1次,增加2的有3次,增加3的有6次,增加4的有10次.而且B,C两瓶的变化规律与引理中相同.这样一来,若把增加 n 的次数记为 a_n ,则当增加 n 的 a_n 次排完之后,总数每增加1片时损失的最小值都增加 $n+1$.这时,C瓶中药片数从 $n-1$ 增加到 n ,只有一种情形;B瓶中药片数像引理中一样,有 $n-1$ 个增加值;A瓶中则有 a_n 个增加值,故有

$$a_{n+1} = a_n + n - 1 + 1 = a_n + n.$$

递推可得

$$a_n = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1).$$

但是,当C瓶增加到19或B瓶增加到97时,将无法再增加, a_n 的表达式也将随之发生变化.

为搞清这种情形,将引理证明中的变化规律接着开列于下:

$$\begin{array}{ll} 98(84,13,1) & 106(91,14,1) \\ 99(85,13,1) & 107(92,14,1) \\ 100(86,13,1) & 108(93,14,1) \\ 101(87,13,1) & 109(94,14,1) \\ 102(88,13,1) & 110(95,14,1) \\ 103(89,13,1) & 111(96,14,1) \\ 104(90,13,1) & 112(97,14,1) \\ 105(91,13,1) & \end{array}$$

让我们来看一下,后3数为(91,13,1)时,开始时A瓶药片总数是多少.注意,第3数为13时,对应的是 a_{14} ,于是有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{14} a_n &= \sum_{n=1}^{14} \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} n \\ &= \frac{1}{12} \times 14 \times 15 \times 29 + \frac{1}{4} \times 14 \times 15 \\ &= \frac{1}{12} \times 14 \times 15 \times (29+3) = 560. \end{aligned}$$

即A瓶药片总数为560时,对应的四数组及随后的9个四数组为

$$\begin{array}{ll} 560(455,91,13,1) & 565(455,95,14,1) \\ 561(455,91,14,1) & 566(455,96,14,1) \\ 562(455,92,14,1) & 567(455,97,14,1) \\ 563(455,93,14,1) & 568(456,97,14,1) \\ 564(455,94,14,1) & 569(457,97,14,1) \end{array}$$

从而有

$$a_{15} = a_{14} + 7 = 112.$$

然后,C瓶每次可增加1片,B瓶已无法增加.所以有

$$\begin{aligned} a_{16} &= a_{15} + 1 = 113, a_{17} = a_{16} + 1 = 114, \\ a_{18} &= a_{17} + 1 = 115, a_{19} = a_{18} + 1 = 116, \\ a_{20} &= a_{19} + 1 = 117. \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 560 + 687 = 1247.$$

即当A瓶药片总数为1247时,B,C两瓶均满,故当 $n \geq 20$ 时, $a_n = 117$.由于

$$1997 - 1247 = 750 = 117 \times 6 + 48,$$

所以, $a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = 117$,
 $a_{27} = 48$.

由此即得所求的损失总数的最小值为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{27} na_n &= \sum_{n=1}^{14} \frac{1}{2}n^2(n+1) + \sum_{k=1}^6 (111+k)(14+k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^6 117 \times (20+j) + 48 \times 27 \\ &= 35853. \end{aligned}$$

(李成章 张筑生 黄玉民 供稿)

第 39 届 IMO 中国国家队选拔考试

(1998-03-30~1998-03-31)

一、求正整数 k , 使得

(a) 对任意正整数 n , 不存在 j 满足 $0 \leq j \leq n-k+1$, 且 $C_n^j, C_n^{j+1}, \dots, C_n^{j+k-1}$ 成等差数列;

(b) 存在正整数 n , 使得有 j 满足 $0 \leq j \leq n-k+2$, 且 $C_n^j, C_n^{j+1}, \dots, C_n^{j+k-2}$ 成等差数列. 进一步求出具有性质 (b) 的所有 n .

(许以超 供题)

证明: 由于任取两数必构成等差数列, 因此 $k \neq 1, k \neq 2$. 现在考虑三个数:

$$C_n^{j-1}, C_n^j, C_n^{j+1} \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

若它成等差数列, 则

$$2C_n^j = C_n^{j-1} + C_n^{j+1}.$$

由此可得 $n+2 = (n-2j)^2$, (1)
即 $n+2$ 是完全平方数.

这证明了 $k=3$ 时 (a) 不成立, 从而 $k \neq 3$. 也证明了 $k=4$ 时 (b) 成立.

反过来, 若有正整数 n , 满足条件“ $n+2$ 是完全平方数”, 则有 $n+2 = m^2$. 因 n, m 奇偶性相同, 故存在 j 使 $m = n-2j$. 从而, (1) 成立, 性质 (b) 成立. 故 $k=4$ 时, 具有性质 (b) 的所有 n 为

$$n = m^2 - 2 \quad (m \in \mathbf{N}, m \geq 3).$$

下面证明 $k=4$ 时, 性质 (a) 也成立.

若 $C_n^j, C_n^{j+1}, C_n^{j+2}, C_n^{j+3}$ 成等差数列, 则由 (1) 可知

$$n = (n-2(j+1))^2 - 2 = (n-2(j+2))^2 - 2,$$

$$|n-2j-2| = |n-2j-4|,$$

$$n-2j-2 = -(n-2j-4),$$

$$n = 2j + 3.$$

原数列为 $C_{2j+3}^j, C_{2j+3}^{j+1}, C_{2j+3}^{j+2}, C_{2j+3}^{j+3}$.

但 $C_{2j+3}^j = C_{2j+3}^{j+3}$,

故 $C_{2j+3}^j = C_{2j+3}^{j+1}$, 矛盾.

因此, $k=4$ 时 (a) 成立, 且 $k=5$ 时 (b) 不成立, 即 $k < 5$.

综上所述, 所求正整数 $k=4$, 具有性质 (b) 的所有 n 为

$$n = m^2 - 2 \quad (m \in \mathbf{N}, m \geq 3).$$

二、 $n (\geq 5)$ 支球队进行单循环赛. 每两队赛一场, 胜队得 3 分, 负队得 0 分, 平局各得 1 分. 结果取得倒数第 3 名的队得分比名次在前的队都少, 比后两名都多; 胜场数比名次在前的队都多, 却又比后两名都少. 求队数 n 的最小值.

(李成章 供题)

解: 设 n 支队依次为 $A_1, A_2, \dots, A_{n-3}, B, C_1, C_2$.

因为 A 组队得分多, 胜场少, 而 C 组队得分少, 胜场多, 所以 A 组每队至少 8 平, B 队至少 1 胜 3 负 4 平, C 组每队至少 2 胜 6 负. 后 3 队至少有 15 负, 3 队之间至多赛 3 场, 从而 A 组队至少 12 胜.

若 $n \leq 14$, 则 A 组队数 ≤ 11 , 从而 A 组有队 2 胜 8 平, 所以 $n \geq 11$.

设 $n=11$. 于是, A 组 8 队, 每队至少 8 平, 共 64 平. A 组 8 队之间共赛 $C_8^2 = 28$ 场. A 组队与组外队至少平 8 场, 其中至少与 C 组队平 4 场. C 组队有队至少 2 平. 于是 A 组每队至少 2 胜 10 平, 矛盾.

设 $n=12$. 于是, A 组 9 队. C 组每队至少 6 负, B 队 3 负, B、C 两组合计至少 15 负, A 组队至少胜其他组的队 12 场. 于是, A 组队每队至少胜 2 场 (若 A 组队有的胜两场, 有的胜 1 场, 则胜 1 场的 A 组队每队必增加 3 场平局, 从而 C 组队每队至少 9 负 4 胜, 与 $n=12$ 矛盾). 这样, C 组队至少胜 4 场, A 组队必有负局. 这又导致 A 组队 2 胜 1 负 8 平或 2 胜 9 平, B 队 3 胜 4 负 4 平, C 组队 4 胜 7 负. 总计胜场数 $18+3+8=29$ 场, 负场数 $\leq 9+4+14=27$, 矛盾.

设 $n=13$. A 组 10 队, A 队 2 胜 1 负 9 平, B 队 3 胜 5 负 4 平, C 队 4 胜 8 负. 列表如下:

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	B	C ₁	C ₂	胜	得分
A ₁		1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	3:0	3:0	2	15
A ₂	1:1		1:1	0:3	1:1	1:1	1:1	1:1	4:1	1:1	1:1	3:0	3:0	2	15
A ₃	1:1	1:1		1:1	0:3	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	3:0	3:0	2	15
A ₄	1:1	3:0	1:1		1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	3:0	2	15
A ₅	1:1	1:1	3:0	1:1		1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	3:0	2	15
A ₆	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	1:1	1:1	1:1	3:0	0:3	3:0	2	15
A ₇	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	1:1	1:1	3:0	3:0	0:3	2	15
A ₈	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	1:1	3:0	3:0	0:3	2	15
A ₉	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	3:0	3:0	0:3	2	15
A ₁₀	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		3:0	3:0	0:3	2	15
B	3:0	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3		3:0	3:0	3	13
C ₁	0:3	0:3	0:3	3:0	3:0	3:0	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3		3:0	4	12
C ₂	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3	3:0	3:0	3:0	3:0	0:3	0:3		4	12

综上所述,队数 n 的最小值为 13.

三、对于固定的 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求满足以下两条条件的最小正数 a :

(i) $\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta} + \frac{\sqrt{a}}{\sin\theta} > 1$;

(ii) 存在 $x \in [1 - \frac{\sqrt{a}}{\sin\theta}, \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}]$, 使得

$$[(1-x)\sin\theta - \sqrt{a-x^2\cos^2\theta}]^2 + [x\cos\theta - \sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}]^2 \leq a.$$

(黄玉民 供题)

解:由(i)得

$$\sqrt{a} > \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}. \tag{1}$$

不妨设 $\frac{a}{\sin^2\theta} + \frac{a}{\cos^2\theta} \leq 1$. (2)

(ii)等价于:存在 $x \in [1 - \frac{\sqrt{a}}{\sin\theta}, \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}]$, 满足

$$2(1-x)\sin\theta\sqrt{a-x^2\cos^2\theta} + 2x\cos\theta\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta} \geq a,$$

即 $2\sin\theta\cos\theta \left\{ (1-x)\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta} - x^2} + x\sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta} - (1-x)^2} \right\} \geq a$. (3)

先证一个引理:设 $0 < p < 1, 0 < q < 1, p + q > 1, p^2 + q^2 \leq 1, f(x) = (1-x)\sqrt{p^2-x^2} + x\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ ($1-q \leq x \leq p$).

则当 $\sqrt{p^2-x^2} = \sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时, 即 $x = \frac{p^2-q^2+1}{2} \in [1-q, p]$ 时, $f(x)$ 达到最大值.

引理的证明:

由于 $1-q \leq x \leq p$, 因此可令

$$x = p\sin\alpha, 1-x = q\sin\beta, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \alpha + \beta < \pi.$$

于是,有

$$\begin{aligned} f(x) &= pq(\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta) \\ &= pq\sin(\alpha + \beta), \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{\sqrt{p^2-x^2}\sqrt{q^2-(1-x)^2} - x(1-x)}{pq}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &2[\sqrt{p^2-x^2}\sqrt{q^2-(1-x)^2} - x(1-x)] \\ &= -(\sqrt{p^2-x^2} - \sqrt{q^2-(1-x)^2})^2 + p^2 + q^2 - x^2 \\ &\quad - (1-x)^2 - 2x(1-x) \\ &= p^2 + q^2 - 1 - (\sqrt{p^2-x^2} - \sqrt{q^2-(1-x)^2})^2 \leq 0, \end{aligned}$$

从而, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta < \pi$.

同时, 当且仅当 $\sqrt{p^2-x^2} = \sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时, 即 $x = \frac{1}{2}(p^2 - q^2 + 1) \in [1 - q, p]$ 时, $\cos(\alpha + \beta)$ 达到最大值 $\frac{p^2 + q^2 - 1}{2pq} \leq 0$.

因为在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上正弦函数单调递减, 所以,
 $f(x) = pq \sin(\alpha + \beta)$ 也当且仅当 $x = \frac{1}{2}(p^2 - q^2 + 1)$ 时达到最大值.

由引理可知, 式(3)左端当且仅当 $\sqrt{\frac{a}{\cos^2 \theta} - x^2}$
 $= \sqrt{\frac{a}{\sin^2 \theta} - (1-x)^2}$, 即
 $x = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\cos^2 \theta} - \frac{a}{\sin^2 \theta} + 1 \right) \in \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{\sin \theta}, \frac{\sqrt{a}}{\cos \theta} \right)$
 时, 达到最大值

$2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{a}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\cos^2 \theta} - \frac{a}{\sin^2 \theta} + 1 \right)^2}$,
 即 $\sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{4a}{\cos^2 \theta} - \left(\frac{a}{\cos^2 \theta} - \frac{a}{\sin^2 \theta} + 1 \right)^2}$.
 由(3)得知, 所求的最小的 a 是满足下式且满足
 (1)的最小的 a :

$$\sqrt{\frac{4a}{\cos^2 \theta} - \left(\frac{a}{\cos^2 \theta} - \frac{a}{\sin^2 \theta} + 1 \right)^2} \geq \frac{a}{\cos \theta \sin \theta},$$

即

$$a^2 \left(\frac{1}{\cos^4 \theta} + \frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right) - 2 \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) a + 1 \leq 0. \quad (4)$$

因为 $\frac{1}{\cos^4 \theta} + \frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$
 $= \frac{1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta \cos^4 \theta} > 0,$

(4)的左端的根为

$$\frac{\sin^4 \theta \cos^4 \theta}{1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \left[\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)^2 - \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}} \right]$$

$$= \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 \pm \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta},$$

所以, 由(4)可得

$$\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta} \leq a \leq \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 - \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta}.$$

由于 $\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} < \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta},$

因此, 当

$$a = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta} \text{ 时, 满足(1). 故所求的}$$

$$a = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta}.$$

四、如图 1, 锐角 $\triangle ABC$ 中, H 是垂心, O 是外心, I 是内心, 已知 $\angle C > \angle B > \angle A$. 求证: I 在 $\triangle BOH$ 的内部.

(袁宗沪 供题)

证明: 设 $\angle B$ 的分角线交 OH 于 P , 则 BP 也是 $\angle OBH$ 的分角线.

$$\therefore \frac{BH}{BO} = \frac{HP}{OP}. \quad (1)$$

设 $\angle A$ 的分角线交 OH 于 Q , AQ 也是 $\angle OAH$ 的分角线,

$$\therefore \frac{AH}{AO} = \frac{HQ}{OQ}. \quad (2)$$

作 $CHE \perp AB$, 由 $\angle B > \angle A$,

得 $AC > BC, AE > BE$.

故 $AH > HB$.

(3)

又 $AO = BO$,

(4)

由(1), (2), (3), (4)得 $\frac{HQ}{OQ} > \frac{HP}{OP}$.

从而, Q 在 O, P 之间, AQ 与 BP 的交点 I 必在 $\triangle BOH$ 内.

五、自然数 $n \geq 3$. 平面上给定一条直线 l , 在 l 上依次有 n 个互不相同的点 P_1, P_2, \dots, P_n . 记点 P_i 到其余 $n-1$ 个点的距离的乘积为 d_i ($i=1, 2, \dots, n$). 平面上还有一点 Q 不在 l 上, 点 Q 到点 P_i 的距离记为 C_i ($i=1, 2, \dots, n$). 求以下和式的值:

$$S_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{C_i^2}{d_i}.$$

(常庚哲 供题)

解: 不妨设这 n 个点在实轴上, 有坐标 $P_i(x_i, 0)$ ($i=1, 2, \dots, n$), $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, Q 点有坐标 $Q(\alpha, \beta)$. 于是,

$$(-1)^{n-i} d_i = (x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n),$$

$$C_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_i + x_i^2,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_i + x_i^2}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \quad (1)$$

令

$$T_k = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}, \quad (2)$$

其中 $k=0, 1, 2$.

设部分分式

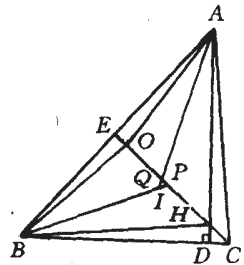


图 1

$$\frac{x^k}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x-x_i}, \quad (3)$$

这里 $k < n, A_1, A_2, \dots, A_n$ 为常数.

用 $x-x_j$ 乘式(3)两端,再令 $x=x_j$,可得

$$\frac{x_j^k}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} = A_j \quad (j=1,2,\dots,n).$$

代入(2),得 $T_k = \sum_{j=1}^n A_j$. (4)

用 x 乘式(3)两端,得

$$\frac{x^{k+1}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i x}{x-x_i}.$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 则

$$\text{上式左端} \rightarrow \begin{cases} 1, k+1=n \text{ 时}, \\ 0, k+1 < n \text{ 时}, \end{cases}$$

$$\text{上式右端} \rightarrow \sum_{i=1}^n A_i.$$

$$\text{所以, } \sum_{i=1}^n A_i = \begin{cases} 0, k < n-1 \text{ 时}, \\ 1, k = n-1 \text{ 时}. \end{cases}$$

代入(4)得

$$T_0 = T_1 = 0, T_2 = \begin{cases} 1, n=3 \text{ 时}, \\ 0, n > 3 \text{ 时}. \end{cases}$$

代入(1)得

$$S_n = (\alpha^2 + \beta^2)T_0 - 2\alpha T_1 + T_2 = T_2 = \begin{cases} 1, n=3 \text{ 时}, \\ 0, n > 3 \text{ 时}. \end{cases}$$

六、任意给定 $h=2^r$ (r 是非负整数). 求满足以下条件的所有自然数 k : 对每个这样的 k , 存在奇自然数 $m > 1$ 和自然数 n , 使得

$$k \mid m^h - 1, m \mid n^{\frac{h-1}{k}} + 1.$$

(张筑生 供题)

解: 对于 $h=2^r$, 约定将满足题目条件的所有的 k 的集合记为 $k(h)$. 我们来证明:

$$k(h) = \{2^{r+t} \mid s, t \in \mathbb{N}, 2 \nmid t\}.$$

将用到以下事实:

$$m \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2^r \parallel \frac{m^{2^r} - 1}{m - 1}.$$

这个事实是显然的, 因为

$$\frac{m^{2^r} - 1}{m - 1} = (m^{2^{r-1}} + 1)(m^{2^{r-2}} + 1) \cdots (m^2 + 1)$$

$\cdot (m + 1)$.

(I) 先证: 若 $s \geq 2, 2 \nmid t$, 则 $k = 2^{r+t} \in k(h)$.

事实上, 存在 $m = 2^s + 1, n = m - 1$, 使得我们有

$$2^r \parallel \frac{m^{2^r} - 1}{m - 1},$$

$$\frac{m^h - 1}{k} = \frac{m^{2^r} - 1}{2^{r+t}} = \frac{m^{2^r} - 1}{2^r(m-1)}$$

是奇自然数.

所以, $k \mid m^h - 1$.

$$\text{又 } n^{\frac{h-1}{k}} = (m-1)^{\frac{h-1}{k}} \equiv -1 \pmod{m},$$

所以, $m \mid n^{\frac{h-1}{k}} + 1$.

(II) 再证: 对于 $2 \nmid t, k = 2^{r+t} \in k(h)$.

事实上, 存在 $m = 4t^2 + 1, n = 2t$, 使得我们有

$$\frac{m^h - 1}{k} = \frac{m^{2^r} - 1}{2^r(m-1)} \cdot 2t,$$

$$n^{\frac{h-1}{k}} = (n^2)^{\frac{m^{2^r} - 1}{2^r(m-1)}} \equiv -1 \pmod{m}.$$

(III) 用反证法论证: 对于 $0 \leq q \leq r, 2 \nmid t$,

$$2^q t \notin k(h).$$

若对 $k = 2^q t$, 有 m, n 满足题中所述的要求, 显然有 $(m, n) = 1$. 在 m 的所有素因数中取以下表示中指数 a 最小的一个素数 p :

$$p = 2^a b + 1, 2 \nmid b.$$

易见 $2^a \mid m - 1$.

一方面, 由 $p \mid n^{\frac{h-1}{k}} + 1$, 我们有

$$(n^{\frac{h-1}{2^q t}})^b \equiv -1 \pmod{p}.$$

另一方面, 因为 $2^a \mid m - 1, 2^{q+a} \mid m^h - 1$,

所以, 有

$$(n^{\frac{h-1}{2^q t}})^b = (n^{\frac{h-1}{2^{q+a} t}})^{2^a b} \equiv (n^{\frac{h-1}{2^{q+a} t}})^{b-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

矛盾.

结论: 对于 $h = 2^r, k(h) = \{2^{r+t} \mid s, t \in \mathbb{N}, 2 \nmid t\}$.

(河南师范大学数学系夏兴国 供稿)

第40届IMO中国国家队选拔考试

一、对于满足条件 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 的非负实数 x_1, x_2, \cdots, x_n . 求 $\sum_{j=1}^n (x_j^4 - x_j^5)$ 的最大值.

解: 用调整法探索题中和式的最大值.

(i) 首先对于 $x, y > 0$, 我们来比较 $(x+y)^4 - (x+y)^5 + 0^4 - 0^5$ 与 $x^4 - x^5 + y^4 - y^5$ 的大小:

$$\begin{aligned} & (x+y)^4 - (x+y)^5 + 0^4 - 0^5 - (x^4 - x^5 + y^4 - y^5) \\ &= xy(4x^2 + 6xy + 4y^2) \\ & \quad - xy(5x^3 + 10x^2y + 10xy^2 + 5y^3) \\ & \geq \frac{7}{2}xy(x^2 + 2xy + y^2) \\ & \quad - 5xy(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\ &= \frac{1}{2}xy(x+y)^2[7 - 16(x+y)]. \end{aligned}$$

只要 $x, y > 0, x+y < \frac{7}{16}$, 上式就必然大于 0.

(ii) 如果 x_1, x_2, \cdots, x_n 中的非 0 数少于两个,

那么, 题中的和式就等于 0. 以下考察 x_1, x_2, \cdots, x_n 中的非 0 数不少于两个的情形.

如果某三个数 $x_i, x_j, x_k > 0$, 那么, 其中必有两个之和 $\leq \frac{2}{3} < \frac{7}{10}$. 根据(i)中的讨论, 可将这两数合并作为一个数, 另补一个数 0, 使得题中的和式变大. 经有限次调整, 最后剩下两个非零数, 不妨设为

$$x, y > 0, x + y = 1.$$

对此情形,

$$\begin{aligned} & x^4 - x^5 + y^4 - y^5 \\ &= x^4(1-x) + y^4(1-y) \\ &= xy(x^3 + y^3) \\ &= xy[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] \\ &= xy(1-3xy) \\ &= \frac{1}{3}(3xy)(1-3xy). \end{aligned}$$

$$> \left(\frac{1}{2^k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)\right)^3.$$

由于 $n = 2^m - 1$, 故 n_i 均为奇数. 又 $n_i > 3$, 故 $n_i \geq 5 (1 \leq i \leq k)$. 这样

$$\left(\frac{n_i-1}{2}\right)^3 \geq 4 \cdot \frac{n_i-1}{2} > n_i (1 \leq i \leq k).$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)} - 1$$

$$> \left(\frac{1}{2^k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)\right)^3$$

$$> n_1 n_2 \cdots n_k.$$

此与式(1)矛盾.

所以具有性质 P 的数只有一个 $n = 7$.

六、某次考试有 5 道选择题, 每题都有 4 个不同答案供选择. 每人每题恰选 1 个答案. 在 2 000 份答卷中发现存在一个 n , 使得任何 n 份答卷中都存在 4 份, 其中每两份的答案都至多 3 题相同. 求 n 的最小可能值. (李成章 供题)

解: n 的最小可能值为 25.

将每道题的 4 种答案分别记为 1, 2, 3, 4. 每份试卷上的答案记为 (g, h, i, j, k) , 其中 $g, h, i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. 令

$$\{(1, h, i, j, k), (2, h, i, j, k), (3, h, i, j, k), (4, h, i, j, k)\}, h, i, j, k = 1, 2, 3, 4,$$

共得 256 个四元组. 由于 $2\ 000 = 256 \times 7 + 208$, 故由抽屉原理知有 8 份答卷上的答案属于同一个四元组. 取出这 8 份答卷后, 余下的 1 992 份中仍有 8 份属于同一个四元组; 再取出这 8 份答卷, 余下的 1 984 份中又有 8 份属于同一个四元组; 取出这 8 份答卷, 连同前两次取出的答卷共 24 份. 在这 24 份答卷中, 任何 4 份中总有两份的答案属于同一个四元组, 当然不满足题中的要求. 所以, 所求的最小值 ≥ 25 .

另一方面, 令

$$S = \{(g, h, i, j, k) \mid g+h+i+j+k \equiv 0 \pmod{4}, g, h, i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

则 $|S| = 256$, 且 S 中任何两种答案都至多有 3 题相同. 从 S 中去掉 6 个元素, 当余下的 250 种答案中的每种答案都恰有 8 人选用时, 共得到 2 000 份答卷, 其中的任何 25 份答案中, 总有 4 份不相同, 由于它们都在 S 中, 当然满足题中要求. 这表明 $n = 25$ 时可以满足题中要求.

综上所述, 所求的 n 的最小可能值为 25.

(2000 年中国数学奥林匹克主试委员会 供稿)

当 $3xy = \frac{1}{2}$ 时, 上式达到最大值:

$$x^4 - x^5 + y^4 - y^5 = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}.$$

这就是题目所求的最大值. 能达到这最大值的 x_1, x_2, \dots, x_n , 其中仅两个不等于 0. 以 x 和 y 表示这两个数, 则

$$x, y > 0, x + y = 1, xy = \frac{1}{6}.$$

解二次方程 $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6} = 0$ 可知

$$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, y = \frac{3 - \sqrt{3}}{6},$$

当然也可以是 $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, y = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

验算可知, 如果 x_1, x_2, \dots, x_n 中仅这样两个非 0 数, 那么, 题目的和式确实达到最大值 $\frac{1}{12}$.

二、试求满足以下条件的全部质数 p :

对任一质数 $q < p$, 若 $p = kq + r, 0 \leq r < q$, 则不存在大于 1 的整数 a , 使得 a^r 整除 r .

解: 容易验证 $p = 2, 3, 5, 7$ 均满足条件. 现来讨论质数 $p \geq 11$. 若 p 满足条件, 则有

(i) $p - 4$ 没有大于 4 的质因数;

(ii) $p - 8$ 没有大于 8 的质因数;

(iii) $p - 9$ 没有大于 9 的质因数.

由 (i) 及 $p - 4$ 是奇数推出

$$p - 4 = 3^a, a \geq 2. \quad (1)$$

由上式及 $p - 8$ 是奇数知, $p - 8$ 不能被 2 和 3 整除. 因此, 由 (ii) 知

$$p - 8 = 5^b 7^c. \quad (2)$$

由式 (1) 和式 (2) 得

$$5^b 7^c - 3^a + 4 = 0, a \geq 2. \quad (3)$$

式 (3) 两边被 3 除后得 $(-1)^b + 1 = 0$, 所以,

$$1 \leq b = 2l + 1, l \geq 0. \quad (4)$$

由于 $b \geq 1$, 由式 (3) 推出 5 整除 $3^a + 1$, 所以,

$$2 \leq a = 4m + 2, m \geq 0. \quad (5)$$

由式 (2) 知 $p - 9 = 5^b 7^c - 1$. 显然 $p - 9$ 不能被 3 整除; 由于 $b \geq 1$, 所以也不能被 5 整除.

我们来证明必有 $c = 0$.

若不然, 设 $c > 0$, 则 $p - 9$ 也不能被 7 整除. 因此, 由 (iii) 知必有

$$p - 9 = 5^b 7^c - 1 = 2^d, c > 0.$$

由此推出 7 整除 $2^d + 1$, 而这对任意非负整数 d 都是不可能的 (为什么).

由式 (1), (2) 及 $c = 0$ 推出

$$5^b = 3^a - 4 = (3^{2m+1} - 2)(3^{2m+1} + 2).$$

设 $3^{2m+1} - 2$ 和 $3^{2m+1} + 2$ 的最大公约数为 g , 显然, g 为奇数, 且 g 整除 $(3^{2m+1} + 2) - (3^{2m+1} - 2) =$

4, 所以 $g = 1$. 由此及 5 是质数推出

$$3^{2m+1} - 2 = 1, 3^{2m+1} + 2 = 5^b.$$

因而 $m = 0, b = 1, a = 2$.

所以, 由式 (1) 知, 满足条件的质数仅有 13.

满足本题条件的全部质数是: 2, 3, 5, 7, 13.

三、设 $S = \{1, 2, \dots, 15\}$. 从 S 中取出 n 个子集 A_1, A_2, \dots, A_n 满足下列条件:

(i) $|A_i| = 7, i = 1, 2, \dots, n$;

(ii) $|A_i \cap A_j| \leq 3, 1 \leq i < j \leq n$;

(iii) 对 S 的任何三元子集 M , 存在某个 A_k , 使得 $M \subset A_k$.

求这样一组子集个数 n 的最小值.

解: 设 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是符合题目条件的任一集合族. 对任意的 $a \in S$, 约定将 a 所属的 \mathcal{A} 族集合的个数记为 $r(a)$. 这 $r(a)$ 个 \mathcal{A} 族集合每个包含 $C_4^2 = 15$ 个含 a 的三元集合. 另一方面, S 的含有 a 的三元子集总共有 $C_4^3 = 91$ 个, 每个都被某个 \mathcal{A} 族集合所包含, 所以,

$$15r(a) \geq 91, r(a) \geq 7.$$

用两种方法计算 \mathcal{A} 族各集合所含元素数目之总和, 我们看到

$$n \times 7 = \sum_{a \in S} r(a) \geq 15 \times 7, n \geq 15.$$

下面我们具体构造一个符合题目条件的集合族 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{15}\}$. 首先, 将 $S = \{1, 2, \dots, 15\}$ 的 15 个元素依顺时针次序标记在等分圆周的 15 个分点上 (如图 1 所示).

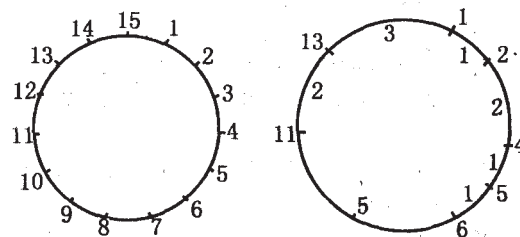


图 1

图 2

我们记 $A_1 = \{1, 2, 4, 5, 6, 11, 13\}$, 并将 A_1 依顺时针方向转动 $j - 1$ 弧格所得的 S 的 7 元子集记为 $A_j (j = 2, 3, \dots, 15)$. 这里所谓的弧格即等分圆周的 15 个分点中相邻两点间的弧段, 图 2 是 A_1 的图示. 图中圆内侧弧段上所标数字是该弧段所含弧格的数目.

我们来验证这样的 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{15}\}$ 符合题目的要求.

(i) 显然 \mathcal{A} 的每个集合恰由 S 的 7 个元素组成.

(ii) 如果 $1 \leq j - i \leq 7$, 那么, A_i 顺时针转动 $j - i$ 个弧格就得到 A_j . 分析 A_1 的图示 (图 2), 我们看到顺向相距弧格数分别为

1,2,3,4,5,6,7

的元素对各恰有三对. 每个 A_i 也有同样的情形. 将 A_i 顺时针方向转动 $j-i$ 个弧格 ($1 \leq j-i \leq 7$), 恰有 A_i 的三个元素转动后到达位置所标的元素仍在 A_i 中. 因而,

$$|A_i \cap A_j| = 3.$$

如果 $8 \leq j-i \leq 14$, 那么, 将 A_j 顺时针转动 $15-(j-i)$ 个弧格就得到 A_i . 同样可以断定

$$|A_i \cap A_j| = 3.$$

(iii) 设 $M = \{u, v, w\}$ 是 S 的任意一个三元子集. 不妨设 u, v, w 在圆周上是按顺时针次序排列的. 考察 u 与 v, v 与 w, w 与 u 之间的顺时针方向弧段所含弧格数, 将其中较小两弧段所含格数的序对记为 (a, b) (顺时针序). 我们将按不同的这种序对区分 S 的三元集的类型. 显然

$$1 \leq a, b \leq 7,$$

并且除了 $(5, 5)$ 这序对之外, 其余的序对 (a, b) 都满足

$$a + b \leq 9.$$

观察 A_1 的图示, 我们看到, 下面罗列的每种 (a, b) 类型的三元集在 A_1 中各出现一次:

- (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1),
- (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (1, 7), (7, 1);
- (2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2),
- (2, 6), (6, 2), (2, 7), (7, 2);
- (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3);
- (4, 4), (4, 5), (5, 4);
- (5, 5);

据此可知, S 的任何一个三元子集 M 都至少被某一个族集合所包含 (事实上恰被一个族集合所包含).

四、某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 AB, BC 两边相切于 G, H 两点, 与对角线 AC 相交于 E, F 两点. 问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件, 使得存在另一圆过 E, F 两点, 且分别与 DA, DC 的延长线相切? 证明你的结论.

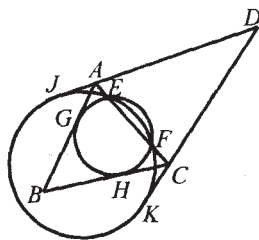


图 3

解: 所求的充分必要条件是

$$AB + AD = CB + CD.$$

(i) 必要性的证明:

设过 E, F 两点的另一圆分别与 DA 延长线和 DC 延长线相切于 J 和 K 两点. 则有

$$AB + AD = BG + GA + AD$$

$$\begin{aligned} &= BG + JA + AD = BG + JD \\ &= BH + KD = BH + KC + CD \\ &= BH + HC + CD = CB + CD. \end{aligned}$$

(ii) 充分性的证明:

设凸四边形 $ABCD$ 满足条件

$$AB + AD = CB + CD.$$

在 DA 延长线和 DC 延长线上分别取 J 点和 K 点, 使得 $AJ = AG, CK = CH$. 于是,

$$\begin{aligned} DJ &= JA + AD = AG + AD \\ &= AB + AD - BG = CB + CD - BH \\ &= CH + CD = DK. \end{aligned}$$

过 J 点和 K 点分别作 DJ 和 DK 的垂线, 以两垂线交点为圆心作通过 J 点和 K 点的圆.

因为 $AJ = AG, CK = CH$,

所以 A 点和 C 点关于原有圆的幂分别等于这两点关于所作圆的幂.

因为直线 AC 与原有圆相交于 E 和 F 两点,

所以 EF 是两圆的公共弦 (直线 AC 是两圆的根轴).

至此, 我们证明了所作的与 DA 延长线和 DC 延长线相切的圆通过 E, F 两点.

五、给定正整数 $m \geq 2$. 试证:

(1) 存在整数 x_1, x_2, \dots, x_{2m} 使得

$$x_i x_{m+i} = x_{i+1} x_{m+i-1} + 1, 1 \leq i \leq m. \quad (*)$$

(2) 对任何适合条件 (*) 的整数组 x_1, x_2, \dots, x_{2m} , 可构造出满足

$$y_k y_{m+k} = y_{k+1} y_{m+k-1} + 1,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的整数序列

$$\dots, y_{-k}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_k, \dots$$

使得 $y_i = x_i, i = 1, 2, \dots, 2m$.

证明: (1) 取 $x_1 = \dots = x_m = 1$, 由

$$x_i x_{m+i} = x_{i+1} x_{m+i-1} + 1, 1 \leq i \leq m,$$

有 $x_{m+i} = x_{m+i-1} + 1, 1 \leq i \leq m-1$,

$$x_{2m} = x_{m+1} x_{2m-1} + 1.$$

于是, $x_{m+1} = x_m + 1 = 2$.

有 $x_{k+m} = k + 1, 1 \leq k \leq m-1$.

$$\text{又 } x_{2m} = 2m + 1,$$

所以一组特解为

$$x_i = 1, 1 \leq i \leq m, x_{m+i} = i + 1, 1 \leq i < m,$$

$$x_{2m} = 2m + 1.$$

(2) $(x_1 x_{m-1} + 1)(x_m x_{2m} - 1)$

$$= x_1 x_{m-1} (x_m x_{2m} - 1) + x_m x_{2m} - 1$$

$$= x_1 x_{m-1} x_{m+1} x_{2m-1} + x_m x_{2m} - 1$$

$$= x_1 x_{m+1} x_{m-1} x_{2m-1} + x_m x_{2m} - 1$$

$$= (x_2 x_m + 1) x_{m-1} x_{2m-1} + x_m x_{2m} - 1$$

$$= (x_2 x_{m+1}) (x_m x_{2m-2} + 1) + x_m x_{2m} - 1$$

$$= x_m(x_2x_mx_{2m-2} + x_2 + x_{2m-2} + x_{2m}),$$

所以,当 $x_m \neq 0$ 时,

$$x_m | (x_1x_{m-1} + 1).$$

而 $x_0x_m = x_1x_{m-1} + 1$,

$$\text{即 } x_0 = \frac{x_1x_{m-1} + 1}{x_m} \in \mathbf{Z}.$$

当 $x_m = 0$ 时,有

$$x_1x_{m-1} = -1.$$

而 $x_0x_m = x_1x_{m-1} + 1$ 对所有整数 x_0 成立,

所以从 x_1, \dots, x_{2m} 出发,可求出 x_0 .

对 $x_0, x_1, \dots, x_{2m-1}$ 适合一样的关系. 由归纳法便证明了断言.

六、对于 $1, 2, \dots, 10$ 的每一排列 $\tau = (x_1, x_2, \dots, x_{10})$, 定义

$$S(\tau) = \sum_{k=1}^{10} |2x_k - 3x_{k+1}|.$$

约定 $x_{11} = x_1$. 试求:

(1) $S(\tau)$ 的最大值与最小值;

(2) 使 $S(\tau)$ 达到最大值的所有排列 τ 的个数;

(3) 使 $S(\tau)$ 达到最小值的所有排列 τ 的个数.

解:(i) 对于 $1, 2, \dots, 10$ 的排列 $\tau = (x_1, x_2, \dots, x_{10})$, $S(\tau) = \sum_{k=1}^{10} |2x_k - 3x_{k+1}|$. 先估计 $S(\tau)$ 的上界及下界.

$$S(\tau) = \sum_{k=1}^{10} \pm (3x_{k+1} - 2x_k).$$

可见 $S(\tau)$ 是 20 个数的代数和, 其中有 10 个取正号, 10 个取负号, 这 20 个数为 $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{10}, 3x_1, \dots, 3x_{10}$. 这 20 个数中, 从大到小排列时, 大的 10 个数为

$$3 \times 10, 3 \times 9, 3 \times 8, 3 \times 7, 3 \times 6, 3 \times 5,$$

$$2 \times 10, 2 \times 9, 2 \times 8, 2 \times 7.$$

$$\therefore S(\tau) \leq 3(10+9+8+7+6+5) + 2(10+9+8+7) - 3(4+3+2+1) - 2(6+5+4+3+2+1) = 131.$$

$$\text{又 } S(\tau) \geq \sum_{k=1}^{10} (3x_{k+1} - 2x_k) = \sum_{k=1}^{10} x_k = 55.$$

但在后一个不等式中, 不可能成立等式. 因为 $\{3x_{k+1} - 2x_k\}$ 中至少有一个是负数(使 $x_{k+1} = 1$ 的那个必为负数), 即有一个 k 使得

$$3x_{k+1} - 2x_k \leq -1.$$

对这个 k ,

$$|3x_{k+1} - 2x_k| \geq 3x_{k+1} - 2x_k + 2.$$

$$\therefore S(\tau) \geq \sum_{k=1}^{10} x_k + 2 = 57.$$

实际上, $S(\tau)$ 的最大值及最小值分别为 131 及 57.

(ii) 为讨论 $S(\tau) = 131$ 的排列 τ 的个数, 不妨设排列 $\tau = (x_1, x_2, \dots, x_{10})$ 中, $x_{10} = 1$.

为使 $S(\tau) = 131$, 在排列 τ 中, 数 7, 8, 9, 10 的后面项必定是 1, 2, 3, 4 中的一个. 否则 $\{7, 8, 9, 10\}$ 中的某个数 a 的后面一项是 $b \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (当然 $a \neq b$), 于是 $S(\tau)$ 的和式中有一项为 $|2a - 3b|$, 从而在把绝对值去掉时, 和式中 $2a, 3b$ 中至少有一个的系数是 (-1) . 因此, $S(\tau) < 131$.

反过来, 如果 $\{7, 8, 9, 10\}$ 的每个数的后面一项都在 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中, 则在计算 $S(\tau)$ 时, 在去掉绝对值时, $2 \times 7, 2 \times 8, 2 \times 9, 2 \times 10$ 的系数都是 1, 而 $3 \times 7, 3 \times 8, 3 \times 9, 3 \times 10$ 的系数肯定是 1, 从而对于 5 和 6 这两个数, 它们的前面一项不会是在 $\{7, 8, 9, 10\}$ 中, 因此, 3×5 及 3×6 的系数必定是 1. 从而, $S(\tau) = 131$.

于是, $\{7, 8, 9, 10\}$ 后面分别放 1, 2, 3, 4, 共有 4! 种搭配法. 而四对任意放次序, 但 1 的那组放在最后, 有 3! 种放法, 在放好四组的次序后, 再放 5, 6 这两个数, 5 有四种放法, 再放 6 时有五种放法.

因此, 使 $S(\tau) = 131$ 的排列有

$$4! \times 3! \times 4 \times 5 \times 10 = 28800 \text{ 个}.$$

(最后的乘 10 考虑的是 $x_{10} = 1$ 的排列)

(iii) 下面计算 $S(\tau) = 57$ 的排列 τ 的个数. 仍设 $x_{10} = 1$, 这时, 必须 $x_9 = 2$, 且 $3x_{k+1} - 2x_k \geq 0 (k = 1, 2, 3, \dots, 8)$ 并且这些条件也是充分的. 可见, 排列 $\tau = (x_1, x_2, \dots, x_{10})$ 中,

$$x_{10} = 1, x_9 = 2, x_8 = 3, x_7 = 4, \text{ 而 } x_6 = 5 \text{ 或 } 6.$$

(1) 如 $x_6 = 6$, 这时 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{5, 7, 8, 9, 10\}$. 而 5 只能是 x_1 或者 5 之前的一项为 7.

当 $x_1 = 5$ 时, 7, 8, 9, 10 可以任意排, 但 10 不能是 x_5 , 这种排列有 $4! - 3! = 18$ 种.

当 5 前面是 7 时, 5, 7 作为一组, 8, 9, 10 各作为一组, 这四组可任意排, 但 10 不在最后, 也有 $4! - 3! = 18$ 种.

(2) 如 $x_6 = 5$, 这时 $x_5 = 6$ 或 7.

如 $x_5 = 6$, 前四个数为 $\{7, 8, 9, 10\}$, 可以任意排, 但 10 不在最后, 有 $4! - 3! = 18$ 种.

如 $x_5 = 7$, 前四个数为 $\{6, 8, 9, 10\}$, 可以任意排, 但 6 的前面不能是 10, 也有 $4! - 3! = 18$ 种(6 前面是 10 的排法有 3! 种).

因此, 使 $S(\tau) = 57$ 的排列有

$$(18 + 18 + 18 + 18) \times 10 = 7205.$$

(北京大学 张筑生 提供)

2000年IMO中国国家集训队选拔考试

(2000-03-31~04-01)

试 题

一、如图1,在△ABC中,AB=AC.线段AB上有一点D,线段AC延长线上有一点E,使得DE=AC.线段DE与△APC的外接圆交于点T,P是线段AT的延长线上的一点.证明:点P满足PD+PE=AT的充分必要条件是点P在△ADE的外接圆上.

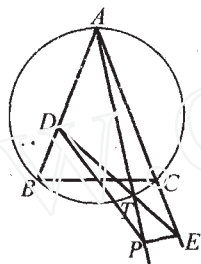


图1

(袁宗沪 供题)

二、给定正整数k,m,n,满足1≤k≤m≤n.试求

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{n+k+i} \cdot \frac{(m+n+i)!}{i! (n-i)! (m+i)!}$$

的值,并写出推算过程.

(许以超 供题)

三、对正整数a≥2,记N_a为具有以下性质的正整数k的个数:k的a进制表示的各位数字的平方和等于k.证明:

(1)N_a为奇数;

(2)对任意给定的正整数M,存在正整数a≥2,使得N_a≥M.

(陈永高 供题)

四、设f(x)是整系数多项式,并且f(x)=1有整数根.约定将所有满足上述条件的f组成的集合记为F.

对于任意给定的整数k>1,求最小的整数m(k)>1,要求能保证存在f∈F,使得

$$f(x) = m(k)$$

恰有k个互不相同的整数根.

(张筑生 供题)

五、(1)设a,b是正实数,数列{x_k}和{y_k}满足x₀=1,y₀=0,且

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - by_k, \\ y_{k+1} = x_k + ay_k, \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots$$

求证:

$$x_k = \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l a^{k-2l} (a^2+b)^l \lambda_{k,l}$$

$$\text{其中, } \lambda_{k,l} = \sum_{m=l}^{[k/2]} C_k^{2m} C_m^l$$

(2)记u_k = ∑_{l=0}^[k/2] λ_{k,l},对任意给定的正整数m,将u_k除以2^m所得的余数记为z_{m,k}.求证: {z_{m,k}}_{k=0,1,2,...}为纯周期数列,并求出最小正周期.

(黄玉民 供题)

六、设n为正整数,记集合

$$M = \{(x,y) | x,y \text{ 是整数}, 1 \leq x,y \leq n\}$$

定义在M上的函数f具有性质:

(a)f(x,y)取值于非负整数;

(b)当1≤x≤n时,有∑_{y=1}ⁿ f(x,y) = n-1;

(c)若f(x₁,y₁)f(x₂,y₂)>0,则

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$$

试计算这样的函数f的个数N(n),并求出N(4)的具体数值.

(姚健钢 供题)

解 答

一、先证充分性.

方法一:如图2,在线段AT上取一点F,使得∠ABF=∠EDP.

因为P在△ADE的外接圆上,所以有∠BAF=∠DAP=∠DEP.又AB=AC=DE,故△ABF≌△EDP.于是, BF=PD, AF=PE.

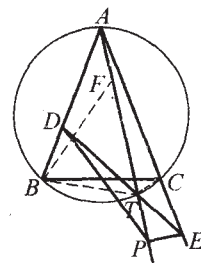


图2

连结BT,由A、B、C、T四点共圆和A、D、E、P四点共圆得∠CBT=∠CAT=∠EDP=∠ABF.在△BFT中,∠FBT=∠FBC+∠CBT=∠FBC

+ $\angle ABF = \angle ABC$, 而 $\angle FTB = \angle ACB$, 又据 $AB = AC$ 可得 $\angle ABC = \angle ACB$. 故 $\angle FBT = \angle FTB$, 即 $\triangle BFT$ 是等腰三角形, $BF = FT$.

从而, $AT = AF + FT = PE + BF = PE + PD$.

方法二: 连结 BT 、 CT . 在 $\triangle BTC$ 和 $\triangle DPE$ 中, 由 A 、 B 、 C 、 T 四点共圆和 A 、 D 、 E 、 P 四点共圆可得 $\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP$, $\angle BCT = \angle BAT = \angle DEP$. 于是, $\triangle BTC \sim \triangle DPE$. 从而, 可设

$$\frac{DP}{BT} = \frac{PE}{CT} = \frac{DE}{BC} = k.$$

对四边形 $ABTC$ 应用托勒密定理, 有

$$AC \cdot BT + AB \cdot CT = BC \cdot AT.$$

将上式两端同乘以 k , 并用前一比例式代入可得

$$AC \cdot DP + AB \cdot PE = DE \cdot AT.$$

注意到 $AB = AC = DE$, 此式即 $PD + PE = AT$.

再证必要性.

方法一: 以 D 、 E 为两个焦点, 长轴长等于 AT 的椭圆与直线 AT 至多有两个交点, 而其中在 DE 的一侧, 即线段 AT 延长线上的交点至多有一个. 由前面充分性的证明知, AT 的延长线与 $\triangle ADE$ 外接圆的交点 Q 在这个椭圆上; 而依题设点 P 同时在 AT 的延长线和椭圆上, 故点 P 与点 Q 重合, 命题得证.

方法二: 如图 3, 在线段 AT 的延长线上任取两点 P_1 、 P_2 , 易见当 $P_1 T < P_2 T$ 时成立

$$P_1 D + P_1 E < P_2 D + P_2 E.$$

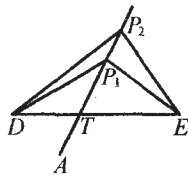


图 3

于是, 在线段 AT 延长线上满足 $PD + PE = AT$ 的点 P 至多有一个. 而由充分性的证明知 $\triangle ADE$ 的外接圆与 AT 延长线的交点即满足上述等式. 故点 P 就在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

二、本题的答案为 0. 下面我们通过构造多项式, 分别运用插值和差分方法来证明这一组合恒等式.

方法一: 作多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x(x+1)\cdots(x+i-1)(x+i+1)\cdots(x+n) - (x-m-1)\cdots(x-m-n).$$

下面恰当选取系数 a_i ($0 \leq i \leq n$), 使得

$$f(x) \equiv 0.$$

注意到 $f(x)$ 是不超过 n 次的多项式, 因此 $f(x) \equiv 0$ 当且仅当 $f(x)$ 有 $n+1$ 个根 $0, -1, -2, \dots, -n$. 于是, 当 $0 \leq i \leq n$ 时应有

$$\begin{aligned} 0 &= f(-i) \\ &= a_i (-i)(-i+1)\cdots(-i+i-1)(-i+i+1)\cdots(-i+n) - (-i-m-1)\cdots(-i-m-n) \\ &= (-1)^i i! (n-i)! a_i - (-1)^n \frac{(m+n+i)!}{(m+i)!}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } a_i = (-1)^{n+i} \frac{(m+n+i)!}{i! (n-i)! (m+i)!}.$$

从而, 我们得到了代数恒等式

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{(m+n+i)!}{i! (n-i)! (m+i)!} x(x+1)\cdots \\ \cdot (x+i-1)(x+i+1)\cdots(x+n) \\ = (x-m-1)\cdots(x-m-n). \end{aligned}$$

特别地, 在上式中取 $x = n+k$, 由 $1 \leq k \leq m \leq n$ 可知 $m+1 \leq n+k \leq m+n$, 故此时等式右端为 0. 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{1}{n+k+i} \frac{(m+n+i)!}{i! (n-i)! (m+i)!} \\ \cdot k(k+1)\cdots(n+k+i-1)(n+k+i) \\ \cdot (n+k+i+1)\cdots(2n+k) = 0. \end{aligned}$$

从中约去与 i 无关的因子

$$(-1)^n k(k+1)\cdots(2n+k)$$

即得所证.

方法二: 设

$$g(x) = \frac{(x+m+1)(x+m+2)\cdots(x+m+n)}{x+n+k}.$$

由 $1 \leq k \leq m \leq n$ 可知, $m+1 \leq n+k \leq m+n$.

因此, $g(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式.

由差分公式可写出 $g(x)$ 在 0 点的 n 次差分等于

$$\begin{aligned} \Delta^n g(0) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i g(i) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(m+n+i)!}{(m+i)!} \cdot \frac{1}{n+k+i}. \end{aligned}$$

我们知道, $n-1$ 次多项式的 n 次差分恒等于 0, 故有

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)! (m+i)!} \cdot \frac{1}{n+k+i} \\ = \frac{\Delta^n g(0)}{n!} = 0. \end{aligned}$$

三、(1) 设 k 的 a 进制表示为 $k = x_n x_{n-1}$

$\cdots x_1 x_0$, 其中 $x_n \neq 0, 0 \leq x_i \leq a-1, i=0, 1, \dots, n$.
依题设有

$$x_n a^n + \cdots + x_1 a + x_0 = x_n^2 + \cdots + x_1^2 + x_0^2.$$

亦即

$$x_n (a^n - x_n) + \cdots + x_1 (a - x_1) = x_0 (x_0 - 1).$$

注意到左端和式中的每一项均为非负数, 而诸 x_i 都是 a 进制表示中的数字, 因此成立不等式估计:

$$\begin{aligned} (a-1)(a-2) &\geq x_0(x_0-1) \\ &\geq x_n(a^n - x_n) \geq a^n - a. \end{aligned}$$

由此得 $n=0$ 或 1.

当 $n=0$ 时, 显然具有所给性质的正整数只有一个, 即 1.

当 $n=1$ 时, $k=x_1 x_0$ 满足等式

$$x_1(a-x_1) = x_0(x_0-1).$$

我们对这样的整数进行分类, 为此记

$$B_a(x_0) = \{x_1 \mid x_1(a-x_1) = x_0(x_0-1), 1 \leq x_1 \leq a-1\}.$$

若 $B_a(x_0)$ 非空, 则 $x_0 \geq 2$. 设 $x_1 \in B_a(x_0)$, 则 $a-x_1 \in B_a(x_0)$.

又 $x_0 \geq 2$ 保证了 $x_0(x_0-1)$ 不是完全平方数, 故 $x_1 \neq a-x_1$. 从而, $|B_a(x_0)| = 0$ 或 2.

$$\text{显然有 } N_a = 1 + \sum_{x_0=2}^{a-1} |B_a(x_0)|,$$

所以 N_a 为奇数.

(2) 仅考虑满足条件的两位数 $k=x_1 x_0$. 我们注意到特殊值 $x_0=uv, x_1=u, a=(v^2+1)u-v$ 可使等式

$$x_1(a-x_1) = x_0(x_0-1)$$

成立.

令 $v_1=2, v_{i+1}=(v_i^2+1)\cdots(v_i^2+1), i=1, 2, \dots, M-1$. 则

$$(v_i^2+1, v_j^2+1) = 1, i, j=1, 2, \dots, M, i \neq j.$$

因此, 由中国剩余定理知, 存在正整数 $a \geq 2$ 满足同余方程组

$$a \equiv -v_i \pmod{(v_i^2+1)}, i=1, 2, \dots, M.$$

于是, 对应地有正整数 u_i , 使得

$$a = (v_i^2+1)u_i - v_i, i=1, 2, \dots, M.$$

易见 $u_i v_i < a$, 且由 v_1, v_2, \dots, v_M 互不相同知 u_1, u_2, \dots, u_M 也互不相同, 从而, 首位数字为 u_i , 末位数字为 $u_i v_i (1 \leq i \leq M)$ 的这 M 个两位数具有题设性质, 亦即 $N_a \geq M$.

四、假定 $f \in F$ 使得 $f(x) = m(k)$ 恰有 k 个互不相同的整数根, 设这些整数根依次为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, 则存在整系数多项式 $g(x)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x) - m(k) \\ = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdots (x - \beta_k) g(x). \end{aligned}$$

又由 $f \in F$ 知存在整数 α , 使得 $f(\alpha) = 1$.

将 α 代入上述分解式并在等式两端取绝对值得

$$m(k) - 1 = |\alpha - \beta_1| \cdot |\alpha - \beta_2| \cdots |\alpha - \beta_k| \cdot |g(\alpha)|.$$

依题设, $\alpha - \beta_1, \alpha - \beta_2, \dots, \alpha - \beta_k$ 是互不相同的整数, 又 $m(k) > 1$, 所以它们均非零. 为保证 $m(k)$ 确为最小, 显然应有 $|g(\alpha)| = 1$, 而 $\alpha - \beta_1, \alpha - \beta_2, \dots, \alpha - \beta_k$ 取绝对值最小的 k 个非零整数, 亦即从 $\pm 1, \pm 2, \dots$ 中顺次选取.

下面对 k 分情况讨论求出 $m(k)$ 的具体值.

当 k 是偶数时, $\alpha - \beta_1, \alpha - \beta_2, \dots, \alpha - \beta_k$ 应取 $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k}{2}$, 其中有 $\frac{k}{2}$ 个负数, 考虑最初的分解式可知 $g(\alpha)$ 必等于 $(-1)^{\frac{k}{2}+1}$. 从而,

$$m(k) = \left(\left(\frac{k}{2} \right)! \right)^2 + 1.$$

相应的 f 可取

$$f(x) = (-1)^{\frac{k}{2}+1} \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} (x^2 - i^2) + \left(\left(\frac{k}{2} \right)! \right)^2 + 1.$$

类似地, 当 k 为奇数时, $\alpha - \beta_1, \alpha - \beta_2, \dots, \alpha - \beta_k$ 应取 $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}$, $g(\alpha)$ 等于 $(-1)^{\frac{k-1}{2}+1}$. 从而,

$$m(k) = \left(\frac{k-1}{2} \right)! \left(\frac{k+1}{2} \right)! + 1.$$

相应的 f 可取

$$\begin{aligned} f(x) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (x^2 - i^2) \left(x + \frac{k+1}{2} \right) \\ + \left(\frac{k-1}{2} \right)! \left(\frac{k+1}{2} \right)! + 1. \end{aligned}$$

五、(1) 我们分别利用三角替换和线性递推关系的特征方程给出两种证法.

方法一: 由于

$$\begin{aligned} x_{k+1} + i\sqrt{b}y_{k+1} \\ = (a + i\sqrt{b})x_k + (ia\sqrt{b} - b)y_k \\ = (a + i\sqrt{b})x_k + i\sqrt{b}(a + i\sqrt{b})y_k \end{aligned}$$

$$= (x_k + i\sqrt{b}y_k)(a + i\sqrt{b}),$$

又 $x_0 = 1, y_0 = 0$, 所以

$$x_k + i\sqrt{b}y_k = (a + i\sqrt{b})^k.$$

同理可得 $x_k - i\sqrt{b}y_k = (a - i\sqrt{b})^k$. 从而,

$$x_k = \frac{1}{2}[(a + i\sqrt{b})^k + (a - i\sqrt{b})^k].$$

取 $\theta \in [0, \pi]$ 使得

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b}}, \sin \theta = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2 + b}}. \text{ 则}$$

$$x_k = (\sqrt{a^2 + b})^k \cos k\theta.$$

由于 $\cos k\theta + i\sin k\theta = (\cos \theta + i\sin \theta)^k$, 所以

$$\begin{aligned} \cos k\theta &= \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} (\cos \theta)^{2m} (\sin \theta)^{2m} (\cos \theta)^{k-2m} \\ &= \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} (\cos \theta)^{k-2m} (\cos^2 \theta - 1)^m \\ &= \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} (\cos \theta)^{k-2m} \sum_{l=0}^m C_m^l (-1)^l (\cos^2 \theta)^{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l (\cos \theta)^{k-2l} \sum_{m=l}^{[k/2]} C_k^{2m} C_m^l \\ &= \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l (\cos \theta)^{k-2l} \lambda_{k,l}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} x_k &= (\sqrt{a^2 + b})^k \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b}} \right)^{k-2l} \lambda_{k,l} \\ &= \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l a^{k-2l} (a^2 + b)^l \lambda_{k,l}. \end{aligned}$$

方法二: 前一个递推式即 $y_k = \frac{1}{b}(ax_k - x_{k+1})$,

代入后一个递推式得

$$\frac{1}{b}(ax_{k+1} - x_{k+2}) = x_k + \frac{a}{b}(ax_k - x_{k+1}).$$

化简得

$$x_{k+2} = 2ax_{k+1} - (a^2 + b)x_k.$$

这个线性递推关系的特征方程是

$$t^2 - 2at + (a^2 + b) = 0,$$

它有两个不同的根 $a \pm i\sqrt{b}$. 再结合初值 $x_0 = 1$,

$x_1 = ax_0 - by_0 = a$, 利用待定系数法便可求出

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{2}[(a + i\sqrt{b})^k + (a - i\sqrt{b})^k] \\ &= \sum_{s=0}^{[k/2]} (-1)^s C_k^{2s} a^{k-2s} b^s. \end{aligned}$$

下面计算待证式右端中 $a^{k-2s}b^s$ 项的系数.

由于 $(a^2 + b)^l = \sum_{r=0}^l C_l^r a^{2(l-r)} b^r$, 其中对 $a^{k-2s}b^s$

作贡献的仅是 $r = s$ 的那项; 因此, 所求的系数是

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l C_l^s \lambda_{k,l} \\ &= \sum_{l=s}^{[k/2]} (-1)^l C_l^s \sum_{m=l}^{[k/2]} C_k^{2m} C_m^l \\ &= \sum_{l=s}^{[k/2]} \sum_{m=l}^{[k/2]} (-1)^l C_l^s C_k^{2m} C_m^l \\ &= \sum_{m=s}^{[k/2]} C_k^{2m} \sum_{l=s}^m (-1)^l C_l^s C_m^l. \end{aligned}$$

易见 $C_l^s C_m^l = C_m^s C_{m-s}^{l-s}$, 故当 $m > s$ 时有

$$\begin{aligned} &\sum_{l=s}^m (-1)^l C_l^s C_m^l \\ &= (-1)^s C_m^s \sum_{l=s}^m (-1)^{l-s} C_{m-s}^{l-s} \\ &= (-1)^s C_m^s (1-1)^{m-s} = 0. \end{aligned}$$

从而, 所求的系数恰是 $(-1)^s C_k^{2s}$.

(2) 我们给出两种风格不同的解法, 前一种方法中蕴含一些普遍性的结论, 而后一种方法则较为朴素和自然.

方法一: 交换求和顺序可得

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{l=0}^{[k/2]} \lambda_{k,l} = \sum_{l=0}^{[k/2]} \sum_{m=l}^{[k/2]} C_k^{2m} C_m^l \\ &= \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} \sum_{l=0}^{[k/2]} C_m^l = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_k^{2m} 2^m \\ &= \frac{1}{2}[(1 + \sqrt{2})^k + (1 - \sqrt{2})^k]. \end{aligned}$$

令 $v_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k]$, 则 u_k, v_k

均为整数, 且 $u_k + v_k\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^k$. 由于

$$(u_k + v_k\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = u_{k+1} + v_{k+1}\sqrt{2},$$

所以有递推关系

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + 2v_k, \\ v_{k+1} = u_k + v_k. \end{cases}$$

于是, $u_{k+1} \equiv u_k \pmod{2}$.

又 $u_0 = 1$, 所以 u_k 为奇数 ($k = 0, 1, 2, \dots$). 由此

可知 $z_{1,k} = 1, k = 0, 1, 2, \dots$.

对任意非负整数 n 和 m , 由于

$$u_{n+m} + v_{n+m}\sqrt{2} = (u_n + v_n\sqrt{2})(u_m + v_m\sqrt{2}),$$

因此, 成立

$$\begin{cases} u_{n+m} = u_n u_m + 2v_n v_m, \\ v_{n+m} = u_n v_m + u_m v_n. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

特别地,当 $n = m$ 时有

$$\begin{cases} u_{2n} = u_n^2 + 2v_n^2, \\ v_{2n} = 2u_nv_n. \end{cases} \quad (2)$$

显然, $v_0 = 0, v_1 = 1$. 由②用归纳法易知对任何非负整数 $m, v_{2^m} = 2^m t_m$, 其中 t_m 为奇数. 若 $v_n = 2^\lambda k_1, v_m = 2^\mu k_2$, 其中 k_1, k_2 为奇数, λ, μ 为非负整数, 且 $\lambda \neq \mu$, 则由①可得

$$v_{n+m} = 2^\gamma k_3,$$

其中 k_3 为奇数, $\gamma = \min(\lambda, \mu)$. 对任何正整数 n , 存在非负整数 $m_0 < m_1 < \dots < m_r$, 使得

$$n = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_r}.$$

故由以上讨论, 并利用归纳法可得 $v_n = 2^{m_0} k$,

其中 k 为奇数, 亦即成立

$$2^m \mid v_n \Leftrightarrow 2^m \mid n. \quad (3)$$

设 m 为非负整数, 由于 $u_1 = 1$ 以及②、③, 用归纳法易知

$$u_{2^m} \equiv 1 \pmod{2^m}.$$

从而, 对任意非负整数 l , 由①和③可得

$$u_{l+2^m} = u_l u_{2^m} + 2v_l v_{2^m} \equiv u_l \pmod{2^m},$$

即 $\{z_{m,k}\}_{k=0,1,2,\dots}$ 为纯周期数列, 2^m 为其周期. 现求其最小正周期 T_m .

由于 $z_{1,k} = 1, k = 0, 1, 2, \dots$, 所以 $T_1 = 1$. 再由 $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7$ 可知 $T_2 = 4$. 现讨论 $m \geq 3$ 的情况. 显然, $u_4 = 17 \equiv 1 \pmod{2^4}$. 由此及②, 并用归纳法可知

$$u_{2^m-1} \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}, \forall m \geq 3. \quad (4)$$

于是, 对非负整数 l , 由①和③得当 $m \geq 3$ 时, 有

$$u_{l+2^{m-1}} = u_l u_{2^{m-1}} + 2v_l v_{2^{m-1}} \equiv u_l \pmod{2^m},$$

即此时 2^{m-1} 也是 $\{z_{m,k}\}_{k=0,1,2,\dots}$ 的周期.

但可以证明当 $m \geq 4$ 时, 2^{m-2} 不是它的周期. 事实上, 取 l 为奇数, $u_{l+2^{m-2}} = u_l u_{2^{m-2}} + 2v_l v_{2^{m-2}}$, 由④ $u_{2^{m-2}} \equiv 1 \pmod{2^m}$, 再由③知 v_l 为奇数, $2^{m-1} \nmid v_{2^{m-2}}$, 从而

$$u_{l+2^{m-2}} \not\equiv u_l \pmod{2^m}.$$

由于 T_m 必是 2^{m-1} 的因子, 所以当 $m \geq 4$ 时, $T_m = 2^{m-1}$. 当 $m = 3$ 时, 已知 $2^2 = 4$ 是 $\{z_{3,k}\}_{k=0,1,2,\dots}$ 的周期, 并且 $T_2 = 4$, 故必有 $T_3 = 4$.

总之, 答案为

$$T_m = \begin{cases} 2^{m-1}, & m \neq 2, \\ 2^m, & m = 2. \end{cases}$$

方法二: 根据(1)中证得的等式, 当 $a = 1, b = -2$ 时 x_k 的值即为 u_k . 在这里 b 可以取负数是因为前面所作的推导本质上是代数式的运算. 于是由(1)中的方法二知数列 $\{u_k\}$ 满足递推关系

$$u_{k+2} = 2u_{k+1} + u_k,$$

并有通项公式

$$u_k = \frac{1}{2} [(1+\sqrt{2})^k + (1-\sqrt{2})^k] = \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_k^{2l} 2^l.$$

对于固定的 m , 我们考察无穷多个有序数对 $(z_{m,k}, z_{m,k+1}), k = 0, 1, 2, \dots$. 由于每个 $z_{m,k}$ 均取值于 0 至 $2^m - 1$ 之间的有限个整数, 故必存在正整数 $k_1 < k_2$ 使得

$$(z_{m,k_1}, z_{m,k_1+1}) = (z_{m,k_2}, z_{m,k_2+1}).$$

注意到

$$z_{m,k-1} \equiv z_{m,k+1} - 2z_{m,k} \pmod{2^m},$$

因此亦有 $z_{m,k_1-1} = z_{m,k_2-1}$. 依次向前类推, 可得

$$(z_{m,0}, z_{m,1}) = (z_{m,k_2-k_1}, z_{m,k_2-k_1+1}).$$

又数列 $\{z_{m,k}\}$ 满足二阶线性递推关系, 故它是以 $k_2 - k_1$ 为周期的纯周期数列.

为求出数列 $\{z_{m,k}\}$ 的最小正周期 T_m , 我们先证明两个论断.

论断 1 当 $m \geq 2$ 时, $2^{m+1} \mid u_{2^m} - 1$.

事实上,

$$u_{2^m} - 1 = \sum_{i=1}^{2^m-1} \frac{2^m(2^m-1)(2^m-2)\cdots(2^m-2l+1)}{2l \cdot 1 \cdot 2 \cdots (2l-1)} 2^l.$$

这个分式分子中的因式 $2^m - i$ 与分母中的 i ($1 \leq i \leq 2l-1$) 所含的 2 的幂次相同, 故上述和式每一项中所含的 2 的幂次

$$E(l) = m + l - 1 - (l \text{ 中所含的 } 2 \text{ 的幂次}).$$

易见, $E(1) = E(2) = m$. 所以, 前两项分别等于 2^m 乘以一个奇数, 于是, 它们的和是 2^{m+1} 的倍数. 当 $l \geq 4$ 时, 由于 $l \leq 2^{l-2}$, 因此,

$$E(l) \geq m + l - 1 - (l-2) = m + 1.$$

又 $E(3) = m + 2$, 从而后面的每一项都能被 2^{m+1} 整除, 命题得证.

论断 2 当 $m \geq 3$ 时,

$$2^{m+1} \mid u_{2^m+1} - 1, 2^{m+2} \nmid u_{2^m+1} - 1.$$

类似地,

$$u_{2^{m+1}} - 1 = \sum_{i=1}^{2^m-1} \frac{(2^m+1)2^m(2^m-1)\cdots(2^m-2l+2)}{(2l-1)\cdot 2l\cdot 1\cdots(2l-2)} 2^l.$$

这个分式分子中的因式 $2^m - i$ 与分母中的 i ($1 \leq i \leq 2l-2$) 所含的 2 的幂次相同, 而 $2^m + 1$ 与 $2l-1$ 均为奇数, 故上述和式每一项中所含的 2 的幂次

$$F(l) = m + l - 1 - (l \text{ 中所含的 } 2 \text{ 的幂次}).$$

当 $l \geq 6$ 时, 由于 $l \leq 2^{l-3}$, 因此

$$F(l) \geq m + l - 1 - (l-3) = m + 2.$$

而当 $l=3, 5$ 时, 直接计算知 $F(5) > F(3) = m + 2$. 因此, 为考察 $u_{2^{m+1}} - 1$ 对 2^{m+2} 的整除性, 只需看对应于 $l=1, 2, 4$ 的三项. 其中 $C_{2^m+1}^2 2^1 = 2^m(2^m+1)$ 被 2^{m+2} 除的余数是 2^m ;

$$C_{2^m+1}^4 2^2 = 2^m \frac{(2^m+1)(2^m-1)(2^{m-1}-1)}{3}.$$

此分式的分子和分母除以 4 的余数分别为 +1 和 -1, 故该项除以 2^{m+2} 的余数为 -2^m ; 注意到 $F(4) = m + 1$, 因此 $C_{2^m+1}^8 2^4$ 除以 2^{m+2} 的余数为 2^{m+1} . 从而, $u_{2^{m+1}} - 1$ 除以 2^{m+2} 的余数恰为 2^{m+1} . 命题得证.

根据这两个论断, 我们知道当 $m \geq 5$ 时,

$$u_{2^m-1} \equiv u_0 \pmod{2^m}, u_{2^m-1+1} \equiv u_1 \pmod{2^m}.$$

又 $\{z_{m,k}\}$ 满足二阶线性递推关系, 因此 2^{m-1} 是它的一个周期, 于是, T_m 必为 2^{m-1} 的因数. 又

$$u_{2^m-2+1} \not\equiv u_1 \pmod{2^m},$$

所以, 2^{m-2} 不是它的周期. 从而, $T_m = 2^{m-1}$ ($m \geq 5$).

当 $m \leq 4$ 时, 直接计算序列 $\{u_k\}$ 的前几项即可确定出 $T_1 = 1, T_2 = 4, T_3 = 4, T_4 = 8$.

六、我们首先证明如下的具有一般性的引理.

引理 在一个 m 行 n 列的方格表的每个方格中填入一个非负整数, 位于第 i 行第 j 列的方格中所填的数用 a_{ij} 表示, r_i ($1 \leq i \leq m$) 与 s_j ($1 \leq j \leq n$) 是非负整数, 满足 $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n s_j$. 那么, 同时具有如下性质的填数方法存在且惟一:

$$\textcircled{1} \sum_{j=1}^n a_{ij} = r_i \quad (1 \leq i \leq m);$$

$$\textcircled{2} \sum_{i=1}^m a_{ij} = s_j \quad (1 \leq j \leq n);$$

③若 $a_{ij} a_{kl} > 0$, 则 $(k-i)(l-j) \geq 0$.

引理的证明: 我们对 $m+n$ 进行归纳. 当 $m=n=1$ 时, 显然只能有 $a_{11} = r_1 = s_1$. 命题成立.

设命题对行数与列数

之和小于 $m+n$ 的方格表成立, 下面考虑 m 行 n 列方格表的填法.

如图 4, 块 A_1 中的数具有形式 a_{1j} ($j \geq 2$), 块 A_2 中的数具有形式

a_{i1} ($i \geq 2$). 注意到 $(i-1)(1-j) < 0$, 故由条件③知 A_1 或 A_2 中有一个部分内的数全为零.

又 A_1 中各数之和 $+ a_{11} = r_1$, A_2 中各数之和 $+ a_{11} = s_1$, 因此必有 $a_{11} = \min(r_1, s_1)$. 由对称性不妨设 $r_1 \leq s_1$, 这样 A_1 中的各数均为零.

考虑此方格表中后 $n-1$ 行构成的子方格表, 其各行的和依次为 r_2, \dots, r_m , 各列的和依次为 $s_1 - r_1, s_2, \dots, s_n$, 这些数均为非负整数, 且成立

$$r_2 + \dots + r_m = (s_1 - r_1) + s_2 + \dots + s_n.$$

于是, 对此子方格表运用归纳假设即知这部分的填法是惟一的.

第一行各数已经确定, 其中仅有 a_{11} 非零, 不等式 $(i-1)(j-1) \geq 0$ 对任意 a_{ij} 成立. 故整个方格表的填法还满足条件③, 命题得证.

下面我们运用引理来解原题.

集合 M 可以看作一个 n 行 n 列的方格表, 而每个 M 上的函数 f 对应于方格表的一种填数方法. 现在表中各数的列和给定, 且表中所有数之和为 $n(n-1)$, 故由引理, 任取 n 个和为 $n(n-1)$ 的非负整数组作为行和, 便惟一对应一个函数 f . 从而本题的答案为方程组

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = n(n-1)$$

的非负整数解的个数, 即

$$N(n) = C_{n(n-1)+(n-1)}^{n-1} = C_{n^2-1}^{n-1}$$

特别地, $N(4) = C_{15}^3 = 455$.

说明: 本次选拔考试的命题组成员为(以姓氏笔画为序): 王建伟、许以超、张筑生、李成章、李胜宏、陈永高、姚健钢、黄玉民、黄宣国、裘宗沪. 本文由姚健钢根据命题人的解答和集训队同学的答卷整理而成.

	s_1	s_2	\cdots	s_n
r_1	a_{11}	A_1		
r_2	A_2			
\vdots				
r_m				

图 4

2001年中国数学奥林匹克国家集训队选拔考试

(2001-03-31—04-01)

一、平面上给定凸四边形 $ABCD$ 及其内点 E 和 F , 适合

$$AE = BE, CE = DE, \angle AEB = \angle CED;$$

$$AF = DF, BF = CF, \angle AFD = \angle BFC.$$

求证: $\angle AFD + \angle AEB = \pi$.

(许以超 提供)

解: 如图 1, 约定将凸四边形对角线 AC 与 BD 的交点记为 G , 并记 $\angle EAB = \angle ABE = \theta$, $\angle FAD = \angle ADF = \varphi$.

因为 $\triangle AEC$ 可通过绕 E 点的旋转与 $\triangle BDE$ 重合, 所以 $\angle GAE = \angle GBE$, 有 A, B, E, G 四点共圆. 又因为 $\triangle AFC$ 可通过绕 F 点的旋转与 $\triangle BDF$ 重合, 所以 $\angle GAF = \angle GDF$, 有 A, D, F, G 四点共圆. 依据圆内接四边形的等角关系可知

$$\angle EGB = \angle EAB = \theta, \angle FGD = \angle FAD = \varphi,$$

$$\angle EGC = \angle ABE = \theta, \angle FGC = \angle ADF = \varphi.$$

$$\text{又} \because \angle EGB + \angle EGC + \angle FGC + \angle FGD = \pi,$$

$$\therefore 2\theta + 2\varphi = \pi.$$

$$\text{于是, } (\pi - 2\theta) + (\pi - 2\varphi) = \pi,$$

即 $\angle AFD + \angle AEB = \pi$.

二、对给定的正整数 $a, b, b > a > 1$, a 不能整除 b 及给定的正整数数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足对所有正整数 n 有 $b_{n+1} \geq 2b_n$. 是否总存在正整数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得对所有正整数 n , 有 $a_{n+1} - a_n \in \{a, b\}$, 且对所有正整数 m, l (可以相同), 有 $a_m + a_l \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$?

(陈永高 提供)

解: 答案是肯定的. 我们用归纳法构造.

取 a_1 为正整数, 使 $2a_1 \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 > b - a$ (如 $b_{n_0} > b - a + 1$, 取 $a_1 = b_{n_0} - 1$ 即可).

假设已取 a_1, a_2, \dots, a_k 使得

$$a_{i+1} - a_i \in \{a, b\}, a_m + a_l \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

($1 \leq m \leq k, 1 \leq l \leq k$). 考虑

(I) $a_1 + a_k + a, a_2 + a_k + a, \dots, a_k + a_k + a, 2a_k + 2a;$

(II) $a_1 + a_k + b, a_2 + a_k + b, \dots, a_k + a_k + b,$

$2a_k + 2b.$

假设 (I) 中有 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项 b_u , (II) 中有 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项 b_v . 由于

$$2a_k + 2b < 2(a_1 + a_k + a)$$

及 $a_1 + a_k + a \leq b_u, b_v \leq 2a_k + 2b,$

故 $b_u = b_v$.

$$\text{又 } b_u = b_v \leq 2a_k + 2a \leq 2a_k + 2b,$$

从而, 存在 $1 \leq j \leq k - 1$, 使

$$b_v = a_j + a_k + b.$$

情形 1 $b_u = a_i + a_k + a, 1 \leq i \leq k.$

此时, $a_i - a_j = b - a > 0$. 由归纳假设知

$a_i - a_j = ca + db, c, d$ 为非负整数.

这样, $ca + db = b - a$.

因此, $d = 0, b = (c + 1)a$, 与 a 不能整除 b 矛盾.

情形 2 $b_u = 2a_k + 2a.$

此时, $a_k - a_j = b - 2a$. 由 $1 \leq j \leq k$ 及归纳假设知

$a_k - a_j = c'a + d'b, c', d'$ 为非负整数.

这样, $c'a + d'b = b - 2a$.

因此, $d' = 0, b = (c' + 1)a$, 矛盾.

故 (I) 或 (II) 中不含 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项.

由此可取 $a_{k+1} = a_k + a$ 或 $a_k + b$ 使得

$$a_{k+1} + a_i \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, 1 \leq i \leq k + 1.$$

命题得证.

三、给定大于 1 的整数 k , 记 \mathbf{R} 为全体实数组成的集合. 求所有函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 使得对 \mathbf{R} 中的一切 x 和 y , 都有

$$f(x^k + f(y)) = y + (f(x))^k. \quad (1)$$

(黄宣国 提供)

解: 令 $x = 0, t = (f(0))^k$, 由 (1) 有

$$f(f(y)) = y + t. \quad (2)$$

及 $f(f(x^k + f(f(y)))) = f(f(y) + f(x))^k$

$$= f((f(x))^k + f(y)) = y + (f(f(x)))^k$$

$$= y + (x + t)^k. \quad (3)$$

由 (2) 有

$$f(f(x^k + f(f(y)))) = x^k + f(f(y)) + t$$

$$= x^k + y + 2t. \quad (4)$$

由 (3), (4) 有 $x^k + y + 2t = y + (x + t)^k$, 即对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$x^k + 2t = (x + t)^k. \quad (5)$$

$$\text{得到 } t = 0, \text{ 即 } f(0) = 0. \quad (6)$$

由(2)、(6)有
 $f(f(y))=y.$ (7)

由(1)、(7),有
 $f(x+y)=f(x+f(f(y)))$
 $=f((x^{\frac{1}{k}})^k+f(f(y)))$
 $=f(y)+f(x^{\frac{1}{k}})^k.$ (8)

这里当 k 为偶数时,限制 $x \geq 0$.

①当 k 为偶数时,从上式知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的单调递增函数. 现证明:对 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x)=x$.

因为,如果有 $z \in \mathbf{R}, f(z) \neq z$. 当 $z < f(z)$ 时,
 $f(z) \leq f(f(z))=z$, 矛盾; 当 $z > f(z)$ 时,有 $f(z) \geq f(f(z))=z$, 矛盾.

②当 k 为奇数时,在(1)中令 $y=0$,有
 $f(x^k)=(f(x))^k.$
 从而, $(f(x^{\frac{1}{k}}))^k=f(x), x \in \mathbf{R}$ (9)

由(8)、(9)有
 $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}.$ (10)

由(10)知对任意有理数 t ,有
 $f(tx)=tf(x), \forall x \in \mathbf{R}$ (11)

及 $f(-x)=-f(x)$.

由(9)、(10)有
 $f((t+x)^k)=(f(t+x))^k=(f(t)+f(x))^k.$

从而, $f(\sum_{s=0}^k C_k^s t^s x^{k-s})$
 $= \sum_{s=0}^k C_k^s (f(t))^s (f(x))^{k-s}.$

由(10)、(11)及上式知,对任意有理数 t ,有
 $\sum_{s=0}^k C_k^s t^s f(x^{k-s})$

$= \sum_{s=0}^k C_k^s t^s (f(1))^s (f(x))^{k-s}.$ (12)

从而, $f(x^{k-s})=(f(1))^s (f(x))^{k-s}, s \in \{0, 1, \dots, k\}.$ (13)

令 $s=k, x=1$,有
 $f(1)=(f(1))^k.$ (14)

由于 $k > 1$ 为正整数以及(6)和(7),有
 $f(1)=\pm 1.$ (15)

取 $s=k-2$,则 s 为奇数. 由(13)、(15)有
 $f(x^2)=\pm f(x)^2.$ (16)

当上式取正号时,有
 $f(x)=f((\sqrt{x})^2)=(f(\sqrt{x}))^2 > 0.$ (17)

由(10)、(17)知, $f(x)$ 是单调递增函数,再利用(7),有 $f(x)=x$.

当式(16)取负号时,对 $\forall x > 0$ 有
 $f(x)=f((\sqrt{x})^2)=-f(\sqrt{x})^2 < 0.$ (18)

由(10)、(18)知, $f(x)$ 是单调递减函数.

下面证明 $f(x)=-x, \forall x \in \mathbf{R}.$
 如果有 $z \in \mathbf{R}, f(z) \neq -z$.

当 $-z < f(z)$ 时, $f(-z) \geq f(f(z))=z$,

$-f(z) \geq z, f(z) \leq -z$, 矛盾.
 当 $-z > f(z)$ 时, $f(-z) \leq f(f(z))=z$,
 $-f(z) \leq z, f(z) \geq -z$, 也矛盾.

经检验,当 k 是偶数时, $f(x)=x$ 是解; 当 k 是奇数时, $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$ 是解.

四、给定大于3的整数 n , 设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ 满足条件

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}.$$

试求

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{x_{j+2}}{x_{j+1}}\right)}{\left(\prod_{k=1}^n \frac{x_{k+1}x_{k+2}}{x_{k+1}^2+x_kx_{k+2}}\right) \left(\prod_{l=1}^n \frac{x_{l+1}^2+x_lx_{l+2}}{x_lx_{l+1}}\right)}$$

的最小值, 并求出使该式达到最小值的所有满足条件的实数组 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$.

(张筑生 提供)

解: (I) 记 $t_i = \frac{x_{i+1}}{x_i} (> 1), 1 \leq i \leq n+1$. 题中的

式子可写成

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^n t_i\right) \left(\prod_{i=1}^n t_{i+1}\right)}{\left(\prod_{i=1}^n \frac{t_i t_{i+1}}{t_i + t_{i+1}}\right) \left(\prod_{i=1}^n (t_i + t_{i+1})\right)}$$

我们看到

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^n \frac{t_i t_{i+1}}{t_i + t_{i+1}}\right) \left(\prod_{i=1}^n (t_i + t_{i+1})\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n t_i - \prod_{i=1}^n \frac{t_i^2}{t_i + t_{i+1}}\right) \left(\prod_{i=1}^n (t_i + t_{i+1})\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n t_i\right) \left(\prod_{i=1}^n (t_i + t_{i+1})\right) \\ & \quad - \left(\prod_{i=1}^n \frac{t_i^2}{t_i + t_{i+1}}\right) \left(\prod_{i=1}^n (t_i + t_{i+1})\right) \end{aligned}$$

$$\leq \left(\prod_{i=1}^n t_i\right) \left(\prod_{i=1}^n (t_i + t_{i+1})\right) - \left(\prod_{i=1}^n \frac{t_i}{\sqrt{t_i + t_{i+1}}} \sqrt{t_i + t_{i+1}}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^2 + \left(\prod_{i=1}^n t_i\right) \left(\prod_{i=1}^n t_{i+1}\right) - \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^2 \\ &= \left(\prod_{i=1}^n t_i\right) \left(\prod_{i=1}^n t_{i+1}\right). \end{aligned}$$

因此, 对符合条件的实数组 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}$, 题中的式子不小于1.

(II) 上面推演中用到 Cauchy 不等式, 等号成立的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{t_i + t_{i+1}}}{t_i} = d (1 \leq i \leq n) (\text{常数}).$$

$$\frac{1}{\sqrt{t_i + t_{i+1}}}$$

也就是 $\frac{t_{i+1}}{t_i} = d - 1 = c, 1 \leq i \leq n$.



记 $t_1 = b$, 有 $t_j = bc^{j-1}, 1 \leq j \leq n+1$.

相应地有 $\frac{x_{j+1}}{x_j} = t_j = bc^{j-1}, 1 \leq j \leq n+1$.

记 $x_1 = a > 0$, 有

$$x_k = t_{k-1} t_{k-2} \cdots t_1 a = ab^{k-1} c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}, 2 \leq k \leq n+2.$$

$$\because x_2 > x_1, \therefore b = \frac{x_2}{x_1} > 1.$$

$$\text{又} \because t_j = bc^{j-1} > 1, 1 \leq j \leq n+1,$$

$$\therefore c > \sqrt[n]{\frac{1}{b}} (\geq \sqrt[j-1]{\frac{1}{b}}, 1 \leq j \leq n+1).$$

(III) 得到结论:

(i) 对于符合条件的实数组 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$, 题中式子的最小值是 1.

(ii) 能使该式达到最小值的符合条件 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}$ 的实数组 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ 应该是

$$x_1 = a, x_k = ab^{k-1} c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}, 2 \leq k \leq n+2,$$

其中 $a > 0, b > 1, c > \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$.

五、给定正 $\triangle ABC$, D 是 BC 边上任意一点, $\triangle ABD$ 的外心、内心分别为 O_1, I_1 , $\triangle ADC$ 的外心、内心分别为 O_2, I_2 , 直线 $O_1 I_1$ 与 $O_2 I_2$ 相交于 P . 试求: 当点 D 在 BC 边上运动时, 点 P 的轨迹.

(李胜宏 刘裕文 提供)

解法一: 如图 2 作辅助线. 由

$$\angle AO_2 D = 2 \angle C = 120^\circ,$$

$$\angle AI_2 D = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C = 120^\circ,$$

$$\angle B = 60^\circ,$$

知 O_2, I_2 均在 $\odot O_1$

上.

同理, O_1, I_1 均在 $\odot O_2$

上.

显然, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是等圆, $\angle O_1 D O_2 = 60^\circ$.

$$\therefore \angle AI_2 O_2 = 30^\circ = \angle I_1 A I_2,$$

$$\therefore AI_1 \parallel O_2 P, \angle O_1 P O_2 = \angle O_1 I_1 A = 30^\circ.$$

于是, D 是 $\triangle O_1 P O_2$ 的外心.

在 $\triangle O_2 D I_2$ 中, 由

$$\angle DI_2 O_2 = 150^\circ \Rightarrow \angle O_2 D I_2 + \angle DO_2 I_2 = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle O_2 D C = \angle I_2 D C + \angle O_2 D I_2$$

$$= \angle A D I_2 + \angle O_2 D I_2$$

$$= \angle A D O_2 + \angle O_2 D I_2 + \angle O_2 D I_2$$

$$= 30^\circ + 2 \angle O_2 D I_2,$$

于是, 由 $\angle DO_2 P = \angle D P O_2$, 有

$$\begin{aligned} \angle PDC &= 180^\circ - \angle C D O_2 - 2 \angle D O_2 P \\ &= 150^\circ - 2 \angle O_2 D I_2 - 2 \angle D O_2 P = 90^\circ. \end{aligned}$$

有 $\angle PDC = 90^\circ$,

即 $PD \perp BC$, 以及 $AD = \sqrt{3} D O_1 = \sqrt{3} D P$.

现以 BC 边所在的直线为 x 轴, BC 边的中点 O 为坐标原点建立直角坐标系, 且不妨设正 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 点 P 的坐标为 (x, y) . 则在直角 $\triangle AOD$ 中, 有

$$AD^2 - OD^2 = AO^2,$$

$$\text{即 } (\sqrt{3}y)^2 - x^2 = (\sqrt{3})^2,$$

$$y^2 - \frac{x^2}{3} = 1, -1 < x < 1, y < 0.$$

解法二: 如图 3

建立坐标系, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$. 设点 D 的坐标为 $(a, 0)$, 不妨设 $0 \leq a < 1$. 则 O_2, I_1 在 BE 或其延长线上, O_1, I_2 在 CF 或其延长线上. 由于 O_2 在 DC 的垂直平分线上,

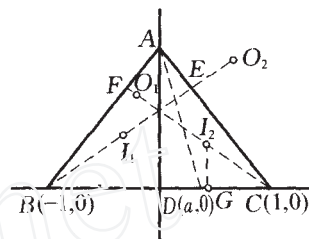


图 3

故 O_2 的横坐标为 $\frac{a+1}{2}$. 由 $\angle C B O_2 = 30^\circ$ 知, O_2 的纵

坐标为 $\frac{3+a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. 因此, 点 O_2 的坐标为

$(\frac{a+1}{2}, \frac{3+a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})$. 点 I_2 的纵坐标为 $\triangle ADC$ 内切

圆的半径长 r_2 . 由 $AD = \sqrt{a^2+3}$ 及面积关系有

$$(2+1-a+\sqrt{a^2+3})r_2 = (1-a)\sqrt{3},$$

$$\text{即 } r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(3-a-\sqrt{a^2+3}).$$

过 I_2 作 $I_2 G \perp BC$ 交 BC 于 G . 则由 $\angle G C I_2 = 30^\circ$ 知

$$CG = r_2 \cot 30^\circ = \sqrt{3} r_2.$$

点 I_2 的横坐标为

$$1 - CG = 1 - \frac{1}{2}(3-a-\sqrt{a^2+3})$$

$$= \frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3}).$$

因此, 点 I_2 的坐标为

$$(\frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3}), \frac{\sqrt{3}}{6}(3-a-\sqrt{a^2+3})).$$

同理, 点 I_1 的坐标为

$$(\frac{1}{2}(a+1-\sqrt{a^2+3}), \frac{\sqrt{3}}{6}(3+a-\sqrt{a^2+3})).$$

点 O_1 的坐标为 $(\frac{a-1}{2}, \frac{3-a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})$.

$O_2 I_2$ 的方程为

$$\frac{y - \frac{a+3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{x - \frac{a+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}},$$

即 $y - \frac{\sqrt{3}(a+3)}{6}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}} \left(x - \frac{a+1}{2} \right). \quad (1)$$

$O_1 I_1$ 的方程为

$$\frac{y - \frac{a-3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{x - \frac{a-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a - \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}},$$

即 $y - \frac{\sqrt{3}(3-a)}{6}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a - \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}} \left(x - \frac{a-1}{2} \right). \quad (2)$$

由(1)和(2),解得 $x = a$.代入(2)有

$$y = \frac{\sqrt{3}(3-a)}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a - \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}} \left(a - \frac{a-1}{2} \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2+3}.$$

因此, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+3}$,

即 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1, -1 < x < 1, y < 0$.

六、记 $F = \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - ax^2 - bx - c|$. 当 a, b, c 取遍所有实数时,求 F 的最小值.

(黄玉民 提供)

解:令

$$f(x) = (x+2)^3 - a(x+2)^2 - b(x+2) - c$$

$$= x^3 + (6-a)x^2 + (12-4a-b)x$$

$$+ (8-4a-2b-c).$$

记 $6-a = a_1, 12-4a-b = b_1, 8-4a-2b-c = c_1$. 问题化为求 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$ 的最小值.

可以证明:

$$1 + |a_1| + |b_1| + |c_1| \leq 7 \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|. \quad (*)$$

((*) 的证明放在最后).

若(*)成立,当 $|a_1| + |b_1| + |c_1| \geq \frac{3}{4}$ 时,有

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \geq \frac{1}{4}. \quad (1)$$

当 $|a_1| + |b_1| + |c_1| < \frac{3}{4}$ 时,由于

$$|f(1)| \geq 1 - |a_1| - |b_1| - |c_1| > \frac{1}{4}, \quad (2)$$

从而,由(1)和(2)得

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \geq \frac{1}{4}, \forall a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

令 $a_1 = 0, b_1 = -\frac{3}{4}, c_1 = 0$,

即 $a = 6, b = -\frac{45}{4}, c = \frac{13}{2}$.

则 $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$.

由 $f(x) - f(1) = (x-1) \left(x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} \right)$

$= (x-1) \left(x + \frac{1}{2} \right)^2$,

从而, $f(x) \leq f(1) = \frac{1}{4}, \forall x \in [-1, 1]$.

同理可证 $f(x) - f(-1) = (x+1) \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$,

即 $f(x) \geq f(-1) = -\frac{1}{4}, \forall x \in [-1, 1]$.

于是,得 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = |f(1)| = \frac{1}{4}$. (4)

由(3)和(4)可知, $\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - ax^2 - bx - c|$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$, 且当 $a = 6, b = -\frac{45}{4}, c = \frac{13}{2}$ 时达到.

式(*)证明.

只要证明以下命题: 设实系数三次多项式 $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ 满足

$$|p(x)| \leq 1, \forall |x| \leq 1, \quad (5)$$

$$\text{则 } |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \leq 7.$$

证明: 由 $\pm p(\pm x)$ 均满足(5), 不妨设 $\alpha, \beta \geq 0$.

(i) 当 $\gamma, \delta \geq 0$ 时, 则

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$$

$$= \alpha + \beta + \gamma + \delta = p(1) \leq 1.$$

(ii) 当 $\gamma \geq 0, \delta \leq 0$ 时, 则

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$$

$$= \alpha + \beta + \gamma - \delta = p(1) - 2p(0) \leq 3.$$

(iii) 当 $\gamma < 0, \delta \geq 0$ 时, 则

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$$

$$= \alpha + \beta - \gamma + \delta = \frac{4}{3}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$- \frac{1}{3}(-\alpha + \beta - \gamma + \delta)$$

$$- \frac{8}{3} \left(\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{2} + \delta \right)$$

$$+ \frac{8}{3} \left(-\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} - \frac{\gamma}{2} + \delta \right)$$

$$= \frac{4}{3} p(1) - \frac{1}{3} p(-1) - \frac{8}{3} p\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{8}{3} p\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\leq 7.$$

(vi) 当 $\gamma < 0, \delta < 0$ 时, 则

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| = \alpha + \beta - \gamma - \delta$$

$$= \frac{5}{3} p(1) - 4p\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3} p\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 7.$$

综上可知式(5)成立.

(浙江大学数学系 李胜宏 整理)

2002年IMO中国国家集训队选拔考试

一、设凸四边形 $ABCD$ 的两组对边所在的直线分别交于 E, F 两点, 两对角线的交点为 P , 过 P 作 $PO \perp EF$ 于 O . 求证: $\angle BOC = \angle AOD$.

解: 如图 1, 只需证明 OP 既是 $\angle AOC$ 的平分线, 也是 $\angle DOB$ 的平分线即可.

不妨设 AC 交 EF 于 Q , 考虑 $\triangle AEC$ 和点 F , 由塞瓦定理可得

$$\frac{EB}{BA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CD}{DE} = 1. \quad (1)$$

再考虑 $\triangle AEC$ 与截线 BPD , 由梅涅劳斯定理有

$$\frac{ED}{DC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AB}{BE} = 1. \quad (2)$$

比较 (1)、(2) 两式可得

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{PC}{QC}. \quad (3)$$

过 P 作 EF 的平行线分别交 OA, OC 于 I, J , 则有

$$\frac{PI}{QO} = \frac{AP}{AQ}, \quad \frac{JP}{QO} = \frac{PC}{QC}. \quad (4)$$

由 (3)、(4) 可得

$$\frac{PI}{QO} = \frac{JP}{QO} \Rightarrow PI = PJ.$$

又 $OP \perp IJ$, 则 OP 平分 $\angle IOJ$,

即 OP 平分 $\angle AOC$.

同理可证: 当 BD 与 EF 相交时, OP 平分 $\angle DOB$; 而当 $BD \parallel EF$ 时, 过 B 作 ED 的平行线交 AC 于 G (如图 2), 则

$$\frac{AG}{AC} = \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF}.$$

故 $GD \parallel CF$,

从而, $BCDG$ 为平行四边形.

于是, P 为 BD 的中点.

因此, OP 平分

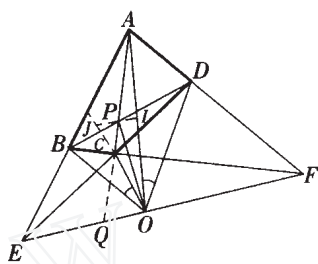


图 1

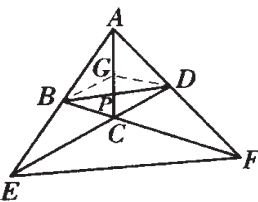


图 2

$\angle DOB$.

二、设 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = \frac{1}{4}(1 + a_{n-1})^2$, $n \geq 2$. 求最小实数 λ , 使得对任意非负实数 $x_1, x_2, \dots, x_{2002}$, 有

$$\sum_{k=1}^{2002} A_k \leq \lambda a_{2002}.$$

其中 $A_k = \frac{x_k - k}{(x_k + \dots + x_{2002} + \frac{k(k-1)}{2} + 1)^2}$, $k \geq 1$.

解: 令 $\delta(k) = \frac{1}{2}k(k-1)$. 首先证明几个引理.

引理 1 对任意实数 $a \geq 0, c > 0, b > 0$, 函数

$$f(x) = \frac{a}{x+b} + \frac{x-c}{(x+b)^2}.$$

当 $x = \frac{(1-a)b+2c}{1+a}$ 时, 取最大值 $\frac{1}{4} \cdot \frac{(1+a)^2}{b+c}$.

证明: 令 $y = \frac{1}{x+b}$, 则

$$f(x) = -(b+c)y^2 + (1+a)y = -(b+c) \left(y - \frac{1}{2} \frac{1+a}{b+c} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{(1+a)^2}{b+c}.$$

于是, 当 $y = \frac{1}{2} \frac{1+a}{b+c}$, 即 $x = \frac{(1-a)b+2c}{1+a}$ 时,

$$f(x)_{\max} = \frac{1}{4} \frac{(1+a)^2}{b+c}.$$

引理 2 设 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = \frac{1}{4}(1 + a_{n-1})^2$, $n \geq 2$.

则 a_n 满足 $0 < a_n < 1$.

引理 3 对任意 $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n A_k \leq \frac{1}{\delta(n+1)+1} a_n$,

且可以取等号.

证明: 由引理 1, 有

$$\frac{x_1 - 1}{(x_1 + \dots + x_n + 1)^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x_2 + \dots + x_n + 2} = \frac{a_1}{x_2 + \dots + x_n + 2}, \quad (1)$$

且当 $x_1 = x_2 + \dots + x_n + 3$ 时, 取最大值

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{x_2 + \dots + x_n + 2} \\ & \frac{a_1}{x_2 + \dots + x_n + 2} + \frac{x_2 - 2}{(x_2 + \dots + x_n + 2)^2} \\ & \leq \frac{1}{4} \frac{(1+a_1)^2}{x_3 + \dots + x_n + 4} = \frac{a_2}{x_3 + \dots + x_n + 4}, \quad (2) \end{aligned}$$

且当 $x_2 = \frac{(1 - a_1)(x_3 + \dots + x_n + 4) + 4}{1 + a_1}$ 时,取最大值

$$\frac{a_2}{x_3 + \dots + x_n + 4} \dots \dots$$

$$\frac{a_{n-2}}{x_{n-1} + x_n + \delta(n-1) + 1} + \frac{x_{n-1} - (n-1)}{(x_{n-1} + x_n + \delta(n-1) + 1)^2}$$

$$\leq \frac{1}{4} \frac{(1 + a_{n-2})^2}{x_n + \delta(n) + 1} = \frac{a_{n-1}}{x_n + \delta(n) + 1}$$

且当 $x_{n-1} = \frac{[(1 - a_{n-2})(x_n + \delta(n-1) + 1) + 2(n-1)]}{1 + a_{n-2}}$

时,取最大值 $\frac{a_{n-1}}{x_n + \delta(n) + 1}$.

$$\frac{a_{n-1}}{x_n + \delta(n) + 1} + \frac{x_n - n}{(x_n + \delta(n) + 1)^2}$$

$$\leq \frac{1}{4} \frac{(1 + a_{n-1})^2}{\delta(n+1) + 1} = \frac{a_n}{\delta(n+1) + 1} \quad \text{①}$$

且当 $x_n = \frac{(1 - a_{n-1})(\delta(n) + 1) + 2n}{1 + a_{n-1}}$ 时,取最大值

$$\frac{a_n}{\delta(n+1) + 1}$$

由 ①, ②, ..., ①相加,得

$$\sum_{k=1}^n A_k \leq \frac{1}{\delta(n+1) + 1} a_n$$

且当 $x_n = \frac{(1 - a_{n-1})(\delta(n) + 1) + 2n}{1 + a_{n-1}}$,

$$x_{n-1} =$$

$$\frac{(1 - a_{n-2})(x_n + \delta(n-1) + 1) + 2(n-1)}{1 + a_{n-2}},$$

.....,

$$x_2 = \frac{(1 - a_1)(x_3 + \dots + x_n + 4) + 4}{1 + a_1},$$

$$x_1 = x_2 + \dots + x_n + 3$$

时,等号成立.

由引理 3,我们得到

$$\lambda = \frac{1}{\delta(2003) + 1} = \frac{1}{2003 \times 1001 + 1}$$

三、17 名球迷计划去韩国观看世界杯足球赛,他们共选定 17 场球赛. 预订门票的情况满足下列条件:

- (i) 每人每场至多预订一张门票;
- (ii) 每两人所预订的门票中,至多有一场相同;
- (iii) 预订了 6 张门票的只有一人.

问这些球迷最多共能预订多少张门票? 说明理由.

解:画一个 17 × 17 的方格表,17 列分别代表 17 场球赛,17 行分别表示 17 人. 如果第 i 人预订了第 j

场的门票,则将方格表中第 i 行第 j 列之交的方格的中心涂成红点. 于是,问题化为表中任何 4 个红点都不是一个边平行于网格线的矩形的 4 个顶点,且表中有一行有 6 个红点的条件下,表中最多能有多少个红点.

不妨设第 1 行的前 6 个方格中心都是红点.

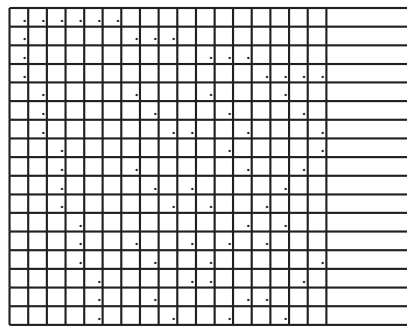
将 17 × 17 方格表分成 17 × 6 和 17 × 11 两部分. 前一部分中第 1 行有 6 个红点,故另外 16 行中每行至多 1 个红点. 所以,这部分中至多有 22 个红点. 第二部分中第 1 行无红点,故实际上是讨论 16 × 11 的方格表中最多有多少个红点.

设第 i 行中共有 x_i 个红点,并将同行的两个红点称为一个“红点对”. 于是,第 i 行产生 $C_{x_i}^2$ 个“红点对”(这里认为 $C_1^2 = C_0^2 = 0$). 由于表中不许存在边平行于网格线的红顶点矩形,故应有

$$C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \dots + C_{x_{16}}^2 \leq C_{11}^2 = 55. \quad \text{①}$$

容易看出,当 x_1, x_2, \dots, x_{16} 尽量平均(至多相差 1)时,上式左端和数最小,从而, $x_1 + x_2 + \dots + x_{16}$ 最大. 因此,当 x_1, x_2, \dots, x_{16} 中有两个 4 和 14 个 3 时, $C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \dots + C_{x_{16}}^2 = 54$, 且 $x_1 + x_2 + \dots + x_{16} = 50$. 易见,若这个表中有 51 个红点,则不可能满足要求. 从而知 17 × 17 的方格表中至多有 72 个红点.

在下列方格表中,共有 71 个红点,第 1 行的前 6 个方格中心是红点,且任何 4 个红点都不是一个边平行于网格线的矩形的 4 个顶点. 这表明所求的红点个数的最大值 ≥ 71 .



这样,关键在于 72 个红点时能否满足题中要求. 设有 72 个红点满足题中要求. 于是,前 6 列中共有 22 个红点,后 11 列中共有 50 个红点. 由式 ①及其后的推导可知 50 个红点在 16 × 11 表格中的分布只能有两种不同情形:

- (1) 2 行各 4 个红点,另 14 行各 3 个红点;
- (2) 3 行各 4 个红点、1 行 2 个红点,另 12 行各 3



个红点.

先看(1). 在 17×17 方格表中, 用红点所在方格的列数为红点编号, 设第1行的6个红点为1、2、3、4、5、6, 第2行的5个红点为1、7、8、9、10. 第3行也有5个红点, 后14行各4个红点.

考察7、8、9、10这4列的红点分布情况. 这时, 后15行中每行4个方格中至多1个红点. 如果某行中有1个红点, 则该行最后7个方格中的红点数为2或3(只有1行为3). 由于这4列中每列的红点与后7列只能组成7个不同的“红点对”, 故每列后15个方格中至多3个红点, 这4列组成的 17×4 的方格表中至多16个红点.

去掉前2行与前10列, 至多去掉 $22 + 16 = 38$ 个红点, 余下的 15×7 的方格表中至少还有34个红点, $34 = 3 \times 4 + 2 \times 11$. 这些红点至少构成

$$3 \times 4 + 11 = 23$$

个不同的“红点对”, $23 > 21 = C_7^2$, 必导致边平行于网格线的红顶点矩形, 矛盾.

再看(2). 设第1行的6个红点为1、2、3、4、5、6, 第2行的5个红点为1、7、8、9、10. 第3、4行各5个红点, 最后一行3个红点, 其余12行各4个红点.

还是考察7、8、9、10四列的红点分布情况. 如果仍是至多16个红点, 则像(1)中那样可导出矛盾. 但是, 由于最后一行只有3个红点, 其中之一在前6个方格中. 如果7、8、9、10四格中没有, 则只能是上述情形; 如果7、8、9、10四格中有1个红点, 则后7格中只有一个红点, 这可导致7、8、9、10四列构成的 17×4 的方格表中共有17个红点, 后7列的 15×7 的方格表中恰有33个红点, 其中最后一行只有1个红点. 去掉最后一行, 余下的 14×7 方格表中共有32个红点. $32 = 3 \times 4 + 2 \times 10$, 形成的“红点对”个数至少为

$$3 \times 4 + 10 = 22 > 21 = C_7^2.$$

矛盾.

综上所述, 17人最多能预订71张门票.

四、(a) 求所有自然数 $n (n \geq 2)$, 使得存在实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 满足

$$\{ |a_i - a_j| \mid 1 \leq i < j \leq n \} = \left\{ 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2} \right\}.$$

(b) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{7, 8, 9, \dots, n\}$. 在 A 中取三个数、 B 中取两个数组成五个元素的集合 $A_i, i = 1, 2, \dots, 20, |A_i \cap A_j| \leq 2, 1 \leq i < j \leq 20$. 求 n 的最小值.

解: (a) a_1, \dots, a_n 有如下性质:

- (i) a_1, \dots, a_n 两两不等;
- (ii) 它们差的绝对值两两不等.

于是, $n = 2, a_1 = 0, a_2 = 1;$

$$n = 3, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 3;$$

$$n = 4, a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 6.$$

下证当 $n \geq 5$ 时, 不存在 a_1, \dots, a_n 适合题设条件.

证法一: 令 $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, b_i = a_{i+1} - a_i, i = 1, 2, \dots, n-1$. 则当 $i < j$ 时,

$$|a_i - a_j| = a_j - a_i = b_i + b_{i+1} + \dots + b_{j-1},$$

$$1 \leq i < j \leq n.$$

显然, $\max_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = |a_1 - a_n| = a_n$. 所以,

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2},$$

即 $a_n - a_1 = b_1 + \dots + b_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$.

注意到 b_1, \dots, b_{n-1} 两两不等, 总和为 $1 + 2 + \dots + (n-1)$, 且 b_1, \dots, b_n 都不等于零, 所以, b_1, \dots, b_{n-1} 为 $1, 2, \dots, n-1$ 的一个排列. 注意到

$$b_i + \dots + b_{j-1}, 1 \leq i < j \leq n$$

为 $1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ 的一个排列, 所以,

$$b_i + b_{i+1} \geq n, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

设 $b_i = 1, 2 \leq i \leq n-2$, 则 $b_{i-1} + b_i \geq n, b_{i+1} + b_i \geq n$. 这证明了 $b_{i-1}, b_{i+1} \geq n-1$. 所以 $b_{i-1} = b_{i+1} = n-1$. 这导出矛盾. 因此, 只有 $b_1 = 1$ 或 $b_{n-1} = 1$, 且 $b_2 = n-1$ 或 $b_{n-2} = n-1$.

设 $b_1 = 1, b_2 = n-1$, 则 $b_1 + b_2 = n$. 所以, $b_i + b_{i+1} > n, i > 1$. 已知存在指标 $i, b_{i+1} = 2$. 于是, $b_i > n-2$. 所以, $b_i = n-1$. 这推出 $b_3 = 2, b_4 = n-2$. 这时, $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$. 导出矛盾. 所以, 当 $n-1 \geq 4$ 时, 即 $n \geq 5$ 时不存在 a_1, \dots, a_n 适合题设条件.

设 $b_{n-1} = 1, b_{n-2} = n-1$. 同上法讨论仍得 $n \geq 5$ 时不存在 a_1, \dots, a_n 适合题设条件.

证法二: 令 $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 易知

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

这时, 必存在某两个下标 $i < j$, 使得 $|a_i - a_j| = a_n - 1$. 所以,

$$a_n - 1 = a_{n-1} - a_1 = a_{n-1} \text{ 或 } a_n - 1 = a_n - a_2,$$

即 $a_2 = 1$.



所以, 出现 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$, $a_{n-1} = a_n - 1$, 或 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$, $a_2 = 1$.

下面分情形讨论:

(i) 设 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$, $a_{n-1} = a_n - 1$.

考虑 $a_n - 2$, 有 $a_n - 2 = a_{n-2}$ 或 $a_n - 2 = a_n - a_2$. 即 $a_2 = 2$. 设 $a_{n-2} = a_n - 2$, 则 $a_{n-1} - a_{n-2} = 1 = a_n - a_{n-1}$. 这导出矛盾. 所以, 只有 $a_2 = 2$.

考虑 $a_n - 3$, 有 $a_n - 3 = a_{n-2}$ 或 $a_n - 3 = a_n - a_3$, 即 $a_3 = 3$. 设 $a_{n-2} = a_n - 3$, 则 $a_{n-1} - a_{n-2} = 2 = a_n - a_0$. 这推出矛盾. 设 $a_3 = 3$, 则 $a_n - a_{n-1} = 1 = a_3 - a_2$, 又推出矛盾. 所以这种情形不出现, 条件为 $a_{n-2} = a_2$, 即 $n = 4$. 故当 $n \geq 5$, 不存在.

(ii) $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$, $a_2 = 1$.

考虑 $a_n - 2$, 有 $a_n - 2 = a_{n-1}$ 或 $a_n - 2 = a_n - a_3$, 即 $a_3 = 2$. 这时 $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$, 推出矛盾. 所以,

$$a_{n-1} = a_n - 2.$$

考虑 $a_n - 3$, 有 $a_n - 3 = a_{n-2}$ 或 $a_n - 3 = a_n - a_3$, 即 $a_3 = 3$. 于是, $a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1}$. 矛盾. 因此, $a_{n-2} = a_n - 3$. 所以, $a_{n-1} - a_{n-2} = 1 = a_2 - a_1$. 这又矛盾. 所以只有 $a_{n-2} = a_2$, 即 $n = 4$. 故当 $n \geq 5$ 时, 不存在.

证法三: 考虑母函数 $x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n}$. 由题设 $(x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n})(x^{-a_1} + x^{-a_2} + \dots + x^{-a_n})$

$$= n - 1 + x^{-\frac{n(n-1)}{2}} + \dots + x^{-1} + 1 + x + \dots + x^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= n - 1 + \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2} + 1} - x^{-\frac{n(n-1)}{2}}}{x - 1}.$$

取 $x = e^{2i\theta} = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$, $x \neq 1$.

由 $e^{-i\alpha} = e^{i\alpha}$, 所以,

$$\begin{aligned} & |e^{2ia_1\theta} + \dots + e^{2ia_n\theta}|^2 \\ &= n - 1 + \frac{e^{2i\theta} e^{in(n-1)\theta} - e^{-in(n-1)\theta}}{e^{2i\theta} - 1} \\ &= n - 1 + \frac{\sin(n^2 - n + 1)\theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

$$\text{取 } (n^2 - n + 1)\theta = \frac{3\pi}{2}, \text{ 则 } \theta = \frac{3\pi}{2(n^2 - n + 1)}.$$

当 $n \geq 5$ 时,

$$0 < \theta < \frac{3\pi}{2(5^2 - 5 + 1)} = \frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{2}.$$

这时, $\sin \theta < \theta$, $\sin(n^2 - n + 1)\theta = -1$. 代入, 得

$$|e^{2ia_1\theta} + \dots + e^{2ia_n\theta}|^2 = n - 1 - \frac{1}{\sin \theta} < n - 1 - \frac{1}{\theta}$$

$$\begin{aligned} &= n - 1 - \frac{2(n^2 - n + 1)}{3\pi} < n - 1 - \frac{2(n^2 - n)}{3\pi} \\ &= (n - 1) \left[1 - \frac{2n}{3\pi} \right] \leq (n - 1) \left[1 - \frac{10}{3\pi} \right] < 0. \end{aligned}$$

这就导出矛盾. 所以, 当 $n \geq 5$ 时, 不存在 a_1, \dots, a_n .

(b) n 的最小值是 16.

设 B 中每个数在所有 A_i 中最多重复出现 k 次, 必有 $k \leq 4$. 若不然, 数 m 出现 k 次, $k > 4$, $3k > 12$, 在 m 出现的所有 A_i 中, 至少有一个 A_i 的数出现 3 次. 不妨设它是 1, 就有集合 $\{1, a_1, a_2, m, b_1\}$, $\{1, a_3, a_4, m, b_2\}$, $\{1, a_5, a_6, m, b_3\}$, 其中 $a_i \in A_i$, $1 \leq i \leq 6$. 为了满足题意, a_i 必须各不相同, 但只能是 2, 3, 4, 5, 6 五个数. 这是不可能的.

$k \leq 4$, 20 个 A_i, B 中数有 40 个, 因此至少是 10 个不同的, $6 + 10 = 16$, 有 $n \geq 16$. 当 $n = 16$ 时, 可作出如下 20 个集合:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 7, 8\} \quad \{1, 2, 4, 12, 14\} \quad \{1, 2, 5, 15, 16\} \\ &\{1, 2, 6, 9, 10\} \quad \{1, 3, 4, 10, 11\} \quad \{1, 3, 5, 13, 14\} \\ &\{1, 3, 6, 12, 15\} \quad \{1, 4, 5, 7, 9\} \quad \{1, 4, 6, 13, 16\} \\ &\{1, 5, 6, 8, 11\} \quad \{2, 3, 4, 13, 15\} \quad \{2, 3, 5, 9, 11\} \\ &\{2, 3, 6, 14, 16\} \quad \{2, 4, 5, 8, 10\} \quad \{2, 4, 6, 7, 11\} \\ &\{2, 5, 6, 12, 13\} \quad \{3, 4, 5, 12, 16\} \quad \{3, 4, 6, 8, 9\} \\ &\{3, 5, 6, 7, 10\} \quad \{4, 5, 6, 14, 15\} \end{aligned}$$

五、设 k 为给定的整数, $f(n)$ 是定义在负整数集上且取值为整数的函数, 满足

$$f(n)f(n+1) = (f(n) + n - k)^2,$$

$$n = -2, -3, -4, \dots$$

求函数 $f(n)$ 的表达式.

解: 引理 存在无穷多个不是形如 $5k \pm 1$ 的素数.

证明: 对任给正整数 n , 考虑

$$N = 5[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)]^2 + 2.$$

由于形如 $5k \pm 1$ 的整数之积仍是形如 $5k \pm 1$ 的数, $N \equiv 2 \pmod{5}$, 故 N 有形如 $5k \pm 2$ 的素因子, 它大于 $2n+1$. 引理得证.

取素数 $p > 10(|k| + 1)$, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{5}$. 先证明

$$f(k-p) = p^2.$$

$$\text{由 } f(k-p)f(k-p+1) = [f(k-p) - p]^2 \text{ 知}$$

$$f(k-p) | p^2.$$

$$\text{因此, } f(k-p) = \pm 1, \pm p, \pm p^2.$$

注意到

$$f(k-p-1)f(k-p) = [f(k-p-1) - p - 1]^2.$$

考虑 $ax = (x - p - 1)^2$,
 即 $x^2 - (2p+2+a)x + (p+1)^2 = 0$.
 它的判别式
 $\Delta(a) = (2p+2+a)^2 - 4(p+1)^2 = a(a+4p+4)$.
 因为 $\Delta(1) = 4p+5 \equiv \pm 2 \pmod{5}$,
 $\Delta(-1) = -(4p+3) < 0$,
 $\Delta(p) = p(5p+4)$ 不是平方数,
 $\Delta(-p) = -p(3p+4) < 0$,
 $\Delta(-p^2) = p^2(p^2 - 4p - 4) \equiv \pm 2 \pmod{5}$,
 由此推出 $\Delta(1), \Delta(-1), \Delta(p), \Delta(-p), \Delta(-p^2)$

均不是平方数. 故
 $f(k-p) = p^2$.
 由 $f(k-p)f(k-p+1) = [f(k-p) - p]^2$ 知
 $f(k-p+1) = (p-1)^2$.
 由 $f(k-p+1)f(k-p+2) = [f(k-p+1) - p + 1]^2$ 知
 $f(k-p+2) = (p-2)^2$.
 如此继续, 得到

$f(k-p+t) = (p-t)^2, 0 \leq t \leq p$ 且 $t < p-k$,
 即 $f(n) = (n-k)^2, k-p \leq n \leq k$ 且 $n < 0$.
 由于 p 可任意大, 有
 $f(n) = (n-k)^2, n \leq k$ 且 $n < 0$.

下面按 k 的大小讨论:
 情形 1 $k \geq -1$. 由以上结论知
 $f(n) = (n-k)^2, n = -1, -2, \dots$
 情形 2 $k = -2$. 由以上结论知
 $f(n) = (n-k)^2, n = -2, -3, \dots$
 由 $f(-2)f(-1) = [f(-2) + 0]^2$ 知 $f(-1)$ 可取

任意整数. 此时

$$f(n) = \begin{cases} a, & n = -1, \\ (n+2)^2, & n = -2, -3, \dots \end{cases}$$
 其中 a 为任意整数.

情形 3 $k = -3$. 此时,
 $f(n) = (n-k)^2, n = -3, -4, \dots$
 又 $f(-3)f(-2) = [f(-3) + 0]^2$,
 $f(-2)f(-1) = [f(-2) + 1]^2$,
 故 $f(-2) = \pm 1$.
 若 $f(-2) = 1$, 则 $f(-1) = 2^2$;
 若 $f(-2) = -1$, 则 $f(-1) = 0$.
 此时, $f(n) = \begin{cases} 0, & n = -1, \\ -1, & n = -2, \\ (n+3)^2, & n \leq -3 \end{cases}$

或 $f(n) = \begin{cases} 2^2, & n = -1, \\ 1, & n = -2, \\ (n+3)^2, & n \leq -3. \end{cases}$

情形 4 $k \leq -4$.
 由 $f(k+1)f(k+2) = [f(k+1) + 1]^2$ ①
 知 $f(k+1) = \pm 1$.
 假设 $f(k+1) = -1$, 由 ① 知 $f(k+2) = 0$.
 又 $f(k+2)f(k+3) = [f(k+2) + 2]^2$,
 则 $0 = 2^2$, 矛盾. 因此, $f(k+1) = 1$.
 由 ① 知 $f(k+2) = 2^2$,
 由 $f(k+2)f(k+3) = [f(k+2) + 2]^2$ 知
 $f(k+3) = 3^2$.

如此下去, 有
 $f(k+t) = t^2, t \leq -k-1$.
 此时, $f(n) = (n-k)^2, n = -1, -2, \dots$

六、设 $f(x_1, x_2, x_3) = -2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3[f x_1^2 \cdot (x_2 + x_3) + x_2^2(x_3 + x_1) + x_3^2(x_1 + x_2)] - 12x_1x_2x_3$.
 对于任意实数 r, s, t , 记

$g(r, s, t) = \max_{t \leq x_3 \leq t+2} |f(r, r+2, x_3) + s|$.
 求函数 $g(r, s, t)$ 的最小值.
 解: 令 $x = x_3 - (r+1)$, 则
 $f(r, r+2, x_3)$
 $= -2[r^3 + (r+2)^3 + (x+r+1)^3]$
 $+ 3[r^2(x+2r+3) + (r+2)^2(x+2r+1)$
 $+ (x+r+1)^2(2r+2)] - 12r(r+2)(x+r+1)$
 $= -2x^3 + 18x$.

令 $a = t - (r+1)$, 则
 $g(r, s, t) = \max_{a \leq x \leq a+2} |-2x^3 + 18x + s|$.
 由于 $\max_{a \leq x \leq a+2} |-2x^3 + 18x + s|$
 $\geq \frac{1}{2} [\max_{a \leq x \leq a+2} (-2x^3 + 18x + s) - \min_{a \leq x \leq a+2} (-2x^3 + 18x + s)]$
 $= \frac{1}{2} [\max_{a \leq x \leq a+2} (-2x^3 + 18x) - \min_{a \leq x \leq a+2} (-2x^3 + 18x)]$,
 所以, $g(r, s, t)$

$\geq \frac{1}{2} [\max_{a \leq x \leq a+2} (-2x^3 + 18x) - \min_{a \leq x \leq a+2} (-2x^3 + 18x)]$. ①
 记 $P(x) = -2x^3 + 18x$. 任取 $x < y$, 则
 $P(x) - P(y) = -2(x-y)[x^2 + xy + y^2 - 9]$.
 显然, 当 $x < y \leq -\sqrt{3}$ 时或当 $\sqrt{3} \leq x < y$ 时, 有
 $x^2 + xy + y^2 - 9 > 0$;
 当 $-\sqrt{3} \leq x < y \leq \sqrt{3}$ 时,
 $x^2 + xy + y^2 - 9 < 0$.
 从而, 当 $x \leq -\sqrt{3}$ 或 $x \geq \sqrt{3}$ 时, 函数 $P(x)$ 严格单调减小; 当 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ 时, $P(x)$ 严格单调增加.



由于 $P(-\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}$, 所以 $P(x) = -12\sqrt{3}$ 等价于 $P(x) = P(-\sqrt{3})$, 即

$$\begin{aligned} & -2(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3-9) \\ & = -2(x+\sqrt{3})^2(x-2\sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

于是, $P(2\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}$.

同理, $P(-2\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$.

由此可知,

在 $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 内, $P(x)$ 有惟一的最小点 $x = -\sqrt{3}$ 和惟一的极大点 $x = \sqrt{3}$. 又 $P(-3) = P(0) = P(3) = 0$, 从而函数 $P(x)$ 的图像如图 3 所示.

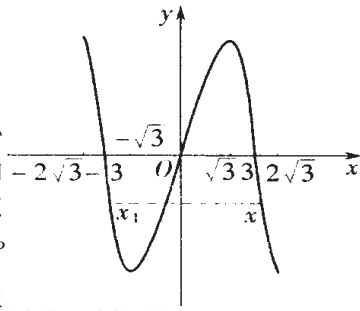


图 3

记 $W(a) = \max_{a \leq x \leq a+2} P(x) - \min_{a \leq x \leq a+2} P(x)$.

当 $a+2 \leq -\sqrt{3}$, 即 $a \leq -2-\sqrt{3}$ 时, 由于 $P(x)$ 在 $[a, a+2]$ 严格单调减小, 所以,

$$\begin{aligned} W(a) & = P(a) - P(a+2) \\ & = -2[a^3 - (a+2)^3] + 18[a - (a+2)] \\ & = 12a^2 + 24a - 20 = 12(a+1)^2 - 32 \\ & \geq 12(\sqrt{3}+1)^2 - 32 = 24\sqrt{3} + 16. \end{aligned}$$

同理, 当 $a \geq \sqrt{3}$ 时, $W(a) \geq 24\sqrt{3} + 16$.

取 $\bar{x} > 0$ 满足

$$P(x) = P(\bar{x})$$

有三个不同实根 $x_1 < x_2 < \bar{x}$ 且 $x_2 - x_1 = 2$. 由于 $P(x) - P(\bar{x}) = -2(x - \bar{x})(x^2 + \bar{x}x + \bar{x}^2 - 9)$, 从而 x_1, x_2 应为方程 $x^2 + \bar{x}x + \bar{x}^2 - 9 = 0$ 的两个根. 又 $x_2 - x_1 = 2$, 所以,

$$\bar{x}^2 - 4(\bar{x}^2 - 9) = 4, \quad \text{即 } 3\bar{x}^2 = 32.$$

$$\text{于是, } \bar{x} = 4\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

$$P(\bar{x}) = -2 \times \frac{4}{3} \sqrt{6} \left[\frac{32}{3} - 9 \right] = -\frac{40\sqrt{6}}{9},$$

$$x_1 = -\frac{\bar{x}}{2} - 1 = -\frac{2\sqrt{6}}{3} - 1,$$

$$x_2 = -\frac{\bar{x}}{2} + 1 = -\frac{2\sqrt{6}}{3} + 1.$$

显然, $-2\sqrt{3} < x_1 < -\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x_2 < 0$,

且 $W(x_1) = P(x_1) - P(-\sqrt{3}) = P(\bar{x}) - P(-\sqrt{3})$

$$= 12\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{6}}{9}.$$

当 $-2-\sqrt{3} < a \leq x_1$ 时, $-\sqrt{3} < a+2 \leq x_1+2 = x_2$. 由于 $P(x)$ 在 $[a, x_1]$ 严格单减, 从而 $P(a) \geq P(x_1) > P(-\sqrt{3})$. 又 $P(x)$ 在 $[-\sqrt{3}, x_2]$ 严格单增, 所以 $P(-\sqrt{3}) < P(a+2) \leq P(x_2) = P(x_1)$. 于是, 可得

$$\begin{aligned} W(a) & = P(a) - P(-\sqrt{3}) \geq P(x_1) - P(-\sqrt{3}) \\ & = W(x_1). \end{aligned}$$

当 $x_1 < a \leq -\sqrt{3}$ 时, 则 $x_2 = x_1+2 < a+2 \leq -2-\sqrt{3} < -\sqrt{3}$. 从而, $P(a+2) > P(x_2) = P(x_1) > P(a)$.

于是可得

$$\begin{aligned} W(a) & = P(a+2) - P(-\sqrt{3}) \\ & \geq P(x_1) - P(-\sqrt{3}) = W(x_1). \end{aligned}$$

由此可得当 $-2-\sqrt{3} < a \leq -\sqrt{3}$ 时, $W(a) \geq W(x_1)$. 由 $P(x)$ 的图像关于原点的对称性可证当 $\sqrt{3} - 2 < a \leq \sqrt{3}$ 时, $W(a) \geq W(-x_2) = W(x_1)$.

当 $-\sqrt{3} < a \leq \sqrt{3}-2$ 时, 则 $-\sqrt{3} < a < a+2 \leq \sqrt{3}$.

由于 $P(x)$ 单增, 所以

$$\begin{aligned} W(a) & = P(a+2) - P(a) = -12a^2 - 24a + 20 \\ & = -12(a+1)^2 + 32 \geq -12(1-\sqrt{3})^2 + 32 \\ & = 24\sqrt{3} - 16. \end{aligned}$$

显然, $24\sqrt{3} + 16 > 12\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{6}}{9}$, $24\sqrt{3} - 16 \geq 12\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{6}}{9}$. 于是,

$$\min_{a \in \mathbb{R}} W(a) = W(x_1) = 12\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{6}}{9}.$$

由 (1) 可知 $g(r, s, t) \geq \frac{1}{2} W(x_1) = 6\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{6}}{9}$.

由以上证明可知任取实数 r ,

$$t = x_1 + (r+1) = -\frac{2\sqrt{6}}{3} - 1 + (r+1),$$

$$s = -\frac{1}{2} \left[\max_{x_1 \leq x \leq x_1+2} P(x) + \min_{x_1 \leq x \leq x_1+2} P(x) \right],$$

易知 $g(r, s, t) = \frac{1}{2} W(x_1) = 6\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{6}}{9}$.

于是, $\min_{r, s, t \in \mathbb{R}} g(r, s, t) = 6\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{6}}{9}$.

(李胜宏 提供)

2003年IMO中国国家集训队选拔考试

一、在锐角 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle A$ 的内角平分线, 点 D 在边 BC 上, 过点 D 分别作 $DE \perp AC$ 、 $DF \perp AB$, 垂足分别为 E 、 F , 连结 BE 、 CF , 它们相交于点 H , $\triangle AFH$ 的外接圆交 BE 于点 G . 求证: 以线段 BG 、 GE 、 BF 组成的三角形是直角三角形.

二、设 $A \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 29\}$, 满足: 对任何整数 k 及 A 中任意数 a, b (a, b 可以相同), $a + b + 30k$ 均不是两个相邻整数之积. 试定出所有元素个数最多的 A .

三、设 $A \subseteq \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$, A 是有限集. 对任意的 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in A$, 定义:

$$\gamma(\alpha, \beta) = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|),$$

$$D(A) = \{\gamma(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A, \beta \in A\}.$$

试证: $|D(A)| \geq |A|$.

四、求所有正整数集上到实数集的函数 f , 使得

(1) 对任意 $n \geq 1, f(n+1) \geq f(n)$;

(2) 对任意 $m, n, (m, n) = 1$, 有

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

五、设 $A = \{1, 2, \dots, 2002\}$, $M = \{1001, 2003, 3005\}$. 对 A 的任一非空子集 B , 当 B 中任意两数之和不属于 M 时, 称 B 为 M -自由集. 如果 $A = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 且 A_1, A_2 均为 M -自由集, 那么, 称有序对 (A_1, A_2) 为 A 的一个 M -划分. 试求 A 的所有 M -划分的个数.

六、设实数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_0 = 0, x_2 = \sqrt[3]{2}x_1, x_3$ 是正整数, 且 $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}x_n + \sqrt[3]{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}, n \geq 2$. 问: 这类数列中最少有多少个整数项?

参考答案

一、如图 1, 过点 D 作 $DG' \perp BE$, 垂足为 G' . 由勾股定理知 $BG'^2 - G'E^2 = BD^2 - DE^2 = BD^2 - DF^2 = BF^2$. 所以, 线段 BG' 、 $G'E$ 、 BF 组成的三角形是以 BG' 为斜边的直角三角形.

下面证明 G' 即为 G , 即只须证 A, F, G', H 四点

共圆.

如图 1, 连结 EF , 则 AD 垂直平分 EF . 设 AD 交 EF 于点 Q , 作 $EP \perp BC$, 垂足为 P , 连结 PQ 并延长交 AB 于点 R , 连结 RE .

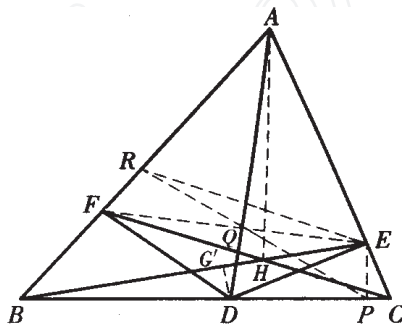


图 1

因为 Q, D, P, E 四点共圆, 所以,

$$\angle QPD = \angle QED.$$

又 A, F, D, E 四点共圆, 所以,

$$\angle QED = \angle FAD.$$

于是, A, R, D, P 四点共圆.

又 $\angle RAQ = \angle DAC, \angle ARQ = \angle ADC$, 于是,

$$\triangle ARQ \sim \triangle ADC, \frac{AR}{AQ} = \frac{AD}{AC}.$$

从而, $AR \cdot AC = AQ \cdot AD = AF^2 = AF \cdot AE$, 即

$$\frac{AR}{AF} = \frac{AE}{AC}.$$

所以, $RE \parallel FC, \angle AFC = \angle ARE$.

因为 A, R, D, P 四点共圆, G', D, P, E 四点共圆, 则 $BG' \cdot BE = BD \cdot BP = BR \cdot BA$. 故 A, R, G', E 四点共圆. 所以,

$$\angle AG'E = \angle ARE = \angle AFC.$$

因此, A, F, G', H 四点共圆.

二、所求 A 为 $\{3l+2 \mid 0 \leq l \leq 9\}$.

设 A 满足题中条件且 $|A|$ 最大.

因为两个相邻整数之积被 30 除, 余数为 0, 2, 6, 12, 20, 26. 则对任意 $a \in A$, 有

$$2a \not\equiv 0, 2, 6, 12, 20, 26 \pmod{30},$$

即 $a \not\equiv 0, 1, 3, 6, 10, 13, 15, 16, 18, 21, 25, 28 \pmod{30}$.

因此, $A \subseteq \{2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 20,$

22, 23, 24, 26, 27, 29}.

后一集合可分拆成下列 10 个子集的并, 其中每一个子集至多包含 A 中一个元素:

{2, 4}, {5, 7}, {8, 12}, {11, 9}, {14, 22}, {17, 19}, {20}, {23, 27}, {26, 24}, {29}.

故 $|A| \leq 10$.

若 $|A| = 10$, 则每个子集恰好包含 A 中一个元素, 因此, $20 \in A, 29 \in A$.

由 $20 \in A$ 知 $12 \notin A, 22 \notin A$, 从而, $8 \in A, 14 \in A$. 这样, $4 \notin A, 24 \notin A$, 因此, $2 \in A, 26 \in A$.

由 $29 \in A$ 知 $7 \notin A, 27 \notin A$, 从而, $5 \in A, 23 \in A$. 这样, $9 \notin A, 19 \notin A$, 因此, $11 \in A, 17 \in A$.

综上有 $A = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$, 此 A 确实满足要求.

三、对 n 和集 A 的元素个数用归纳法.

如果 A 恰有一个元素, 则 $D(A)$ 仅包含一个零向量. 结论成立.

如果 $n = 1$, 设 $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_m\}$, 则

$$\{0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_m - a_1\} \subseteq D(A).$$

因此, $|D(A)| \geq |A|$.

假定 $|A| > 1$ 和 $n > 1$, 定义 $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \mid \text{存在 } x_n \text{ 使得 } (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in A\}$.

由归纳假设 $|D(B)| \geq |B|$.

对每一个 $b \in B$, 令 $A_b = \{x_n \mid (b, x_n) \in A\}$, $a_b = \max\{x \mid x \in A_b\}$, $C = A \setminus \{(b, a_b) \mid b \in B\}$. 则

$$|C| = |A| - |B|.$$

因为 $|C| < |A|$, 由归纳假设 $|D(C)| \geq |C|$.

另一方面, $D(A) = \bigcup_{D \in D(B)} \{(D, |a - a'|) \mid d(b, b') = D, \text{ 且 } a \in A_b, a' \in A_{b'}\}$.

类似地, 再令 $C_b = A_b \setminus \{a_b\}$, 有

$D(C) = \bigcup_{D \in D(B)} \{(D, |c - c'|) \mid d(b, b') = D, \text{ 且 } c \in C_b, c' \in C_{b'}\}$.

注意到, 对每一对 $b, b' \in B$, 最大差 $|a - a'|$ ($a \in A_b, a' \in A_{b'}$) 一定是 $a = a_b$ 或 $a' = a_{b'}$. 于是, 这个最大差不出现在 $\{|c - c'| \mid c \in C_b, c' \in C_{b'}\}$ 中.

因此, 对任何的 $D \in D(B)$, 集合

$$\{|c - c'| \mid d(b, b') = D \text{ 且 } c \in C_b \text{ 和 } c' \in C_{b'}\}$$

并不包含集合

$$\{|a - a'| \mid d(b, b') = D \text{ 且 } a \in A_b \text{ 和 } a' \in A_{b'}\}$$

中的最大元, 前者是后者的真子集.

由此结论可知

$$|D(C)| \leq \sum_{D \in D(B)} (|\{a - a' \mid d(b, b') = D \text{ 且 } a \in A_b \text{ 和 } a' \in A_{b'}\}| - 1) \leq |D(A)| - |D(B)|.$$

故 $|D(A)| \geq |D(B)| + |D(C)| \geq |B| + |C| = |A|$.

四、显然 $f = 0$ 是问题的解.

设 $f \neq 0$, 则 $f(1) \neq 0$. 否则, 对任意正整数 n 有 $f(n) = f(1)f(n) = 0$, 矛盾. 于是得 $f(1) = 1$.

由 (1) 可知 $f(2) \geq 1$. 下面分两种情况讨论:

(i) $f(2) = 1$, 则可证

$$f(n) = 1 \quad (\forall n). \tag{1}$$

事实上, 由 (2) 知

$$f(6) = f(2)f(3) = f(3).$$

记 $f(3) = a$, 则 $a \geq 1$.

由于 $f(3) = f(6) = a$, 利用 (1) 可知 $f(4) = f(5) = a$. 利用 (2) 知, 对任意奇数 p 有 $f(2p) = f(2)f(p) = f(p)$.

再由此及 (1) 可证

$$f(n) = a \quad (\forall n \geq 3). \tag{2}$$

事实上,

$$a = f(3) = f(6) = f(5) = f(10) = f(9) = f(18) = f(17) = f(34) = f(33) = \dots$$

由式 (2) 和 (2) 得 $a = 1$, 即 $f = 1$.

故式 (1) 成立.

(ii) $f(2) > 1$. 设 $f(2) = 2^a$, 其中 $a > 0$.

令 $g(x) = f^{\frac{1}{a}}(x)$, 则 $g(x)$ 满足 (1)、(2), 且 $g(1) = 1, g(2) = 2$.

设 $k \geq 2$, 则由 (1) 得

$$2g(2^{k-1} - 1) = g(2)g(2^{k-1} - 1) = g(2^k - 2) \leq g(2^k) \leq g(2^k + 2) = g(2)g(2^{k-1} + 1) = 2g(2^{k-1} + 1);$$

若 $k \geq 3$, 则

$$2^2 g(2^{k-2} - 1) = 2g(2^{k-1} - 2) \leq g(2^k) \leq 2g(2^{k-1} + 2) = 2^2 g(2^{k-2} + 1).$$

依此类推, 用归纳法得

$$2^{k-1} \leq g(2^k) \leq 2^{k-1} g(3) \quad (\forall k \geq 2). \tag{3}$$

同样, 对任意 $m \geq 3, k \geq 2$ 有

$$g^{k-1}(m) g(m-1) \leq g(m^k) \leq g^{k-1}(m) g(m+1). \tag{4}$$

显然, 当 $k = 1$ 时, (3)、(4) 也成立.

任取 $m \geq 3, k \geq 1$, 有 $s \geq 1$, 使得

$$2^s \leq m^k < 2^{s+1}.$$

于是, 有 $s \leq k \log_2 m < s + 1$,

即 $k \log_2 m - 1 < s \leq k \log_2 m. \tag{5}$



由(1)可知

$$g(2^s) \leq g(m^k) \leq g(2^{s+1}).$$

再由③、④得

$$\begin{cases} 2^{s-1} \leq g^{k-1}(m) g(m+1), \\ g^{k-1}(m) g(m-1) \leq 2^{s-1} g(3), \end{cases}$$

$$\text{即 } \frac{2^{s-1}}{g(m+1)} \leq g^{k-1}(m) \leq \frac{2^{s-1} g(3)}{g(m-1)}.$$

$$\text{所以, } \frac{g(m)}{g(m+1)} 2^{s-1} \leq g^k(m) \leq \frac{g(m) g(3)}{g(m-1)} 2^{s-1}.$$

由⑤得

$$\frac{g(m)}{4g(m+1)} 2^{k \log_2 m} \leq g^k(m) \leq \frac{g(m) g(3)}{2g(m-1)} 2^{k \log_2 m}.$$

$$\text{故 } \frac{k \sqrt[k]{\frac{g(m)}{4g(m+1)}}}{2} 2^{\log_2 m} \leq g(m) \leq \frac{k \sqrt[k]{\frac{g(m) g(3)}{2g(m-1)}}}{2} 2^{\log_2 m},$$

$$\text{即 } \frac{k \sqrt[k]{\frac{g(m)}{4g(m+1)}}}{2} m \leq g(m) \leq \frac{k \sqrt[k]{\frac{g(m) g(3)}{2g(m-1)}}}{2} m.$$

令 $k \rightarrow +\infty$ 得 $g(m) = m$, 则 $f(m) = m^a$.

综上得 $f=0$ 或 $f(n) = n^a (\forall n)$, 其中 $a (a \geq 0)$ 为常数.

五、对 $m, n \in A$, 若 $m+n=1\ 001$ 或 $2\ 003$ 或 $3\ 005$, 则称 m 与 n “有关”.

易知与 1 有关的数仅有 1 000 和 2 002, 与 1 000 和 2 002 有关的都是 1 和 1 003, 与 1 003 有关的为 1 000 和 2 002.

所以, 1, 1 003, 1 000, 2 002 必须分别为两组

$$\{1, 1\ 003\}, \{1\ 000, 2\ 002\}.$$

同理可划分其他各组

$$\{2, 1\ 004\}, \{999, 2\ 001\};$$

$$\{3, 1\ 005\}, \{998, 2\ 000\};$$

.....

$$\{500, 1\ 502\}, \{501, 1\ 503\};$$

$$\{1\ 001\}, \{1\ 002\}.$$

这样 A 中的 2 002 个数被划分成 501 对, 共 1 002 组.

由于任意数与且只与对应的另一组有关, 所以, 若一对中一组在 A_1 中, 另一组必在 A_2 中. 反之亦然, 且 A_1 与 A_2 中不再有有关的数. 故 A 的 M -划分的个数为 2^{501} .

六、设 $n \geq 2$, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt[3]{2} x_n - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} x_n - \sqrt[3]{2} x_n + \sqrt[3]{4} x_{n-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-2} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} x_n + \frac{\sqrt[3]{4}}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-2} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \left[x_n - \sqrt[3]{2} x_{n-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-2} \right]. \end{aligned}$$

由于 $x_2 - \sqrt[3]{2} x_1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_0 = 0$, 所以,

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{2} x_n + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} x_{n-1} \quad (\forall n \geq 1). \quad \text{①}$$

①的特征方程为 $\lambda^2 = \sqrt[3]{2} \lambda + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 解得

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}}{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} (1 \pm \sqrt{3}).$$

再由 $x_0 = 0$ 可得

$$x_n = A \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right)^n [(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n].$$

$$\text{于是, } x_3 = \frac{A}{4} [(1 + \sqrt{3})^3 - (1 - \sqrt{3})^3] = 3\sqrt{3}A.$$

$$\text{故 } A = \frac{x_3}{3\sqrt{3}}.$$

由此可得

$$x_n = \frac{x_3}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right)^n [(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n]. \quad \text{②}$$

记 $a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} [(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n]$. 显然, $\{a_n\}$

为偶数列, 且由 x_3 为正整数和 ②知 x_n 为整数的必要条件是 $3 | n$. 而

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{3}{3\sqrt{3}} [(1 + \sqrt{3})^{3k} - (1 - \sqrt{3})^{3k}] \\ &= \frac{3}{3\sqrt{3}} [(10 + 6\sqrt{3})^k - (10 - 6\sqrt{3})^k], \end{aligned}$$

所以, $3 | a_{3k}$.

令 $b_n = (1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n, n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $\{b_n\}$ 也是偶数列, 且易知对任意非负整数 m, n , 有

$$\begin{cases} a_{n+m} = \frac{1}{2} (a_n b_m + a_m b_n), \\ b_{n+m} = \frac{1}{2} (b_n b_m + 3 a_n a_m). \end{cases} \quad \text{③}$$

在 ③中令 $m = n$, 则有

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n b_n, \\ b_{2n} = \frac{1}{2} (b_n^2 + 3 a_n^2). \end{cases} \quad \text{④}$$

设 $a_n = 2^k p_n, b_n = 2^l q_n$, 其中 n, k_n, l_n 为正整数, p_n, q_n 为奇数.

由于 $a_1 = b_1 = 2$, 即 $k_1 = l_1 = 1$, 由 ④可知

$$k_2 = 2, l_2 = 3;$$

$$k_4 = 5, l_4 = 3;$$

$$k_8 = 8, l_8 = 5.$$

用归纳法可得

$$k_2^m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m = 1, \\ 2^{m-1} + m + 1, & m \geq 2, \end{cases}$$



$$l_2^m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 3, & m=1, \\ 2^{m-1} + 1, & m \geq 2. \end{cases}$$

任取 $m_1 > m_2 \geq 2$, 由 ③ 可得

$$\begin{cases} a_{2^{m_1+2^{m_2}}} = \frac{1}{2} (a_{2^{m_1}} b_{2^{m_2}} + a_{2^{m_2}} b_{2^{m_1}}), \\ b_{2^{m_1+2^{m_2}}} = \frac{1}{2} (b_{2^{m_1}} b_{2^{m_2}} + 3 a_{2^{m_1}} a_{2^{m_2}}). \end{cases}$$

由此易知

$$\begin{cases} k_{2^{m_1+2^{m_2}}} = 2^{m_1-1} + 2^{m_2-1} + m_2 + 1, \\ l_{2^{m_1+2^{m_2}}} = 2^{m_1-1} + 2^{m_2-1} + 1. \end{cases}$$

用归纳法可知, 对于 $m_1 > m_2 > \dots > m_r \geq 2$, 有

$$\begin{cases} k_{2^{m_1+2^{m_2}+\dots+2^{m_r}}} = 2^{m_1-1} + 2^{m_2-1} + \dots + 2^{m_r-1} + m_r + 1, \\ l_{2^{m_1+2^{m_2}+\dots+2^{m_r}}} = 2^{m_1-1} + 2^{m_2-1} + \dots + 2^{m_r-1} + 1, \end{cases}$$

即当 $n = 2^r p$, 其中 $r (r \geq 2)$ 是整数, p 是奇数时, 有

$$\begin{cases} k_n = \frac{n}{2} + r + 1, \\ l_n = \frac{n}{2} + 1. \end{cases} \quad ⑤$$

当 $n = 4m + 1$ 时, 由 ③ 可得

$$a_{4m+1} = \frac{1}{2} (a_{4m} b_1 + a_1 b_{4m}) = a_{4m} + b_{4m}.$$

由 ⑤ 可知 $k_{4m+1} = 2m + 1$.

同理, 由

$$a_{4m+2} = \frac{1}{2} (a_{4m} b_2 + b_{4m} a_2) = 2(a_{4m} + b_{4m}),$$

$$a_{4m+3} = \frac{1}{2} (a_{4m} b_3 + b_{4m} a_3) = 2(5a_{4m} + 3b_{4m})$$

知 $k_{4m+2} = k_{4m+3} = 2m + 2$.

综上所述可知

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,} \\ \frac{n}{2} + 1, & \text{当 } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ 时,} \\ \frac{n}{2} + r + 1, & \text{当 } n = 2^r p, r \geq 2, p \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

当 $3 \mid n$ 时, 由 ② 得

$$x_n = \frac{x_3}{3} 2^{-\frac{2}{3}n} a_n = \frac{x_3}{3} 2^{\frac{2}{3}n} p_n,$$

其中 $3 \mid p_n$.

$$\text{由于 } k_3 = 2 = \frac{2}{3} \times 3, k_6 = 4 = \frac{2}{3} \times 6,$$

$$k_{12} = 9 > \frac{2}{3} \times 12, k_{24} = 16 = \frac{2}{3} \times 24,$$

从而, x_3, x_6, x_{12}, x_{24} 均为整数.

若 $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, 则 $k_n \leq \frac{n}{2} + 1$. 所以,

$$k_n - \frac{2}{3}n \leq 1 - \frac{n}{6} < 0 \quad (\forall n > 6). \quad ⑥$$

若 $n \equiv 0 \pmod{4}$, 由于 $3 \mid n$, 则 $n = 2^r \times 3^k q$, 其中 $r \geq 2, k \geq 1, q$ 不含 3 的因子.

由 ⑤ 可知, $k_n = 2^{r-1} \times 3^k q + r + 1$. 于是,

$$\begin{aligned} k_n - \frac{2}{3}n &= 2^{r-1} \times 3^k q + r + 1 - 2^{r+1} \times 3^{k-1} q \\ &= r + 1 - 2^{r-1} \times 3^{k-1} q \leq r + 1 - 2^{r-1}, \end{aligned}$$

等号当且仅当 $k = q = 1$ 时成立.

当 $r > 3$ 时, $2^{r-1} = (1+1)^{r-1} > r + 1$. 由此可知, 当 $r > 3$ 或 $2 \leq r \leq 3$, 但 k, q 中有一个不为 1 时, 有

$$k_n - \frac{2}{3}n < 0. \quad ⑦$$

由 ⑥ 和 ⑦ 知 $\{x_n\}$ 中仅有 $x_0, x_3, x_6, x_{12}, x_{24}$ 为整数.

综上得数列中最少有 5 个整数项.

欢迎订阅《数学教育学报》

《数学教育学报》由中国教育学会、天津师大主办, 北京师大、华东师大、南京师大等协办, 王梓坤院士任主编, 是中国联合国教科文组织指导刊物, 也是中国数学教育领域最高层次的学术期刊. 设有数学教育概论、中小学数学教育改革、数学课程改革、比较数学教育、调查与实验和展望与争鸣等固定栏目, 还不定期设有密切贴近中小学数学教学实践的教学改革专栏. 《数学教育学报》具有权威性、研究性、先进性与实用性, 是广大中小学数学教师、高校师生及数学教育工作者了解数学教育动态信息, 掌握数学教育理论, 提高数学教学与科研水平的良师益友.

欢迎到全国各地邮局(所)订阅 2004 年《数学教育学报》. 全年订价 32 元, 邮发代号 6-132

联系人 周学智 电话 022-23541034

2004年IMO中国国家集训队选拔考试

1. 设 $\angle XOY = 90^\circ$, P 为 $\angle XOY$ 内的一点, 且 $OP = 1$, $\angle XOP = 30^\circ$, 过点 P 任意作一条直线分别交射线 OX 、 OY 于点 M 、 N . 求 $OM + ON - MN$ 的最大值.

2. 设 u 为任一给定的正整数. 证明: 方程 $n! = u^a - u^b$ 至多有有限组正整数解 (n, a, b) .

3. 设 n_1, n_2, \dots, n_k 是 k ($k \geq 2$) 个正整数, 且 $1 < n_1 < n_2 < \dots < n_k$, 正整数 a, b 满足

$$\frac{a}{b} < \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \left(1 - \frac{1}{n_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)$$

证明: $n_1 n_2 \dots n_k \leq (4a)^{2^k - 1}$.

4. 点 D, E, F 分别在锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上 (均异于端点), 满足 $EF \parallel BC, D_1$ 是边 BC 上一点 (异于 B, D, C), 过 D_1 作 $D_1 E_1 \parallel DE, D_1 F_1 \parallel DF$, 分别交边 AC, AB 于点 E_1, F_1 , 连结 $E_1 F_1$, 再在 BC 上方 (与 A 同侧) 作 $\triangle PBC$, 使得 $\triangle PBC \sim \triangle DEF$, 连结 PD_1 . 求证: $EF, E_1 F_1, PD_1$ 三线共点.

5. 已知 p_1, p_2, \dots, p_{25} 为给定的不超过 2004 的 25 个互不相同的质数, 求最大的正整数 T , 使得任何不大于 T 的正整数, 总可以表成 $(p_1 p_2 \dots p_{25})^{2004}$ 的互不相同的正约数之和 (如 $1, p_1, 1 + p_1^2 + p_1 p_2 + p_3$ 等都是 $(p_1 p_2 \dots p_{25})^{2004}$ 的互不相同的正约数之和).

6. 设 a, b, c 是周长不超过 2π 的三角形的三条边长. 证明: $\sin a, \sin b, \sin c$ 可构成三角形的三条边长.

参考答案

1. 先作一 $\odot O_1$ 过点 P 且与射线 OX, OY 相切 (切点为 A, B), 且点 P 在优弧 AB 上.

分别以射线 OX, OY 为 x 轴、 y 轴建立直角坐标系,

如图 1. 则有 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 设

$O_1(a, a)$, 则有

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 = a^2,$$

即 $a^2 - (\sqrt{3} + 1)a + 1 = 0$.

所以 $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2 - 4 = 2\sqrt{3}$.

故 $a = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt[4]{12}}{2}$ (取较小根).

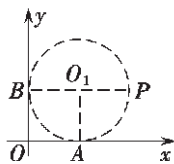


图 1

因为 $30^\circ < 45^\circ$, 且 $\frac{1}{2} > a = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt[4]{12}}{2}$, 所以, 过点 P 的 $\odot O_1$ 的切线与射线 OX, OY 都相交.

如图 2, 设 MN 是过点 P 的 $\odot O_1$ 的切线, M, N 分别在射线 OX, OY 上, 设 $M_1 N_1$ 是过点 P 的任一直线, 且与 $\odot O_1$ 相交, M_1, N_1 分别在射线 OX, OY 上.

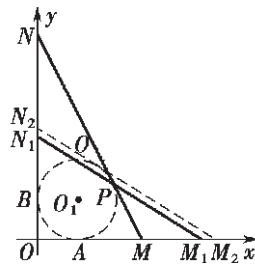


图 2

将 $M_1 N_1$ 朝远离点 O 的方向平移, 直至与 $\odot O_1$ 相切所得直线为 $M_2 N_2$ (切点为 Q), M_2, N_2 分别在射线 OX, OY 上.

由切线长定理有

$$OM_1 + ON_1 - M_1 N_1 < OM_2 + ON_2 - M_2 N_2 = (OB + BN_2) + (OA + AM_2) - (N_2 Q + QM_2) = 2OA.$$

同理, $2OA = OM + ON - MN$.

综上所述, 当 MN 是过点 P 的 $\odot O_1$ 的切线时, $OM + ON - MN$ 取得最大值, 且最大值为 $2OA = 2a = \sqrt{3} + 1 - \sqrt[4]{12}$.

2. 先证明一个引理.

引理 设 p 是一个给定的奇质数, $p \nmid u, d$ 是 u 模 p 的阶, 并设 $u^d - 1 = p^v k$, 这里 $v \geq 1, p \nmid k$. 又 m 是正整数, $p \nmid m$. 则对任意整数 t ($t \geq 0$), 有 $u^{dmp^t} = 1 + p^{t+v} k_t$, 其中 $p \nmid k_t$.

引理的证明: 对 t 归纳. 当 $t = 0$ 时, 由 $u^d = 1 + p^v k$ ($p \nmid k$) 及二项式定理知 (注意 $p \nmid m$)

$$u^{md} = (1 + p^v k)^m = 1 + p^v km + p^{2v} k^2 C_m^2 + \dots = 1 + p^v (km + p^v k^2 C_m^2 + \dots) = 1 + p^v k_1,$$

其中 $p \nmid k_1$.

若结论对 t 已成立, 则由二项式定理可知

$$u^{dmp^{t+1}} = (1 + p^{t+v} k_t)^p = 1 + p^{t+1+v} (k_t + C_p^2 p^{v+t-1} k_t^2 + \dots) = 1 + p^{t+1+v} k_{t+1},$$

$p \nmid k_{t+1}$. (注意 p 是奇质数, 故 $p \nmid C_p^2$.) 这就完成了引理的证明.

下面证明原题.

首先, 方程可化为

$$n! = u^r (u^s - 1), \quad r, s \text{ 为正整数.} \tag{1}$$

对引理中取定的奇质数 p , 可设 $n > p$ (否则结论已成立). 设 $p^\alpha \parallel n!$, 则 $\alpha \geq 1$. 由 $p \nmid u$ 及式 ① 知 $p^\alpha \parallel (u^s - 1)$. 特别地 $p \mid (u^s - 1)$.

由于 d 是 u 模 p 的阶, 故 $d \mid s$.

设 $s = dmp^t$, 其中 $t \geq 0, p \nmid m$. 由 $u^s - 1 = p^\alpha M$, $p \nmid M$ 及引理知 $\alpha = t + v$, 即 $t = \alpha - v$. 故

$$u^s - 1 = u^{dmp^{\alpha-v}} - 1. \quad (2)$$

熟知

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] \geq \left[\frac{n}{p} \right] > an, \quad (3)$$

其中 a 是一个仅与 p 有关的正数.

记 $b = u^{d^{\alpha-v}}$. 由于 d, p, u, v 现在均是固定的正整数, 故 b 是大于 1 的正常数. 于是, 由式 ② 得

$$u^s - 1 \geq u^{d^{\alpha-v}} - 1 > b^{p^m} - 1. \quad (4)$$

但当 n 充分大时, 易知

$$b^{p^m} - 1 > n^n - 1. \quad (5)$$

(此即 $b^{p^m} \geq n^n$, 即 $p^m > n \log_b n$.)

因此, 由 ②③④⑤ 知, 当 n 充分大时, 有 $u^s - 1 > n!$, 更有 $u^r (u^s - 1) > n!$.

所以, n 充分大时, 方程 ① 无解. 从而, ① 的正整数解至多有有限组.

注: $p^\alpha \parallel a$ 表示 $p^\alpha \mid a$, 而 $p^{\alpha+1} \nmid a$, 这里 p 是质数, $\alpha \in \mathbb{N}_+$.

3. 先证明一个引理.

引理 若正整数 n_1, n_2, \dots, n_k 及 a, b 满足题设中的不等式, 则必有一个 $r (1 \leq r \leq k)$, 使得

$$n_1 n_2 \cdots n_r \leq (2^{r+1} a)^r.$$

引理的证明: 我们先证明, 存在 $n_i (1 \leq i \leq k)$, 使得 $n_i \leq 2^{i+1} a$.

注意到 $\frac{a}{b} < \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \frac{1}{n_i}) < 1$ 及 a, b 为正整数,

则有 $b \geq a+1$.

若所有的 n_i 均满足 $n_i > 2^{i+1} a$, 易知

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} &\geq \frac{a}{b} \geq \prod_{i=1}^k (1 - \frac{1}{n_i}) > 1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \\ &> 1 - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i+1}} > 1 - \frac{1}{2a}, \end{aligned}$$

即 $1 - \frac{1}{a+1} > 1 - \frac{1}{2a}$.

则 $2a < a+1$. 这是不可能的. 故所证结论成立.

现在设 r 是最小的下标 i , 使得 $n_i \leq 2^{i+1} a$.

由于 $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$, 则

$$n_1 n_2 \cdots n_r \leq n_r^r \leq (2^{r+1} a)^r. \quad (1)$$

下面证明原题. 对 k 用数学归纳法.

对 $k=1$, 我们要从

$$1 - \frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{b} < 1 \quad (2)$$

导出 $n_1 \leq (4a)^{2^{1-1}}$.

这是显然的. 因为式 ② 意味着 $b > a$, 从而 $b \geq a+1$. 故 $1 - \frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$. 得 $n_1 \leq a+1 < 4a$.

假设在 k 换为任意较小的正整数时结论已成立, 现证明在 k 时结论也成立.

设 r 是上述引理所确定的一个正整数, 又设 $1 \leq r \leq k-1$. 由已知条件得

$$\prod_{i=r+1}^k (1 - \frac{1}{n_i}) \leq \frac{A}{B} < \prod_{i=r+1}^{k-1} (1 - \frac{1}{n_i}),$$

这里 $A = a \prod_{i=1}^r n_i, B = b \prod_{i=1}^r (n_i - 1)$.

由归纳假设知

$$\begin{aligned} \prod_{i=r+1}^k n_i &\leq (4a)^{2^{k-r-1}} \\ &= (4a)^{2^{k-r-1}} \left(\prod_{i=1}^r n_i \right)^{2^{k-r-1}}. \end{aligned}$$

故由引理得出

$$\prod_{i=1}^k n_i \leq (4a)^{2^{k-r-1}} \left(\prod_{i=1}^r n_i \right)^{2^{k-r}} \leq (4a)^{2^{k-r-1}} (2^{r+1} a)^{r 2^{k-r}}. \quad (3)$$

注意, 由引理知, 上述不等式在 $r=k$ 时也成立 (无需证明归纳假设的结论).

由 ③ 可见, 为了完成归纳证明, 只须证明

$$4^{2^{k-r-1}} \cdot 2^{r(r+1)2^{k-r}} \leq 4^{2^k-1}$$

及 $a^{2^{k-r-1}} \cdot a^{r 2^{k-r}} \leq a^{2^k-1}$.

利用 $2 + r(r+1) \leq 2^{r+1}$ 及 $1 + r \leq 2^r$ (对 $r \geq 1$), 易知上述两个不等式都成立. 这就完成了归纳证明.

4. 如图 3, 记

$PD_1, D_1 E_1, D_1 F_1$

分别交 EF 于 $D_2,$

E_2, F_2 , 则只须证明

E_1, D_2, F_1 三点共线.

因为 $\triangle E_1 D_1 C$

$\sim \triangle E_1 E_2 E$, 所以,

$$\frac{D_1 E_1}{E_1 E_2} = \frac{D_1 C}{E E_2}.$$

①

因为 $\triangle F_1 F F_2 \sim \triangle F_1 B D_1$, 所以,

$$\frac{F_2 F_1}{F_1 D_1} = \frac{F F_2}{B D_1}. \quad (2)$$

因为 $\triangle PBC$ 和 $\triangle D_1 E_2 F_2$ 都相似于 $\triangle DEF$, 且它们的对应边平行, 所以, $\triangle PBC \sim \triangle D_1 E_2 F_2$, 且对

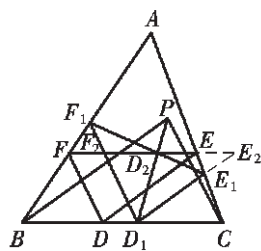


图 3

应边互相平行.

而 PD_1 和 D_1D_2 是这对相似三角形中处于对应位置的线段,所以,

$$\frac{E_2D_2}{D_2F_2} = \frac{BD_1}{D_1C} \quad (3)$$

①×②×③,又因为 $EE_2 = DD_1 = FF_2$ (四边形 DD_1E_2E 和四边形 DD_1F_2F 都是平行四边形),则

$$\frac{D_1E_1}{E_1E_2} \cdot \frac{E_2D_2}{D_2F_2} \cdot \frac{F_2F_1}{F_1D_1} = \frac{D_1C}{EE_2} \cdot \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{FF_2}{EE_2} = \frac{FF_2}{EE_2} = 1.$$

对 $\triangle D_1E_2F_2$,由梅涅劳斯定理的逆定理知 E_1 、 D_2 、 F_1 三点共线.

5. 当 $p_1 > 2$ 时,2 不能表成 $(p_1 p_2 \cdots p_{25})^{2004}$ 的不同正约数之和,此时 $T=1$.

设 $p_1 = 2$,我们证明如下更一般的结论:

如果 p_1, p_2, \dots, p_k 为 k 个互不相同的质数, $p_i < p_{i+1} \leq p_i^{2005} (i = 1, 2, \dots, k), p_1 = 2$,则能表成 $(p_1 p_2 \cdots p_k)^{2004}$ 的不同正约数之和的正整数所成集合为 $\{1, 2, 3, \dots, T_k\}$,其中

$$T_k = \frac{p_1^{2005} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{2005} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{2005} - 1}{p_k - 1}.$$

注意到 $(p_1 p_2 \cdots p_k)^{2004}$ 的所有正约数之和为 T_k . 只要证明,当 $1 \leq n \leq T_k$ 时, n 可表成 $(p_1 p_2 \cdots p_k)^{2004}$ 的不同正约数之和.

当 $k=1$ 时,设 $1 \leq n \leq T_1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2004}$.

由 n 可表成二进制知 n 可表成 2^{2004} 的不同正约数之和.

假设结论对 k 成立,设 $1 \leq n \leq T_{k+1}$. 由 $T_{k+1} =$

$T_k(1 + p_{k+1} + \cdots + p_{k+1}^{2004})$ 知存在 $0 \leq i \leq 2004$,使得

$$T_k(p_{k+1}^{i+1} + p_{k+1}^{i+2} + \cdots + p_{k+1}^{2004}) < n \leq T_k(p_{k+1}^i + p_{k+1}^{i+1} + \cdots + p_{k+1}^{2004}).$$

当 $i=2004$ 时,不等式左边为 0. 于是,

$$1 \leq n - T_k(p_{k+1}^{i+1} + p_{k+1}^{i+2} + \cdots + p_{k+1}^{2004}) \leq T_k p_{k+1}^i.$$

取整数 m_i ,使得

$$0 \leq n - T_k(p_{k+1}^{i+1} + p_{k+1}^{i+2} + \cdots + p_{k+1}^{2004}) - m_i p_{k+1}^i < p_{k+1}^i.$$

所以, $0 \leq m_i \leq T_k$.

将 $n - T_k(p_{k+1}^{i+1} + p_{k+1}^{i+2} + \cdots + p_{k+1}^{2004}) - m_i p_{k+1}^i$ 表

成 p_{k+1} 进制,则

$$n - T_k(p_{k+1}^{i+1} + p_{k+1}^{i+2} + \cdots + p_{k+1}^{2004}) - m_i p_{k+1}^i = m_0 + m_1 p_{k+1} + \cdots + m_{i-1} p_{k+1}^{i-1}.$$

当 $j \leq i-1$ 时,

$$0 \leq m_j \leq p_{k+1} - 1 \leq p_k^{2005} - 1 \leq \frac{p_1^{2005} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{2005} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{2005} - 1}{p_k - 1} = T_k.$$

(这里用到了 $p_{u+1} - 1 \leq p_u^{2005} - 1, p_1 - 1 = 1$.)

令 $m_{i+1} = m_{i+2} = \cdots = m_{2004} = T_k$,则 $n = m_0 + m_1 p_{k+1} + \cdots + m_{2004} p_{k+1}^{2004} (0 \leq m_i \leq T_k, 0 \leq i \leq 2004)$.

由归纳假设知,每一个非零 m_i 均可表成 $(p_1 p_2 \cdots p_k)^{2004}$ 的不同正约数之和. 结论得证.

所以,当 $p_1 > 2$ 时, $T=1$; 当 $p_1 = 2$ 时, $T = \frac{p_1^{2005} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{2005} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_{25}^{2005} - 1}{p_{25} - 1}$.

6. 由题设得 $0 < a, b, c < \pi$. 故

$$\sin a > 0, \sin b > 0, \sin c > 0, |\cos a| < 1, |\cos b| < 1, |\cos c| < 1.$$

不妨设 $\sin a \leq \sin b \leq \sin c$.

若 $a = \frac{\pi}{2}$, 则 $b = c = \frac{\pi}{2}$.

故 $\sin a = \sin b = \sin c = 1$. 结论显然成立.

设 $a \neq \frac{\pi}{2}$.

(1) 当 $a + b + c = 2\pi$ 时,有

$$\sin c = \sin(2\pi - a - b) = -\sin(a + b) \leq \sin a + \cos b + \sin b + \cos a < \sin a + \sin b.$$

(2) 当 $a + b + c < 2\pi$

时,由于 a, b, c 构成三角形的三边,故存在一个三面角使得 a, b, c 分别为其面角. 如图 4 所示.

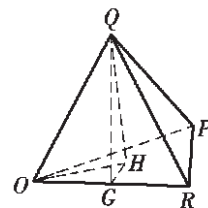


图 4

这里 OR, OP, OQ 不在一平面上, $OQ = OP = OR = 1, \angle QOR = a, \angle QOP = b, \angle POR = c$.

过点 Q 作平面 POQ 的垂线,垂足为 H . 过 H 作 OR 的垂线,垂足为 G . 设 $\angle QOH = \phi, \angle HOR = \theta$, 则

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

由勾股定理得

$$\sin a = QG = \sqrt{QH^2 + GH^2} = \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos^2 \theta} \geq \sin \theta. \quad (1)$$

类似有

$$\sin b = \sqrt{\sin^2(c - \theta) + \sin^2 \phi \cos^2(\theta - c)} \geq |\sin(c - \theta)|. \quad (2)$$

我们断言,①和②中的等号不能同时成立. 若不然,由 $\sin^2 \phi \neq 0$ 得 $\cos \theta = \cos(c - \theta) = 0$. 故

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, c - \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}.$$

这与 $0 < c < \pi$ 矛盾. 因此,

$$\sin a + \sin b > |\sin \theta| + |\sin(c - \theta)| \geq \sin(\theta + c - \theta) = \sin c.$$

(2004 年 IMO 中国国家集训队命题组 提供)

竞赛之窗

2005 年 IMO 中国国家集训队选拔考试

第一天

一、设 $\odot O$ 的内接凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 、 BD 的交点为 P ，过 P 、 B 两点的 $\odot O_1$ 与过 P 、 A 两点的 $\odot O_2$ 相交于两点 P 、 Q ，且 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分别与 $\odot O$ 相交于另一点 E 、 F 。求证：直线 PQ 、 CE 、 DF 共点或者互相平行。（冷岗松 供题）

二、给定正整数 n ($n \geq 2$)，求最大的 λ ，使得：若有 n 个袋子，每一个袋子中都是一些重量为 2 的整数次幂克的小球，且各个袋子中的小球的总重量都相等，则必有某一重量的小球的总个数至少为 λ 。（同一个袋子中可以有相等重量的小球。）（王建伟 供题）

三、 n 是正整数， a_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 为复数，且对集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任一非空子集 I ，均有

$$\left| \prod_{j \in I} (1 + a_j) - 1 \right| \leq \frac{1}{2}.$$

证明： $\sum_{j=1}^n |a_j| \leq 3$. （朱华伟 供题）

第二天

四、设 $a_1, a_2, \dots, a_6; b_1, b_2, \dots, b_6; c_1, c_2, \dots, c_6$ 都是 $1, 2, \dots, 6$ 的排列。求 $\sum_{i=1}^6 a_i b_i c_i$ 的最小值。（熊斌 供题）

五、设 n 是任意给定的正整数， x 是正实数。证明：

$$\sum_{k=1}^n \left(x \left[\frac{k}{x} \right] - (x+1) \left[\frac{k}{x+1} \right] \right) \leq n,$$

其中 $[a]$ 表示不超过实数 a 的最大整数。

（余红兵 供题）

六、设 α 是给定的正实数。求所有的函数 $f: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ ，使得对任意满足条件

$$\alpha m \leq k < (\alpha + 1)m$$

的正整数 k, m ，都有

$$f(k+m) = f(k) + f(m).$$

（陈永高 供题）

参考答案

一、如图 1.

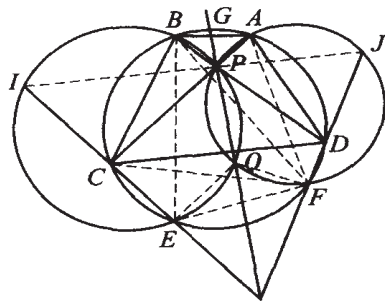


图 1

因为 $\angle PJF = \angle PAF = \angle CAF = \angle CDF$,

所以 $PJ \parallel CD$.

同理, $IP \parallel CD$.

故 I, P, J 三点共线.

又 $\angle EFD = 180^\circ - \angle ECD = 180^\circ - \angle EIJ$,

故 E, F, J, I 四点共圆.

这样,由根轴定理,知四边形 $IEFJ$ 的外接圆、 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 两两的公共弦 IE 、 PQ 、 JF 共点或者互相平行,即直线 PQ 、 CE 、 DF 共点或者互相平行.

二、不妨设最重的小球重量为 1. 先证:

$$\lambda_{\max} \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1.$$

设每个袋子中小球的总重量为 G , 则 $G \geq 1$.

假设任一重量的小球的总个数都小于或等于

$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. 考察这 n 个袋子中所有小球的总重量,得

$$n \leq nG < \left[\frac{n}{2} \right] \cdot (1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots)$$

$$= 2 \left[\frac{n}{2} \right] \leq 2 \frac{n}{2} = n.$$

矛盾.

反之,取充分大的正整数 s ,使得

$$2 - 2^{-s} \geq \frac{2n}{n+1}.$$

由于 $\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \geq \frac{n+1}{2}$,故

$$2 - 2^{-s} \geq \frac{2n}{n+1} \geq \frac{n}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1}.$$

从而, $\left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) (1 + 2^{-1} + \dots + 2^{-s}) \geq n \times 1$.

所以,可在

$$\frac{1}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \frac{1}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \frac{2^{-1}}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \frac{2^{-1}}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \dots + \frac{2^{-1}}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \frac{2^{-s}}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \frac{2^{-s}}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1} + \dots + \frac{2^{-s}}{\left[\frac{n}{2} \right] + 1}$$

中从前至后取出和为 1 的连续若干项,且至少可取 n 次. 所以,

$$\lambda_{\max} \leq \left[\frac{n}{2} \right] + 1.$$

综上所述, $\lambda_{\max} = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$.

三、设 $1 + a_j = r_j e^{i\theta_j}$, $|\theta_j| \leq \pi$, $j = 1, 2, \dots, n$. 则题设条件变为

$$\left| \prod_{j \in I} r_j \cdot e^{i \sum_{j \in I} \theta_j} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

先证如下引理.

引理 设 r, θ 为实数, $r > 0$, $|\theta| \leq \pi$, $|re^{i\theta} - 1| \leq \frac{1}{2}$, 则

$$\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}, |\theta| \leq \frac{\pi}{6}, |re^{i\theta} - 1| \leq |r - 1| +$$

$|\theta|$.

引理的证明:

如图 2, 由复数的几何意义, 有

$$\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{3}{2},$$

$$|\theta| \leq \frac{\pi}{6}.$$

于是, 有

$$|re^{i\theta} - 1|$$

$$= |r(\cos \theta + i \sin \theta) - 1|$$

$$= |(r-1)(\cos \theta + i \sin \theta) + [(\cos \theta - 1) + i \sin \theta]|$$

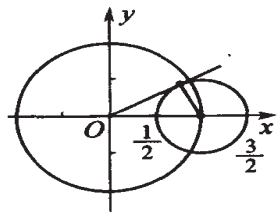


图 2

$$\leq |r - 1| + \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta}$$

$$= |r - 1| + \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

$$= |r - 1| + 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

$$\leq |r - 1| + |\theta|.$$

引理得证.

由式 (1) 及引理, 对 $|I|$ 用数学归纳法, 知

$$\frac{1}{2} \leq \prod_{j \in I} r_j \leq \frac{3}{2}, \left| \sum_{j \in I} \theta_j \right| \leq \frac{\pi}{6}. \quad (2)$$

由式 (1) 及引理, 知

$$|a_j| = |r_j e^{i\theta_j} - 1| \leq |r_j - 1| + |\theta_j|,$$

$$\text{因此, } \sum_{j=1}^n |a_j| \leq \sum_{j=1}^n |r_j - 1| + \sum_{j=1}^n |\theta_j|$$

$$= \sum_{j \geq 1} |r_j - 1| + \sum_{j < 1} |r_j - 1| + \sum_{\theta_j \geq 0} |\theta_j| + \sum_{\theta_j < 0} |\theta_j|.$$

由式 (2), 知

$$\sum_{j \geq 1} |r_j - 1| = \sum_{j \geq 1} (r_j - 1)$$

$$\leq \prod_{j \geq 1} (1 + r_j - 1) - 1 \leq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{j < 1} |r_j - 1| = \sum_{j < 1} (1 - r_j)$$

$$\leq \prod_{j < 1} [1 - (1 - r_j) j^{-1}] - 1 \leq 2 - 1 = 1,$$

$$\sum_{j=1}^n |\theta_j| = \sum_{\theta_j \geq 0} \theta_j - \sum_{\theta_j < 0} \theta_j \leq \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) \leq \frac{\pi}{3}.$$

综上所述, 有

$$\sum_{j=1}^n |a_j| \leq \frac{1}{2} + 1 + \frac{\pi}{3} < 3.$$

四、记 $S = \sum_{i=1}^6 a_i b_i c_i$. 由平均不等式, 得

$$S \geq 6 \sqrt[6]{\prod_{i=1}^6 a_i b_i c_i} = 6 \sqrt[6]{(6!)^3}$$

$$= 6 \sqrt{6!} = 72 \sqrt{5} > 160.$$

下面证明 $S > 161$.

因为 $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, \dots, a_6 b_6 c_6$ 这 6 个数的几何平均值为 $12\sqrt{5}$, 而 $26 < 12\sqrt{5} < 27$, 则 $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, \dots, a_6 b_6 c_6$ 中必有 1 个数不小于 27, 也必有 1 个数不大于 26, 而 26 不是 1, 2, 3, 4, 5, 6 中某 3 个数 (可以重复) 的积, 所以, 必有 1 个数不大于 25. 不妨设 $a_1 b_1 c_1 = 27, a_2 b_2 c_2 = 25$, 于是, 有

$$S = (\sqrt{a_1 b_1 c_1} - \sqrt{a_2 b_2 c_2})^2 + 2 \sqrt{a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2} + (a_3 b_3 c_3 + a_4 b_4 c_4) + (a_5 b_5 c_5 + a_6 b_6 c_6)$$

$$\begin{aligned} &\geq (\sqrt{27} - \sqrt{25})^2 + 2 \sqrt{a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 +} \\ &\quad 2 \sqrt{a_3 b_3 c_3 a_4 b_4 c_4} + 2 \sqrt{a_5 b_5 c_5 a_6 b_6 c_6} \\ &\geq (3\sqrt{3} - 5)^2 + 2 \times 3 \sqrt[6]{\prod_{i=1}^6 a_i b_i c_i} \\ &= (3\sqrt{3} - 5)^2 + 72\sqrt{5} > 161, \end{aligned}$$

所以, $S \geq 162$.

又当 $a_1, a_2, \dots, a_6; b_1, b_2, \dots, b_6; c_1, c_2, \dots, c_6$ 分别为

$$1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad 5, 4, 3, 6, 1, 2; \quad 5, 4, 3, 1, 6, 2$$

时,有

$$\begin{aligned} S &= 1 \times 5 \times 5 + 2 \times 4 \times 4 + 3 \times 3 \times 3 + 4 \times 6 \times 1 + \\ &\quad 5 \times 1 \times 6 + 6 \times 2 \times 2 \\ &= 162. \end{aligned}$$

故 S 的最小值为 162.

五、首先证明一个引理.

引理 对任意大于零的实数 α, β , 有整数 u 及实数 γ , 使得

$$\alpha = \beta u + \gamma,$$

其中 $0 \leq \gamma < \beta$, 且 u 及 γ 唯一确定.

引理的证明: 取 $u = \left[\frac{\alpha}{\beta} \right]$ 及 $\gamma = \alpha - \beta \left[\frac{\alpha}{\beta} \right]$, 易知 $0 \leq \gamma < \beta$. 此外, 若另有整数 u' 及实数 $\gamma' (0 \leq \gamma' < \beta)$, 满足 $\alpha = \beta u' + \gamma'$, 则

$$\beta(u - u') = \gamma' - \gamma.$$

因上式左边的绝对值或是 0 或大于等于 β , 而右边的绝对值小于 β , 故必须 $u = u'$ 及 $\gamma' = \gamma$. 这就证明了所说的唯一性.

下面证明原题.

由引理知, 对任意的 $k = 1, 2, \dots, n$, 有

$$k = a_k x + b_k = c_k(x+1) + d_k, \quad (1)$$

这里 $a_k = \left[\frac{k}{x} \right], c_k = \left[\frac{k}{x+1} \right], 0 \leq b_k < x, 0 \leq d_k < x+1$.

记不等式左边的和为 S , 则

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n [a_k x - c_k(x+1)] \\ &= \sum_{k=1}^n [(k - b_k) - (k - d_k)] \\ &= \sum_{k=1}^n d_k - \sum_{k=1}^n b_k. \end{aligned} \quad (2)$$

记 $I = \{1 \leq k \leq n \mid d_k > 1\}$.

令 $f(k) = k - c_k - 1$, 因当 $k \in I$ 时, 有

$$k = c_k(x+1) + d_k > c_k + 1,$$

故 $0 < f(k) < n$.

所以, f 是 I 到集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个映射.

我们证明 f 必是单射.

事实上, 若有 $k, l \in I (k \neq l)$ 使 $f(k) = f(l)$, 则 $k - l = c_k - c_l$, 结合式 (1) 易知

$$(c_k - c_l)x = d_l - d_k. \quad (3)$$

另一方面, 因 $k, l \in I$, 知 $d_k, d_l \in (1, x+1)$, 故 $|d_k - d_l| < |x|$. 但

$$|c_k - c_l| |x| = |k - l| |x| \geq |x|,$$

从而, 式 (3) 两边绝对值不等. 矛盾.

此外, 由 $k = c_k(x+1) + d_k$, 易知

$$f(k) = c_k x + (d_k - 1).$$

因当 $k \in I$ 时, 有 $0 < d_k - 1 < x$, 故由引理中的唯一性, 知 $c_k = a_{f(k)}$ 及 $d_k - 1 = b_{f(k)}$.

因此, 由式 (2) 可知 (注意对所有 k 有 $b_k \geq 0$)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k \in I} d_k + \sum_{k \notin I} d_k - \sum_{k=1}^n b_k \\ &\leq \sum_{k \in I} d_k - \sum_{k \in I} b_{f(k)} + \sum_{k \notin I} d_k \\ &= \sum_{k \in I} (d_k - b_{f(k)}) + \sum_{k \notin I} d_k \\ &= \sum_{k \in I} 1 + \sum_{k \notin I} d_k \\ &\leq |I| + (n - |I|) = n. \end{aligned}$$

六、 $f(n) = bn$, b 为任意给定的实数.

首先证明: 当 $n \geq 2\alpha + 3$ 时, 有

$$f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1).$$

只要证明存在正整数 u , 使得

$$f(n+1) - f(n) = f(u+1) - f(u), \quad (1)$$

$$f(n) - f(n-1) = f(u+1) - f(u). \quad (2)$$

式 (1) 等价于

$$f(n+1) + f(u) = f(n) + f(u+1).$$

由题设条件知, 只要有

$$\alpha(n+1) \leq u < (\alpha+1)(n+1),$$

$$\alpha n \leq u+1 < (\alpha+1)n$$

即可. 也就是

$$\alpha(n+1) \leq u < u+1 < (\alpha+1)n. \quad (3)$$

同理, 式 (2) 等价于

$$\alpha n \leq u < u+1 < (\alpha+1)(n-1). \quad (4)$$

由式 (3)、(4) 知, 只要存在正整数 u , 使得

$$\alpha(n+1) \leq u < u+1 < (\alpha+1)(n-1).$$

$$\text{由 } (\alpha+1)(n-1) - \alpha(n+1) = n - 2\alpha - 1 \geq 2,$$

首届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

一、设实数 a, b, c 满足

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = \frac{3}{2}.$$

求证: $3^{-a} + 9^{-b} + 27^{-c} \geq 1$.

(李胜宏 供题)

二、设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点, 点 P 在线段 AD 上, 过点 D 作一直线分别与线段 AB, PB 交于点 M, E , 与线段 AC, PC 的延长线交于点 F, N . 如果 $DE = DF$, 求证: $DM = DN$.

(陶平生 供题)

三、(1) 是否存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$, 使得对任意的正整数 n , 都有

$$a_{n+1}^2 \geq 2a_n a_{n+2}.$$

(2) 是否存在正无理数的无穷数列 $\{a_n\}$, 使得对任意的正整数 n , 都有

$$a_{n+1}^2 \geq 2a_n a_{n+2}.$$

(金荣生 供题)

四、给定大于 2 004 的正整数 n , 将 $1, 2, \dots, n^2$ 分别填入 $n \times n$ 棋盘 (由 n 行 n 列方格构成) 的方格中, 使每个方格恰有 1 个数. 如果一个方格中填的数大于它所在行至少 2 004 个方

知上式成立.

其次, 设 n_0 为整数, $n_0 - 1 < 2\alpha + 3 \leq n_0$, 则 n_0

≥ 3 . 由上述知

$$f(n+1) - f(n) = f(n_0) - f(n_0 - 1), n \geq n_0 - 1.$$

因此,

$$f(n) = (n - n_0 + 1)[f(n_0) - f(n_0 - 1)] + f(n_0 - 1),$$

$$n \geq n_0 - 1. \quad (5)$$

取正整数 k, m , 使得

$$m \geq n_0, \alpha m \geq n_0, \alpha m \leq k < (\alpha + 1)m.$$

又由 $f(k+m) = f(k) + f(m)$, 知

$$(k+m-n_0+1)[f(n_0) - f(n_0-1)] + f(n_0-1)$$

$$= (k-n_0+1)[f(n_0) - f(n_0-1)] + f(n_0-1) +$$

$$(m-n_0+1)[f(n_0) - f(n_0-1)] + f(n_0-1).$$

由此得 $(n_0 - 1)f(n_0) = n_0 f(n_0 - 1)$.

令 $f(n_0 - 1) = b(n_0 - 1)$, 则 $f(n_0) = bn_0$.

代入式 (5), 知 $f(n) = bn, n \geq n_0 - 1$.

下面证明: 对所有正整数 n , 有 $f(n) = bn$.

若不然, 设使得 $f(n) \neq bn$ 的最大正整数为 n_1 .

当 $\alpha > 1$ 时, 取正整数 k , 使得

$$\alpha n_1 \leq k < (\alpha + 1)n_1,$$

则 $k > n_1, k + n_1 > n_1, f(k + n_1) = f(k) + f(n_1)$.

因此, $f(n_1) = f(k + n_1) - f(k)$

$$= (k + n_1)b - kb = n_1 b,$$

矛盾.

当 $\alpha \leq 1$ 时, 有 $\alpha n_1 \leq n_1 < (\alpha + 1)n_1$. 因此,

$$b \cdot 2n_1 = f(2n_1) = f(n_1) + f(n_1).$$

从而, $f(n_1) = n_1 b$, 矛盾.

又当 $f(n) = bn, b$ 为任意给定的实数时, 显然满足题意.

综上所述, 所求的函数为 $f(n) = bn, b$ 为任意给定的实数.

(2005 中国数学奥林匹克主试委员会 提供)



2006年IMO中国国家集训队选拔考试

第一天

一、设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, D, E, F 为 $\triangle ABC$ 外接圆上的三点, 使得 $AD \parallel BE \parallel CF$, S, T, U 分别为 D, E, F 关于边 BC, CA, AB 的对称点. 求证: S, T, U, H 四点共圆.

二、给定正整数 n . 求最大的实数 c , 满足: 若一组大于 1 的整数 (可以相同) 的倒数之和小于 c , 则一定可以将这一组数分成不超过 n 组, 使得每一组数的倒数之和都小于 1.

三、对正整数 M , 如果存在整数 a, b, c, d , 使得 $M \leq a < b \leq c < d \leq M + 49$, $ad = bc$, 则称 M 为好数, 否则称 M 为坏数. 试求最大的好数和最小的坏数.

第二天

四、设 $k (k \geq 3)$ 是奇数. 证明: 存在一个次数为 k 的非整系数的整值多项式 $f(x)$, 具有下面的性质:

- (1) $f(0) = 0, f(1) = 1$;
- (2) 有无穷多个正整数 n 使得, 若方程 $n = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_s)$

有整数解 x_1, x_2, \dots, x_s , 则 $s \geq 2^k - 1$.

(若对每个整数 x , 都有 $f(x) \in \mathbf{Z}$, 则称 $f(x)$ 为整值多项式.)

五、给定正整数 $m, a, b, (a, b) = 1$. A 是正整数集的非空子集, 使得对任意的正整数 n 都有 $an \in A$ 或 $bn \in A$. 对所有满足上述性质的集合 A , 求 $|A \cap \{1, 2, \dots, m\}|$ 的最小值.

六、已知 $\triangle ABC$ 覆盖凸多边形 M . 证明: 存在一个与 $\triangle ABC$ 全等的三角形, 能够覆盖 M , 并且它的一条边所在的直线与 M 的一条边所在的直线平行或者重合.

参考答案

一、先证如下的引理.

引理 如图 1, 设 O, H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、垂心, P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任意一点, P 关于 BC 的中点的对称点为 Q . 则 QH 的垂直平分线与直线 AP 关于 OH 的中点对称.

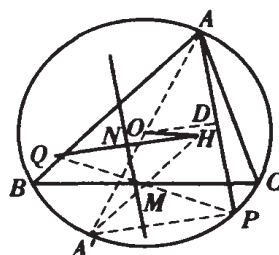


图 1

引理的证明: 过点 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 AA' , 则点 A' 与 $\triangle ABC$ 的垂心 H 也关于 BC 的中点对称. 所以, $QH \perp A'P$.

又 $A'P \perp AP$, 则 $QH \perp AP$.

设 D, N 分别为 AP, QH 的中点, 则

$$A'P = 2OD, QH = 2NH.$$

而 $AP \perp OD$, 于是, $OD \perp NH$.

故 QH 的垂直平分线与直线 AP 关于 OH 的中点对称.

下面证明原题.

如图 2, 过点 D 作 BC 的平行线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P .

由 $AD \parallel BE \parallel CF$, 易知 $PE \parallel CA, PF \parallel AB$.

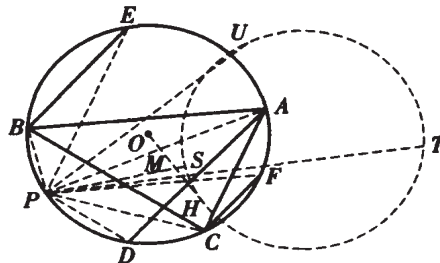


图 2

因 $PD \parallel BC$, S 是点 D 关于 BC 的对称点, 所以, 点 P 关于 BC 的中点的对称点是 S . 于是, 可设 $\triangle ABC$ 的外心为 O , OH 的中点为 M . 由引理, 直线

AP 关于点 M 的对称直线是 HS 的垂直平分线.

同理,直线 BP 、 CP 关于点 M 的对称直线分别是 HT 的垂直平分线和 HU 的垂直平分线.

而 AP 、 BP 、 CP 有公共点 P ,因此, HS 、 HT 、 HU 这三条线段的三条垂直平分线交于一点.

故 S 、 T 、 U 、 H 四点共圆.

$$\text{二、} c = \frac{n+1}{2}.$$

取这一组数为 a_1, a_2, \dots, a_s ,若 $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 2$,知 $c \leq \frac{n+1}{2}$.

下面对 n 用数学归纳法证明:

若 $\sum_{i=1}^s \frac{1}{a_i} < \frac{n+1}{2}$,则可将 a_1, a_2, \dots, a_s 分成不超过 n 组,使得每组数的倒数之和小于1.

(1)当 $n=1$ 时,结论成立.

(2)假设 $n-1$ 时,结论成立.现看 n 的情形.

注意到 $a_1 \geq 2$,即 $\frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{2}$.

设 t 为最大的正整数,使得 $\sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{a_i} < \frac{1}{2}$.

若 $t = s+1$,则结论成立.

若 $t \leq s$,则 $\sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{a_i} < \frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^t \frac{1}{a_i}$.

又 $\sum_{i=1}^t \frac{1}{a_i} < \frac{1}{2} + \frac{1}{a_t} \leq 1$,故 $t = s$ 时,结论成立.

下设 $t < s$,则 $\sum_{i=t+1}^s \frac{1}{a_i} < \frac{n+1}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{1}{a_i} \leq \frac{n}{2}$.

由归纳假设知 a_{t+1}, \dots, a_s 可分成 $n-1$ 组,每一组的倒数之和小于1.又 a_1, a_2, \dots, a_t 的倒数之和小于1,故 a_1, a_2, \dots, a_s 可分成 n 组,每一组的倒数之和小于1.

由数学归纳法原理知,结论对所有 $n \geq 1$ 成立.

三、最大的好数是576,最小的坏数是443.

引理 若正整数 a, b, c, d 满足 $a < b \leq c < d$, $ad = bc$,则存在正整数 u, v ,使得

$$a \leq (u-1)(v-1) < uv \leq d.$$

从而(不妨设 $u \leq v$),

$$a \leq (u-1)(v-1) < (u-1)v \leq u(v-1) < uv \leq d,$$

$$[(u-1)(v-1)][uv] = [(u-1)v][u(v-1)].$$

引理的证明:由 $ad = bc$,知

$$\frac{a}{(a,c)} \cdot \frac{d}{(b,d)} = \frac{b}{(b,d)} \cdot \frac{c}{(a,c)}.$$

$$\text{因} \left(\frac{a}{(a,c)}, \frac{c}{(a,c)} \right) = 1, \left(\frac{d}{(b,d)}, \frac{b}{(b,d)} \right) = 1,$$

$$\text{则} \frac{a}{(a,c)} = \frac{b}{(b,d)} = s, \frac{d}{(b,d)} = \frac{c}{(a,c)} = t.$$

因此, $a = (a,c)s, b = (b,d)s,$

$$c = (a,c)t, d = (b,d)t.$$

由 $a < b$,知 $(a,c) < (b,d)$.

由 $a < c$,知 $s < t$.

令 $u = (b,d), v = t$,则

$$a = (a,c)s \leq (u-1)(v-1), d = uv.$$

引理得证.

下面证明原题.

(1) 576是最大的好数.

由 $576 = 24 \times 24 < 24 \times 25 = 25 \times 24 < 25 \times 25 = 625$,知576为好数.

设 $M \geq 577$.若 M 为好数,则由引理知存在正整数 $u, v (u \leq v)$,使得

$$M \leq (u-1)(v-1) < uv \leq M+49.$$

由此知 $uv - (u-1)(v-1) \leq 49$,即 $u+v \leq 50$.

另一方面,由

$$577 \leq M \leq (u-1)(v-1) \leq \left(\frac{u+v-2}{2} \right)^2,$$

知 $(u+v-2)^2 \geq 308 > 48^2$.

从而, $u+v-2 \geq 49$,即 $u+v \geq 51$,矛盾.

所以,576是最大的好数.

(2)当 $1 \leq M \leq 288$ 时,取整数 n ,使得

$$13n \leq M+49 < 13(n+1).$$

则 $13n \leq M+49 \leq 337$.从而, $n \leq 25$.这样,

$$12(n-1) = 13(n+1) - n - 25$$

$$\geq M+50 - n - 25 \geq M,$$

即 $M \leq 12(n-1) < 13n \leq M+49$.

因此,当 $1 \leq M \leq 288$ 时, M 为好数.

取 $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^{23} = \{(13, 26), (14, 25), (19, 19), (14, 26), (15, 25), (19, 20), (15, 26), (20, 20), (17, 24), (19, 22), (20, 21), (13, 33), (18, 24), (20, 22), (21, 21), (15, 30), (19, 24), (16, 29), (18, 26), (19, 25), (20, 24), (21, 23), (14, 35)\}$.

验证知,对 $i=2, 3, \dots, 23$,有

$$u_i v_i \leq (u_{i-1} - 1)(v_{i-1} - 1) + 50,$$

$$(u_{i-1} - 1)(v_{i-1} - 1) < (u_i - 1)(v_i - 1),$$

$$(u_1 - 1)(v_1 - 1) = 300, u_1 v_1 = 338,$$

$$(u_{23} - 1)(v_{23} - 1) = 442.$$

当 $288 < M \leq 300$ 时,

$$M \leq (u_1 - 1)(v_1 - 1) < u_1 v_1 \leq M+49.$$

当 $(u_{i-1} - 1)(v_{i-1} - 1) < M \leq (u_i - 1)(v_i - 1)$

时,有

$$M \leq (u_i - 1)(v_i - 1) < u_i v_i \\ \leq (u_{i-1} - 1)(v_{i-1} - 1) + 50 \leq M + 49,$$

$i = 2, 3, \dots, 23$.

因此,当 $288 \leq M \leq 442$ 时, M 为好数.

下证 443 为坏数.

假设 443 为好数,则由引理知存在正整数 u, v ($u \leq v$),使得 $443 \leq (u-1)(v-1) < uv \leq 492$.

因此, $uv - (u-1)(v-1) \leq 49$,即

$$u + v \leq 50.$$

$$\text{又 } 443 \leq (u-1)(v-1) \leq \left(\frac{u+v-2}{2}\right)^2, \text{得}$$

$$u + v \geq 45.$$

$$\text{由 } 443 \leq (u-1)(v-1) = uv - u - v + 1$$

$$\leq uv - 2\sqrt{uv} + 1 = (\sqrt{uv} - 1)^2,$$

知 $\sqrt{uv} \geq 22, uv \geq 484$.

$$\text{故 } uv = 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492$$

中满足 $45 \leq u + v \leq 50$ 只有

$$(u, v) = (14, 35), (18, 27).$$

$$\text{而 } 13 \times 34 = 442, 17 \times 26 = 442 \text{ 与 } (u-1)(v-1)$$

≥ 443 矛盾.

所以,443 为最小的坏数.

四、首先证明一个引理.

引理 存在一个 k 次整值多项式 $f(x)$,系数不全是整数,满足

$$f(0) = 0, f(1) = 1, \\ \text{以及 } f(x) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2^k}, & x \text{ 为偶数}; \\ 1 \pmod{2^k}, & x \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

引理的证明:满足 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 的 k 次整值多项式 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = a_k F_k(x) + a_{k-1} F_{k-1}(x) + \dots + a_1 F_1(x), \quad (1)$$

其中, $F_i(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}, a_k, a_{k-1}, \dots,$

a_1 为整数, $a_k > 0, a_1 = 1$.

$$\text{易证 } F_i(x+2) = F_i(x) + 2F_{i-1}(x) + F_{i-2}(x).$$

故由式(1)易知

$$f(x+2) - f(x) \\ = 2a_k F_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (2a_i + a_{i+1}) F_{i-1}(x). \quad (2)$$

现在取 a_k, a_{k-1}, \dots, a_2 满足

$$\begin{cases} 2a_k = 2^k, \\ 2a_i + a_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq k-1. \end{cases}$$

则易解得(注意 $a_1 = 1$)

$$a_k = 2^{k-1}, a_{k-1} = -2^{k-2}, \dots, a_2 = -2.$$

从而,式(2)化为

$$f(x+2) - f(x) = 2^k F_{k-1}(x).$$

由此得,对所有整数 x 有

$$f(x+2) - f(x) \equiv 0 \pmod{2^k}. \quad (3)$$

由于 $f(0) = 0, f(1) = 1$,故由式(3)推出多项式

$$f(x) = 2^{k-1} F_k(x) - 2^{k-2} F_{k-1}(x) + \dots - 2F_2(x) + F_1(x)$$

满足引理的要求(注意 x^k 的系数是 $\frac{2^{k-1}}{k!}$,这在 $k \geq 3$ 时非整数).

下面证明原题.

取 $n \equiv -1 \pmod{2^k}$,若有整数 x_1, x_2, \dots, x_s ,使得 $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_s) = n$,则更有

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_s) \equiv -1 \pmod{2^k}. \quad (4)$$

由引理知,式(4)中左边每一项模 2^k 是 0 或 1.故

加项至少有 $2^k - 1$ 个,即 $s \geq 2^k - 1$.

五、(1)当 $a = b = 1$ 时,有

$$A \cap \{1, 2, \dots, m\} = \{1, 2, \dots, m\},$$

$$|A \cap \{1, 2, \dots, m\}| = m.$$

(2)不妨设 $a > b$.令

$$A_1 = \{k \mid \text{若 } a^\alpha \mid k, a^{\alpha+1} \nmid k, \text{则 } \alpha \text{ 为奇数}\}.$$

现验证 A_1 满足条件.

任取正整数 n ,设 $n = a^\alpha n_1, a \nmid n_1$.

若 $2 \mid \alpha$,则 $an = a^{\alpha+1} n_1 \in A_1$;

若 $2 \nmid \alpha$,则 $bn = a^\alpha b n_1 \in A_1$.

$$\text{有 } |A_1 \cap \{1, 2, \dots, m\}| = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left[\frac{m}{a^i} \right].$$

(3)对任何正整数 n ,取 $c_n = a$ 或 b ,使 $nc_n \in A$.

令 $B = \{c_1, 2c_2, 3c_3, \dots\}$.因此,

$$|A \cap \{1, 2, \dots, m\}| \geq |B \cap \{1, 2, \dots, m\}|. \quad (1)$$

对任何 n ,设 $n = a^\alpha n_1, a \nmid n_1$,取

$$d_n = \begin{cases} a, & \text{若 } 2 \mid \alpha; \\ b, & \text{若 } 2 \nmid \alpha. \end{cases}$$

$$\text{令 } B_n = \{d_1, 2d_2, \dots, nd_n, (n+1)c_{n+1}, (n+2)c_{n+2}, \dots\},$$

$$B_0 = B.$$

下面证明:

$$|B_i \cap \{1, 2, \dots, m\}| \geq |B_{i+1} \cap \{1, 2, \dots, m\}|,$$

$i = 0, 1, \dots$ (2)

对 i 用数学归纳法.

(i)当 $i = 0$ 时,若 $c_1 = b$,则 $c_1 < ic_i (i \geq 2)$,并且

$$|B_0 \cap \{1, 2, \dots, m\}|$$

$$= 1 + |\{2c_2, 3c_3, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|,$$

$|B_1 \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $\leq 1 + |\{2c_2, 3c_3, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $= |B_0 \cap \{1, 2, \dots, m\}|$.
 若 $c_1 = a$, 则 $B_0 = B_1$.
 因此, 对 $i=0$, 式②成立.
 (ii) 设 $i \geq 1$, 假设 $c_{i+1} \neq d_{i+1}, i+1 = a^\alpha n_i, a \nmid n_i$.
 i) 若 $2 \mid \alpha$, 则 $d_{i+1} = a$. 从而, $c_{i+1} = b$.
 此时, $(i+1)c_{i+1} = a^\alpha b n_i, a \nmid b n_i$.
 由于 $d_1, 2d_2, \dots, id_i$ 中每一个含 a 的最高幂均为奇数, $2 \mid \alpha$, 故

$(i+1)c_{i+1} \neq d_1, 2d_2, \dots, id_i$.
 当 $j > i+1$ 时, $(i+1)c_{i+1} = (i+1)b < jb \leq jc_j$.
 此时, 若 $(i+1)c_{i+1} \leq m$, 则
 $|B_i \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $= 1 + |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $\geq |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+1)d_{i+1}, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $= |B_{i+1} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$.
 若 $(i+1)c_{i+1} > m$, 则
 $(i+1)d_{i+1} = (i+1)a$
 $> (i+1)b = (i+1)c_{i+1} > m$.
 此时, 式②中等号成立.

ii) 若 $2 \nmid \alpha$, 则 $d_{i+1} = b$. 从而, $c_{i+1} = a$. 此时,
 $(i+1)d_{i+1} = a^\alpha b n_i = i'd_i, i' = a^{\alpha-1} b n_i < i+1$.
 故 $|B_i \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $= |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+1)c_{i+1}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $\geq |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $= |\{d_1, 2d_2, \dots, id_i, (i+1)d_{i+1}, (i+2)c_{i+2}, \dots\} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$
 $= |B_{i+1} \cap \{1, 2, \dots, m\}|$.
 因此, 式②成立.
 这就证明了式②对所有的 i 都成立.

设 n 为最大的正整数, 使得 $nd_n \leq m$. 则由式①、②知

$$\begin{aligned}
 &|A \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\
 &\geq |B \cap \{1, 2, \dots, m\}| = |B_0 \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\
 &\geq |B_n \cap \{1, 2, \dots, m\}| = |A_1 \cap \{1, 2, \dots, m\}| \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left\lfloor \frac{m}{a^i} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

六、首先, 不妨设 M 有三个顶点位于 $\triangle ABC$ 的边上(如图3)或 M 有一个顶点与 $\triangle ABC$ 的某顶点重合(如点 B), M 的另一顶点位于点 B 的对边上(如

图4).

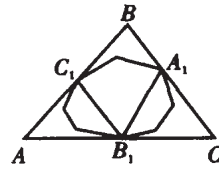


图3

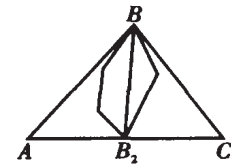


图4

设初始状态下 $\angle AC_1 B_1 = \theta_0$, 分别将 M 绕点 C_1 顺时针和逆时针旋转. 设顺时针转 δ_1 时, M 第一次出现某一边与 $\triangle ABC$ 某一边平行; 逆时针转 δ_2 时, M 第一次出现某一边与 $\triangle ABC$ 某一边平行. 对 $\theta \in [\theta_1, \theta_2], \theta_1 = \theta_0 - \delta_1, \theta_2 = \theta_0 + \delta_2$, 设 M 首先绕点 C_1 旋转到相应的 θ 角度, 然后, 再分别作以点 A, B 为中心的位似变换, 使得 M 的像(记为 M_θ) 的相应的两顶点重新分别位于 AC, BC 上. 设

$$C_1 B_1 = mf(\theta), A_1 B_1 = nf(\theta), f(\theta_0) = 1,$$

其中, m, n 分别是初始状态下相应的距离.

令 $\phi = \angle B + \angle C_1 B_1 A_1$ (为定值), 则

$$AC = AB_1 + B_1 C = \frac{mf(\theta) \sin \theta}{\sin A} + \frac{nf(\theta)}{\sin C} \sin(\phi - \theta).$$

$$\text{故 } f(\theta) = \frac{AC \sin A \sin C}{m \sin \theta \sin C + n \sin(\phi - \theta) \sin A}$$

$$= \frac{AC \sin A \sin C}{a \sin(\theta + \phi_1)},$$

其中, a, ϕ_1 为常数.

由于 $\sin(\theta + \phi_1)$ 为上凸函数, 因此, 其必然在端点处达到最小值.

$$\text{故 } \max\{f(\theta_1), f(\theta_2)\} \geq f(\theta_0) = 1.$$

则 M_{θ_1} 或 M_{θ_2} 与 M 相似, 比例常数不小于 1, 并且位于 $\triangle ABC$ 中.

对于第二种情况可以类似讨论.

$$\text{设 } BB_2 = mf(\theta), f(\theta_0) = 1, AB_2 = \frac{BB_2}{\sin A} \sin \theta,$$

$$CB_2 = \frac{BB_2}{\sin C} \sin(B - \theta).$$

$$\text{故 } AC = \frac{mf(\theta) \sin \theta}{\sin A} + \frac{mf(\theta)}{\sin C} \sin(B - \theta)$$

$$= \frac{f(\theta) a \sin(\theta + \phi_1)}{\sin A \sin C}.$$

$$\text{从而 } f(\theta) = \frac{AC \sin A \sin C}{a \sin(\theta + \phi_1)}.$$

结论一样.

(李胜宏 提供)

2007年IMO中国国家集训队选拔考试

第一天

一、已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, M 是弧 AB 的中点, C 是 $\odot O$ 外任一点, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CS 、 CT , 联结 MS 、 MT 分别交 AB 于点 E 、 F . 过点 E 、 F 作 AB 的垂线, 分别交 OS 、 OT 于点 X 、 Y . 再过点 C 任作 $\odot O$ 的割线, 交 $\odot O$ 于点 P 、 Q , 联结 MP 交 AB 于点 R , 设 Z 是 $\triangle PQR$ 的外心. 求证: X 、 Y 、 Z 三点共线.

(熊斌 供题)

二、称满足如下条件的有理数 x 为“好的”: $x = \frac{p}{q} > 1$, 其中, p 、 q 是互质的正整数, 且存在常数 α 、 N , 使得对任意正整数 $n \geq N$, 都有

$$|\{x^n\} - \alpha| \leq \frac{1}{2(p+q)},$$

其中, $\{a\}$ 表示 a 的小数部分. 求出所有好的有理数.

(李伟固 供题)

三、在半径为 10 的圆周 C 上任给 63 个点, 设以这些点为顶点且三边长都大于 9 的三角形的个数为 S . 求 S 的最大值.

(冷岗松 供题)

第二天

四、求所有的函数 $f: \mathbf{Q}_+ \rightarrow \mathbf{Q}_+$, 使得

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}, \quad (1)$$

其中, \mathbf{Q}_+ 表示正有理数集合.

(李胜宏 供题)

五、设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 n ($n \geq 2$) 个实数, 满足 $A = |\sum_{i=1}^n x_i| \neq 0$,

$$B = \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| \neq 0.$$

求证: 对平面上的任意 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 存在 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得

$$|\sum_{i=1}^n x_{k_i} \alpha_i| \geq \frac{AB}{2A+B} \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|.$$

(朱华伟 供题)

六、设 n 为正整数, $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, A 中任两个数的最小公倍数都不超过 n . 求证:

$$|A| \leq 1.9\sqrt{n} + 5. \quad (\text{陈永高 供题})$$

参考答案

第一天

一、如图 1, 先联结 OM . 由垂径定理易知 $\triangle XES$ 与 $\triangle OMS$ 位似, 于是, $\triangle XES$ 是等腰三角形. 故可以 X 为圆心、 XE 和 XS 为半径作圆, 该圆同时与弦 AB 及直线 CS 相切.

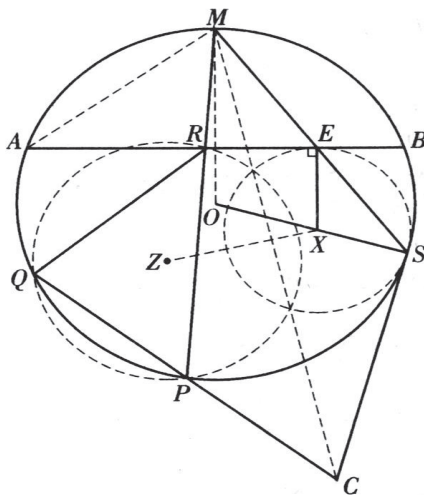


图 1

再作 $\triangle PQR$ 的外接圆, 并联结 MA 、 MC . 易证明 $MR \cdot MP = MA^2 = ME \cdot MS$. (1)

又由切割线定理得

$$CQ \cdot CP = CS^2. \quad (2)$$

式 (1)、(2) 表明, 点 M 、 C 关于 $\odot Z$ 、 $\odot X$ 的幂都相等. 于是, MC 就是上述两圆的根轴.

因此, $ZX \perp MC$.

同理, $ZY \perp MC$.

所以, X 、 Y 、 Z 三点共线.

二、显然, 每个大于 1 的整数是好的.

下证每个好的有理数也必是大于 1 的整数.

设 $m_n = [x^{n+1}] - [x^n]$. 当 $n \geq N$ 时,

$$|(x-1)x^n - m_n| = |\{x^{n+1}\} - \{x^n\}|$$

$$\leq |\{x^{n+1}\} - \alpha| + |\{x^n\} - \alpha| \leq \frac{1}{p+q}.$$

注意到, $(x-1)x^n - m_n$ 是一个分母为 q^{n+1} 的最简分数, 则 $|(x-1)x^n - m_n| < \frac{1}{p+q}$.

$$\begin{aligned} & \text{故 } |qm_{n+1} - pm_n| \\ &= |q((x-1)x^{n+1} - m_{n+1}) - p((x-1)x^n - m_n)| \\ &< \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} = 1. \end{aligned}$$

所以, $m_{n+1} = \frac{p}{q}m_n$. 从而, $m_{n+k} = \frac{p^k}{q^k}m_n$.

又当 n 充分大时, $m_n > (x-1)x^n - 1 > 0$, 得到 $q = 1$, 即 $x > 1$ 为整数.

三、设圆周 C 的圆心为 O , 内接正 n 边形的边长为 a_n , 则 $a_6 = 10 > 9$, 且

$$a_7 < 10 \times \frac{2\pi}{7} < 10 \times \frac{2 \times 3.15}{7} = 9.$$

(1) 作圆周 C 的内接正六边形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, 则 $A_i A_{i+1} = a_6 > 9$. 故可在 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ 内取一点 B_i , 使 $B_i A_{i+1} > 9$. 于是, $\angle B_i O A_{i+1} > \frac{2\pi}{7}$. 从而,

$$\angle A_i O B_i = \angle A_i O A_{i+1} - \angle B_i O A_{i+1} < \frac{2\pi}{6} - \frac{2\pi}{7} < \frac{2\pi}{7}.$$

所以, $A_i B_i < 9$ ($i = 1, 2, \dots, 6, A_7 = A_1$).

故 $\widehat{A_i B_i}$ 上任意两点的距离小于 9.

又 $63 = 6 \times 10 + 3$, 则可在 $\widehat{A_1 B_1}, \widehat{A_2 B_2}, \widehat{A_3 B_3}$ 每段弧内任取 11 个点, 在 $\widehat{A_4 B_4}, \widehat{A_5 B_5}, \widehat{A_6 B_6}$ 每段弧内任取 10 个点, 将取出的这 63 个点组成集 M . 于是, M 内位于 6 条弧 $\widehat{A_i B_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) 中同一条弧上任意两点的距离小于 9, 而位于不同弧上任意两点的距离大于 9. 故以 M 中的点为顶点且三边长都大于 9 的三角形个数为

$$\begin{aligned} S_0 &= C_3^3 \times 11^3 + C_3^2 C_3^1 \times 11^2 \times 10 + \\ & C_3^1 C_3^2 \times 11 \times 10^2 + C_3^3 \times 10^3 \\ &= 23121. \end{aligned}$$

于是, 所求 S 的最大值大于或等于 S_0 .

(2) 接下来证明: 所求的最大值等于 S_0 .

为此, 用到下面三个引理.

引理 1 在圆周 C 上任给 n 个点, 以圆周 C 上一点 P 为中心、长度等于圆周长的 $\frac{2}{7}$ 的弧 \widehat{BPC} (含点 B, C) 称为点 P 的 $\frac{2}{7}$ 圆弧. 则给定的 n 个点中必存在一点 P , 它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧至少覆盖给定点中的 $\lfloor \frac{n+5}{6} \rfloor$ 个点.

引理 1 的证明: 如图 2, 取一个给定的点 A , 它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧为 $\widehat{A_1 A_6}$. 以 A_1, A_6 为端点不含 A 的另一段弧记为 $\widehat{A_1 B A_6}$, 并将 $\widehat{A_1 B A_6}$ 五等分, 分点依次为 $A_2,$

A_3, A_4, A_5 . 于是, $\widehat{A_i A_{i+1}}$ 恰是整个圆周 C 的 $\frac{1}{7}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$).

因为 $\widehat{A_1 A_6}$ 上的给定点都被点 A 的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖,

若 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) 上

有给定点 P_i , 则 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ 上的所有给定点都被点 P_i 的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖, 所以, 所有 n 个给定点至多被其中 6 个给定点的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖.

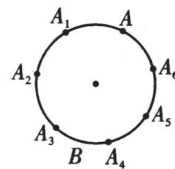


图 2

由抽屉原理知, 其中必有一个给定点的 $\frac{2}{7}$ 圆弧至少覆盖 $\lfloor \frac{n-1}{6} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+5}{6} \rfloor$ 个给定点.

引理 2 在半径为 10 的圆周 C 上任取一条长度等于圆周长的 $\frac{5}{7}$ 的弧 $\widehat{A_i B A_6}$. 在 $\widehat{A_i B A_6}$ 上任给 $5m + r$ (m, r 为非负整数, 且 $0 \leq r < 5$) 个点, 则以给定点为端点、长度大于 9 的线段数至多为

$$10m^2 + 4m + \frac{1}{2}r(r-1).$$

引理 2 的证明: 如图 2, 将 $\widehat{A_1 B A_6}$ 五等分, 分点依次为 A_2, A_3, A_4, A_5 , 则 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) 恰为整个圆周长的 $\frac{1}{7}$. 于是, 同一弧 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ 上任意两点的距离不超过 $a_7 < 9$.

设 $\widehat{A_i A_{i+1}}$ 上有 m_i 个已知点, 则以已知点为端点且距离大于 9 的线段至多为

$$l = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} m_i m_j, \tag{1}$$

其中, $m_1 + m_2 + \dots + m_5 = 5m + r$.

因满足式 (1) 的非负整数组 (m_1, m_2, \dots, m_5) 的个数有限, 所以, l 的最大值必存在.

下面证明: 当 l 取最大值时, 必有

$$|m_i - m_j| \leq 1 \quad (1 \leq i < j \leq 5).$$

否则, l 取最大值时, 存在 i, j ($1 \leq i < j \leq 5$) 使得 $|m_i - m_j| \geq 2$. 不妨设 $m_1 - m_2 \geq 2$, 令

$$m'_1 = m_1 - 1, m'_2 = m_2 + 1, m'_i = m_i \quad (3 \leq i \leq 5),$$

并令对应的整数为 l' , 则

$$m'_1 + m'_2 = m_1 + m_2,$$

且 $m'_1 + m'_2 + \dots + m'_5 = m_1 + m_2 + \dots + m_5$.

$$\text{故 } l' - l = (m'_1 m'_2 - m_1 m_2) + [(m'_1 + m'_2) - (m_1 + m_2)](m_3 + m_4 + m_5)$$

$$= m_1 - m_2 - 1 \geq 1.$$

这与 l 为最大值矛盾.

因此, 当 l 取最大值时, m_1, m_2, \dots, m_5 中有 r

个 $m+1, 5-r$ 个 m .

所以,以给定点为端点且长度大于 9 的线段数不超过

$$\begin{aligned} & C_r^2(m+1)^2 + C_r^1 C_{5-r}^1(m+1)m + C_{5-r}^2 m^2 \\ &= 10m^2 + 4rm + \frac{1}{2}r(r-1). \end{aligned}$$

引理 3 在半径为 10 的圆周 C 上任给 n 个点组成点集 M , 且 $n=6m+r$ (m, r 为非负整数, $0 \leq r < 6$). 设以 M 中的点为顶点、三边长都大于 9 的三角形个数为 S_n , 则

$$S_n \leq 20m^3 + 10m^2 + 2r(r-1)m + \frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

引理 3 的证明: 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 或 2 时, $S_n=0$, 结论显然成立.

设当 $n=k$ ($k \geq 2$) 时, 结论成立, 并设 $k=6m+r$ (m, r 为非负整数, 且 $0 \leq r < 6$), 则

$$S_k \leq 20m^3 + 10m^2 + 2r(r-1)m + \frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

当 $n=k+1$ 时, 由引理 1 知, 给定的 $k+1$ 个点中必存在一点 P , 它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧 $\widehat{A_1PA_6}$ 至少覆盖给定点中的 $\left\lceil \frac{k+1+5}{6} \right\rceil = m+1$ 个点. 显然, 这些点到 P 的最大距离 $d \leq PA_1 = PA_6 = a_7 < 9$.

故给定点中至多有

$$(k+1) - (m+1) = 5m+r$$

个点, 且这些点全在以 A_1, A_6 为端点但不含 P 的另一段弧 $\widehat{A_1BA_6}$ 上, 而这段弧的长度为整个圆周的 $\frac{5}{7}$.

由引理 2 知, 以这些点为端点、长度大于 9 的线段至多为 $10m^2 + 4rm + \frac{1}{2}r(r-1)$ (当 $r=5$ 时, 由引理 2 知, 至多有 $10(m+1)^2$, 结论也成立), 即以给定点为顶点的三角形中其三边长都大于 9, 且有一个顶点为 P 的三角形个数不多于

$$S_p = 10m^2 + 4rm + \frac{1}{2}r(r-1).$$

去掉点 P , 还剩 $k=6m+r$ 个点.

设以这 k 个点为顶点, 且三边长都大于 9 的三角形个数为 S_k , 则由归纳假设有

$$S_k \leq 20m^3 + 10m^2 + 2r(r-1)m + \frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

故 $S_{k+1} = S_k + S_p$

$$\begin{aligned} & \leq 20m^3 + 10m^2 + 2r(r-1)m + \\ & \quad \frac{1}{6}r(r-1)(r-2) + 10m^2 + 4rm + \frac{1}{2}r(r-1) \\ &= 20m^3 + 10(r+1)m^2 + 2(r+1)m + \\ & \quad \frac{1}{6}r(r+1)(r-1). \end{aligned}$$

因此, 当 $n=k+1=6m+(r+1)$ 时, 结论成立.

此外, 当 $r=5$ 时, $m=k+1=6(m+1)$, 上式化为 $S_{k+1}=20(m+1)^3$, 结论也成立.

回到原题.

当 $n=63=6 \times 10+3$ 时, 由引理 3 得

$$\begin{aligned} S & \leq 20 \times 10^3 + 10 \times 3 \times 10^2 + \\ & \quad 2 \times 3 \times 2 \times 10 + \frac{1}{6} \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 23121. \end{aligned}$$

故 $S_{\max}=23121$.

第二天

四、(1) 证明: $f(1)=1$.

一方面, 在式 ① 中, 令 $y=1$, 记 $f(1)=a$, 则

$$f(x) + a + 2xf(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)},$$

$$\text{即 } f(x+1) = \frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+a}. \quad \text{②}$$

$$\text{则 } f(2) = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}, \quad f(3) = \frac{1}{5+4a},$$

$$f(4) = \frac{1}{7+5a+4a^2}.$$

另一方面, 在式 ① 中取 $x=y=2$, 则

$$2f(2) + 8f(4) = \frac{f(4)}{f(4)} = 1.$$

$$\text{从而, } \frac{1}{2} + \frac{8}{7+5a+4a^2} = 1.$$

解得 $a=1$.

(2) 用数学归纳法证明:

$$f(x+n) = \frac{f(x)}{(n^2+2nx)f(x)+1} \quad (n=1, 2, \dots). \quad \text{③}$$

$$\text{由式 ② 得 } f(x+1) = \frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+1}.$$

$$\text{假设 } f(x+k) = \frac{f(x)}{(k^2+2kx)f(x)+1}, \text{ 则}$$

$$f(x+k+1) = \frac{f(x+k)}{[1+2(x+k)]f(x+k)+1}$$

$$= \frac{f(x)}{[(k+1)^2+2(k+1)x]f(x)+1}.$$

在式 ③ 中令 $x=1$, 由 $f(1)=1$, 有

$$f(1+n) = \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\text{即 } f(n) = \frac{1}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots).$$

(3) 证明:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{n^2}}\right)^2 \quad (n=1, 2, \dots). \quad \text{④}$$

事实上, 在式 ③ 中取 $x = \frac{1}{n}$, 有

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{(n^2+2)f\left(\frac{1}{n}\right)+1}.$$

另一方面,在式①中取 $y = \frac{1}{x}$,有

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 = \frac{1}{f\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

从而,

$$f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) + 2 = \frac{1}{f\left(n + \frac{1}{n}\right)} = n^2 + 2 + \frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} + f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 + \frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow f^2\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n^2} - n^2\right) f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - n^2\right] \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\right] = 0.$$

所以 $f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$.

(4) 证明:若 $q = \frac{n}{m}, (n, m) = 1$, 则 $f(q) = \frac{1}{q^2}$.

对正整数 $m, n, (n, m) = 1$. 在式①中取 $x = n, y = \frac{1}{m}$, 有

$$f\left(\frac{1}{m}\right) + f(n) + \frac{2n}{m} f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{f\left(n + \frac{1}{m}\right)}$$

在式③中取 $x = \frac{1}{m}$, 有

$$f\left(n + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{\left(n^2 + \frac{2n}{m}\right) f\left(\frac{1}{m}\right) + 1}$$

$$= \frac{1}{n^2 + 2 \times \frac{n}{m} + \frac{1}{m^2}}$$

因此, $\frac{1}{n^2} + m^2 + \frac{2n}{m} f\left(\frac{n}{m}\right) = \left(n + \frac{1}{m}\right)^2 f\left(\frac{n}{m}\right)$,

即 $\frac{1}{n^2} + m^2 = \left(n^2 + \frac{1}{m^2}\right) f\left(\frac{n}{m}\right)$.

所以 $f(q) = f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\frac{1}{n^2} + m^2}{n^2 + \frac{1}{m^2}} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$.

于是 $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

经验证 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 满足原方程.

故 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 为原问题的解.

五、设 $|\alpha_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$).

只须证明:

$$\max_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} \left| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \alpha_i \right| \geq \frac{AB}{2A+B} |\alpha_k|,$$

其中, S_n 为 $1, 2, \dots, n$ 的排列的集合.

不妨设 $|x_n - x_1| = \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| = B$,

$|\alpha_n - \alpha_1| = \max_{1 \leq i < j \leq n} |\alpha_j - \alpha_i|$.

一方面,考虑两个向量

$$\beta_1 = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_{n-1} \alpha_{n-1} + x_n \alpha_n,$$

$$\beta_2 = x_n \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_{n-1} \alpha_{n-1} + x_1 \alpha_n.$$

则 $\max_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} \left| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \alpha_i \right| \geq \max\{|\beta_1|, |\beta_2|\}$

$$\geq \frac{1}{2} (|\beta_1| + |\beta_2|) \geq \frac{1}{2} |\beta_2 - \beta_1|$$

$$= \frac{1}{2} |x_1 \alpha_n + x_n \alpha_1 - x_1 \alpha_1 - x_n \alpha_n|$$

$$= \frac{1}{2} |x_n - x_1| |\alpha_n - \alpha_1| = \frac{1}{2} B |\alpha_n - \alpha_1|. \quad \text{①}$$

设 $|\alpha_n - \alpha_1| = x |\alpha_k|$.

由三角形不等式易知 $0 \leq x \leq 2$.

因此,式①中的不等式可写为

$$\max_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} \left| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \alpha_i \right| \geq \frac{1}{2} Bx |\alpha_k|. \quad \text{②}$$

另一方面,考虑 n 个向量

$$\gamma_1 = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_{n-1} \alpha_{n-1} + x_n \alpha_n,$$

$$\gamma_2 = x_2 \alpha_1 + x_3 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_{n-1} + x_1 \alpha_n,$$

.....

$$\gamma_n = x_n \alpha_1 + x_1 \alpha_2 + \dots + x_{n-2} \alpha_{n-1} + x_{n-1} \alpha_n.$$

则 $\max_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} \left| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \alpha_i \right|$

$$\geq \max_{1 \leq i \leq n} |\gamma_i| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \geq \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i \right|$$

$$= \frac{A}{n} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right| = \frac{A}{n} \left| n \alpha_k - \sum_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j) \right|$$

$$\geq \frac{A}{n} \left(n |\alpha_k| - \sum_{j \neq k} |\alpha_k - \alpha_j| \right)$$

$$\geq \frac{A}{n} [n |\alpha_k| - (n-1) |\alpha_n - \alpha_1|]$$

$$= \frac{A}{n} [n |\alpha_k| - (n-1)x |\alpha_k|]$$

$$= A \left(1 - \frac{n-1}{n} x \right) |\alpha_k|. \quad \text{③}$$

结合式②、③得

$$\max_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} \left| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \alpha_i \right| \geq \max \left\{ \frac{Bx}{2}, A \left(1 - \frac{n-1}{n} x \right) \right\} |\alpha_k|$$

$$\geq \frac{\frac{Bx}{2} \cdot A \frac{n-1}{n} + A \left(1 - \frac{n-1}{n} x \right) \cdot \frac{B}{2}}{A \frac{n-1}{n} + \frac{B}{2}} |\alpha_k|$$

$$= \frac{AB}{2A+B - \frac{2A}{n}} |\alpha_k| \geq \frac{AB}{2A+B} |\alpha_k|.$$

六、对于 $a \in (\sqrt{n}, \sqrt{2n}]$, 有



课外训练

数学奥林匹克初中训练题(100)

第一试

一、选择题(每小题7分,共42分)

1. 如图1,在平面直角坐标系中,二次函数 $y = ax^2 + mc$ ($a \neq 0$) 的图像经过正方形 $ABOC$ 的三个顶点 A 、 B 、 C ,且 $ac = -2$. 则 m 的值为().

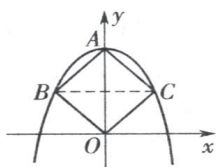


图1

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

2. 投掷红、绿两枚六面编号分别为1~6(整数)的质地均匀的正方体骰子,将红色和绿色骰子正面朝上的编号分别作为二次函数 $y = x^2 + mx + n$ 的一次项系数和常数项的值. 则二次函数 $y = x^2 + mx + n$ 与 x 轴有

两个不同交点的概率是().

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{17}{36}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. 若一个正整数能表示为两个连续偶数的平方差,则称这个正整数为“神秘数”(如 $4 = 2^2 - 0^2$, $12 = 4^2 - 2^2$, $20 = 6^2 - 4^2$). 下列关于神秘数的叙述,正确的个数为().

- ① 008 是神秘数;
 ② 任意两个正奇数的平方差是神秘数;
 ③ 任意两个正奇数的平方差不是神秘数;

数;

④ 在1~100这100个数中,神秘数有13个.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = b$, $BC = a$. 若

$$[a, a+1] = a(a+1) > n.$$

$$\text{则 } |A \cap (\sqrt{2n}, \sqrt{2n+1}]| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\sqrt{n+1}.$$

对于 $a \in (\sqrt{2n}, \sqrt{3n}]$, 有

$$[a, a+1] = a(a+1) > n,$$

$$[a+1, a+2] = (a+1)(a+2) > n,$$

$$[a, a+2] \geq \frac{1}{2}a(a+2) > n.$$

$$\text{则 } |A \cap (\sqrt{2n}, \sqrt{3n}]| \leq \frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{n+1}.$$

$$\text{同理, } |A \cap (\sqrt{3n}, 2\sqrt{n}]| \leq \frac{1}{4}(\sqrt{4}-\sqrt{3})\sqrt{n+1}.$$

$$\text{故 } |A \cap [1, 2\sqrt{n}]|$$

$$\leq \sqrt{n} + \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} + \frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{n} +$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{4}-\sqrt{3})\sqrt{n} + 3$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\sqrt{n} + 3.$$

对于正整数 k , 设 $a \cdot b \in \left[\frac{n}{k+1}, \frac{n}{k}\right]$ ($a > b$), 并

$$\text{令 } [a, b] = as = bt. \text{ 则 } \frac{a}{(a, b)}s = \frac{b}{(a, b)}t.$$

由 $\frac{a}{(a, b)}$ 与 $\frac{b}{(a, b)}$ 互质, 知 s 为 $\frac{b}{(a, b)}$ 的倍数.

从而,

$$[a, b] = as \geq \frac{ab}{(a, b)} \geq \frac{ab}{a-b} = b + \frac{b^2}{a-b}$$

$$> \frac{n}{k+1} + \frac{\left(\frac{n}{k+1}\right)^2}{\frac{n}{k} - \frac{n}{k+1}} = n.$$

$$\text{由此知 } |A \cap \left[\frac{n}{k+1}, \frac{n}{k}\right]| \leq 1.$$

取正整数 T , 使 $\frac{n}{T+1} \leq 2\sqrt{n} < \frac{n}{T}$, 则

$$|A \cap (2\sqrt{n}, n]| \leq \sum_{k=1}^T |A \cap \left[\frac{n}{k+1}, \frac{n}{k}\right]|$$

$$\leq T < \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

综上有

$$|A| \leq \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\sqrt{n} + 3 < 1.9\sqrt{n} + 5.$$

(朱华伟 提供)

2008 中国国家集训队选拔考试

第一天

一、在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 它的内切圆切边 BC 于点 E , 联结 AE 交内切圆于点 D (不同于点 E). 在线段 AE 上取异于点 E 的一点 F , 使得 $CE = CF$, 联结 CF 并延长交 BD 于点 G . 求证: $CF = FG$. (熊斌 提供)

二、数列 $\{x_n\}$ 定义为

$$x_1 = 2, x_2 = 12,$$

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

设 p 是一个奇质数, q 是 x_p 的一个质因子. 证明: 若 $q \equiv 2, 3 \pmod{p}$, 则 $q \equiv 2p - 1 \pmod{p}$.

(余红兵 提供)

三、将每个正整数任意染红、蓝两色之一. 证明: 总存在一个无穷的正整数序列 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$, 使得无穷序列

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \frac{a_3 + a_4}{2}, \dots$$

是一个同色的正整数序列. (冷岗松 提供)

第二天

四、证明: 对任意正整数 $n (n \geq 4)$, 可以将集合 $G_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的元素个数不小于 2 的子集排成一列 $P_1, P_2, \dots, P_{2^n - n - 1}$, 使得

$$|P_i \cap P_{i+1}| = 2 \quad (i = 1, 2, \dots, 2^n - n - 2).$$

(刘诗雄 提供)

五、设 m, n 都是大于 1 的给定整数, a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) 是不全为 0 的 mn 个非负实数. 求

$$f = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right)^2 + m \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \right)^2 + mn \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2}$$

的最大值和最小值. (朱华伟 提供)

六、求最大的常数 $M (M > 0)$, 使得对任意正整数 n , 存在正实数数列 a_1, a_2, \dots, a_n 及 b_1, b_2, \dots, b_n 满足

$$(1) \quad \prod_{k=1}^n b_k = 1,$$

$$2b_k = b_{k-1} + b_{k+1} \quad (k = 2, 3, \dots, n-1);$$

$$(2) \quad a_k^2 = 1 + \sum_{i=1}^k a_i b_i \quad (k = 1, 2, \dots, n, a_n = M).$$

(李伟固 提供)

参考答案

第一天

一、如图 1, 过点 D 作内切圆的切线 MNK , 分别交 AB, AC, BC 于点 M, N, K .

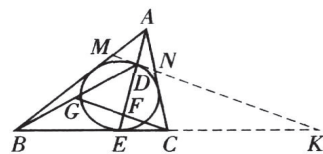


图 1

由 $\angle KDE = \angle AEK = \angle EFC$, 知 $MK \parallel CG$.

由牛顿定理知 BN, CM, DE 三线共点.

由塞瓦定理有

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1.$$

由梅涅劳斯定理有

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1.$$

$$\div \text{得 } BE \cdot KC = EC \cdot BK.$$

由梅涅劳斯定理和式 有

$$1 = \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{GD}{DB} = \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{KC}{BK} = \frac{CF}{FG}.$$

所以, $CF = FG$.

二、易知

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n] (n \geq 1).$$

设 $a_n, b_n \in \mathbb{N}_+$.

定义 $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. 则

$$(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}.$$

易知 $x_n = b_n, a_n^2 - 2b_n^2 = 1 (n \geq 1)$.

设 $q = 2, 3$.

下面证明: $q \nmid 2p-1$.

由于 $q \mid x_p$, 即 $q \mid b_p$, 从而, 数列 $\{b_n\}$ 中有被 q 整除的项. 设 d 为最小的正整数, 使得 $q \mid b_d$. 有下面的引理.

引理 对正整数 n , 当且仅当 $d \mid n$ 时, 有 $q \mid b_n$.

引理的证明: 对整数 a, b, c, d , 用记号

$$a + b\sqrt{2} \equiv c + d\sqrt{2} \pmod{q}$$

表示 $a \equiv c \pmod{q}, b \equiv d \pmod{q}$.

若 $d \mid n$, 设 $n = du$. 则

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^{du} \equiv a_d^u \pmod{q}.$$

故 $b_n \equiv 0 \pmod{q}$.

反之, 若 $q \nmid b_n$, 设 $n = du + r (0 < r < d)$.

若 $r = 1$, 则由

$$\begin{aligned} a_n &\equiv (3+2\sqrt{2})^n \\ &\equiv (3+2\sqrt{2})^{du} (3+2\sqrt{2})^r \\ &\equiv a_d^u (a_r + b_r\sqrt{2}) \pmod{q}, \end{aligned}$$

可知 $a_d^u b_r \equiv 0 \pmod{q}$.

但 $a_d^2 - 2b_d^2 = 1$, 而 $q \mid b_d$, 故 $q \nmid a_d^2$.

因为 q 是质数, 所以, $q \nmid a_d$.

进而, $(q, a_d^u) = 1$.

故由式 知 $q \mid b_r$, 与 d 的定义相违.

因此, $r = 0$, 即 $d \mid n$. 引理得证.

回到原题.

因为 q 是质数, 所以, $C_q^i (1 \leq i \leq q-1)$

都是 q 的倍数.

又 $q = 2, 3$, 由费马小定理知

$$3^q \equiv 3 \pmod{q}, 2^q \equiv 2 \pmod{q}.$$

进而, $2^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{q}$.

由二项式定理得

$$\begin{aligned} (3+2\sqrt{2})^q &= \sum_{i=0}^q C_q^i 3^{q-i} (2\sqrt{2})^i \\ 3^q + (2\sqrt{2})^q &= 3^q + 2^q 2^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{2} \\ &\equiv 3 \pm 2\sqrt{2} \pmod{q}. \end{aligned}$$

因而, 类似于式 的处理可得

$$(3+2\sqrt{2})^{q^2} \equiv (3 \pm 2\sqrt{2})^q \equiv 3+2\sqrt{2} \pmod{q}.$$

由式 得

$$(a_{q^2-1} + b_{q^2-1}\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) \equiv 3+2\sqrt{2} \pmod{q}.$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 3a_{q^2-1} + 4b_{q^2-1} \equiv 3 \pmod{q}, \\ 2a_{q^2-1} + 3b_{q^2-1} \equiv 2 \pmod{q}. \end{cases}$$

进而, $q \mid b_{q^2-1}$.

又 $q \mid b_p$, 故由引理得 $d \mid p$.

因为 q 是质数, 所以, $d = 1$ 或 p .

若 $d = 1$, 则 $q \mid b_1 = 2$, 这与假设不符. 故 $d = p$. 但 $q \mid b_{q^2-1}$, 故由引理知 $d \mid (q^2 - 1)$, 即 $p \mid (q^2 - 1)$. 从而, $p \mid (q-1)$ 或 $p \mid (q+1)$.

注意到 $q-1$ 和 $q+1$ 都是偶数, 于是,

$$q = 2p-1.$$

三、引理 1 若正整数集 \mathbb{N}_+ 中存在一个无穷的等差数列, 则结论成立.

事实上, 设无穷序列 $c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots$ 是一个 \mathbb{N}_+ 中的红色的等差数列. 则取 $a_i = c_{2i-1} (i \in \mathbb{N}_+)$, 便得到一个满足要求的无穷的红色正整数序列

$$a_1 < \frac{a_1 + a_2}{2} < a_2 < \frac{a_2 + a_3}{2} < a_3 < \dots$$

引理 2 若对任意 $i \in \mathbb{N}_+$, 存在 $j \in \mathbb{N}_+$ ($j > i$), 使得 $i, \frac{i+j}{2}, j$ 同色, 则结论成立.

事实上, 取 $a_1 = 1$, 并设 a_1 为红色.

由于存在 $k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a_1, \frac{a_1+k}{2}, k$ 同

色,因此,可取 $a_2 = k$;再由存在 $l \in \mathbf{N}_+$,使得 $a_2, \frac{a_2 + l}{2}, l$ 同色,因此,可取 $a_3 = l$;如此下去,便得到一个满足要求的无穷的红色正整数序列

$$a_1 < \frac{a_1 + a_2}{2} < a_2 < \frac{a_2 + a_3}{2} < a_3 < \dots$$

引理 3 若 \mathbf{N}_+ 中不存在无穷项的同色的等差数列,且存在 $i_0 \in \mathbf{N}_+$,使得对任意 $j \in \mathbf{N}_+ (j > i_0)$,得 $i_0, \frac{i_0 + j}{2}, j$ 不同色(即引理 1, 2 的条件不成立),则存在一个同色的奇数的无穷正整数序列满足要求.

事实上,不妨设 $i_0 = 1$. 否则,考虑

$$\{i \cdot i_0 \mid i = 1, 2, \dots\}$$

而不改变问题的性质.

设 1 为红色. 则对任意 $j \in \mathbf{N}_+ (j \geq 2)$,都有

$j, 2j - 1$ 不同为红色.

由于不存在无穷项的同色的等差数列,则 \mathbf{N}_+ 中存在无穷多个蓝色的奇数. 任取其中一个记为 a_1 .

下面证明:存在以 a_1 为首项的无穷奇数数列 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$,使得无穷序列

$$a_1 < \frac{a_1 + a_2}{2} < a_2 < \frac{a_2 + a_3}{2} < a_3 < \dots$$

的所有项都为蓝色.

对 n 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时, a_1 的存在性已证.

假设蓝色的奇数数列 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 存在. 接下来证明满足要求的 a_{n+1} 一定存在.

(1) 先考虑对任意 $i \in \mathbf{N}_+$, $a_n + i, a_n + 2i$ 不同色的情况.

假设此时没有满足要求的 a_{n+1} ,即不存在 $a_{n+1} > a_n$,使得

$$a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1} \text{ 同为蓝色.}$$

由于不存在无穷项的同色的等差数列,则 \mathbf{N}_+ 中红蓝两色的数均有无穷多个. 故存在某个 i ,使得 $a_n + i$ 为红色,此时, $a_n + 2i$ 为蓝色. 记 $a_n = 2k + 1$. 则现有 $2k + 1$ 为蓝色, $2k + i + 1$ 为红色, $2k + 2i + 1$ 为蓝色. 由知

$$2(2k + i + 1) - 1 = 4k + 2i + 1$$

为蓝色. 再由知

$$\frac{(2k + 1) + (4k + 2i + 1)}{2} = 3k + i + 1$$

为红色. 再由知

$$2(3k + i + 1) - 1 = 6k + 2i + 1$$

为蓝色. 如此递归下去,便得到一个蓝色的无穷序列 $\{2nk + 2i + 1\}_{n=1}$,它们的所有项都是蓝色,但注意到它是一个等差数列,矛盾. 这说明满足要求的 a_{n+1} 一定存在.

(2) 再考虑存在 $i \in \mathbf{N}_+$,使得 $a_n + i, a_n + 2i$ 同色的情况.

设 $a_n = 2k + 1$.

(i) 若 $a_n + i, a_n + 2i$ 同为蓝色,则取 $a_{n+1} = a_n + 2i$ 即可.

(ii) 若 $a_n + i, a_n + 2i$ 同为红色,由知

$$2(2k + i + 1) - 1 = 4k + 2i + 1$$

及 $2(2k + 2i + 1) - 1 = 4k + 4i + 1$

均为蓝色.

因此,若

$$\frac{(2k + 1) + (4k + 4i + 1)}{2} = 3k + 2i + 1$$

为蓝色,取 $a_{n+1} = 4k + 4i + 1$ 即可;若

$$\frac{(2k + 1) + (4k + 4i + 1)}{2} = 3k + 2i + 1$$

为红色,再由知

$$2(3k + 2i + 1) - 1 = 6k + 4i + 1$$

为蓝色. 此时,

$$\frac{(2k + 1) + (6k + 4i + 1)}{2} = 4k + 2i + 1$$

为蓝色,取 $a_{n+1} = 6k + 4i + 1$ 即可.

至此引理 3 证完.

综上所述三个引理便知结论成立.

第二天

四、首先,当 $n = 3$ 时,对 n 用数学归纳法证明下述命题:

对任意的正整数 $n (n \geq 3)$, 可以将集合 $G_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的全部非空子集排成一个序列 $P_1, P_2, \dots, P_{2^n-1}$, 使得对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, 2^n - 2\}$, 总有

$$|P_i \setminus P_{i+1}| = 1, \text{ 且 } P_1 = \{1\}, P_{2^n-1} = G_n.$$

当 $n = 3$ 时, 序列 $\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}$ 满足要求.

假设当 $n = k (k \geq 3)$ 时, 存在 G_k 的非空子集的序列 $P'_1, P'_2, \dots, P'_{2^k-1}$ 满足要求, 其中, $P'_1 = \{1\}, P'_{2^k-1} = G_k$.

对于 $n = k + 1$, 构造如下序列:

$$P'_1, P'_{2^k-1}, P'_{2^k-2} \setminus \{k+1\}, P'_{2^k-3},$$

$$P'_{2^k-4} \setminus \{k+1\}, P'_{2^k-5}, \dots, P'_3,$$

$$P'_2 \setminus \{k+1\}, \{k+1\}, P'_1 \setminus \{k+1\}, P'_2,$$

$$P'_3 \setminus \{k+1\}, P'_4, \dots, P'_{2^k-2}, P'_{2^k-1}$$

$\{k+1\}$.

显然, $P_1 = P'_1 = \{1\}$,

$$P_{2^{k+1}-1} = P'_{2^k-1} \setminus \{k+1\} = G_{k+1}.$$

因为 $P'_i \setminus P'_{i+1} = P'_i$,

$$P'_{r+1} \setminus (P'_r \setminus \{k+1\}) = P'_{r+1} \setminus P'_r,$$

$$(P'_2 \setminus \{k+1\}) \setminus \{k+1\} = \{k+1\}$$

$$= \{k+1\} \setminus (P'_1 \setminus \{k+1\}),$$

$$P'_r \setminus (P'_{r+1} \setminus \{k+1\}) = P'_r \setminus P'_{r+1}, r = 2^k - 2.$$

所以, 由归纳假设, 序列 满足要求.

由数学归纳法, 命题得证.

回到原题.

仍用数学归纳法证明下述加强命题:

对任意的正整数 $n (n \geq 4)$, 可以将集合 $G_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的全部元素个数不小于 2 的子集排成一序列 $P_1, P_2, \dots, P_{2^n-n-1}$, 使得

$$|P_i \setminus P_{i+1}| = 2 (i = 1, 2, \dots, 2^n - n - 2),$$

且 $P_{2^n-n-1} = \{1, n\}$.

当 $n = 4$ 时, 序列

$$\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4\},$$

$$\{1, 3, 4\}, \{1, 4\}$$

满足要求.

假设 $n = k (k \geq 4)$ 时, 存在序列 $P_1, P_2, \dots, P_{2^k-k-1}$ 满足要求, 且 $P_{2^k-k-1} = \{1, k\}$.

对于 $n = k + 1$, 知道 $G_{k+1} = G_k \setminus \{k+1\}$ 的全部子集可以分为两类: 一类都不含元素 $k+1$, 而另一类都含元素 $k+1$. 由前述命题, 存在 G_k 的全部非空子集排成一个序列 $q_1, q_2, \dots, q_{2^k-1}$, 使得对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, 2^k - 2\}$, 总有

$$|q_i \setminus q_{i+1}| = 1, \text{ 且 } q_1 = G_k, q_{2^k-1} = \{1\}.$$

于是, 有序列

$$P_1, P_2, \dots, P_{2^k-k-1}, q_1 \setminus \{k+1\},$$

$$q_2 \setminus \{k+1\}, \dots, q_{2^k-1} \setminus \{k+1\}.$$

由归纳假设及命题知, 上述序列满足要求, 且

$$P_{2^{k+1}-(k+1)-1} = q_{2^k-1} \setminus \{k+1\}$$

$$= \{1, k+1\}.$$

由数学归纳法, 原命题得证.

五、 f 的最大值为 1.

先证明 $f \leq 1$.

这等价于

$$n \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right)^2 + m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \right)^2 + mn \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2.$$

$$\text{记 } G = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \right)^2 + mn \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 -$$

$$n \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right)^2 - m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)^2.$$

只需证明 $G \geq 0$.

现将所有的 a_{ij} 排成一个 n 行 m 列的数表, 使 a_{ij} 位于第 i 行第 j 列. 考虑数表中位置构成矩形的 4 个数 $a_{pq}, a_{pr}, a_{sq}, a_{sr}$, 并把它们叫做一个矩形数组, 记作 $[psqr]$, 其中, $1 \leq p < s \leq n, 1 \leq q < r \leq m$.



记 $G^* = \sum_{[psqr]} (a_{pq} + a_{sr} - a_{pr} - a_{sq})^2$, 其中, 求和跑遍所有的矩形数组 $[psqr]$.

下面证明: $G = G^*$.

首先, 比较形如 a_{ij}^2 项的系数. 对确定的 i, j , 易见 G 中 a_{ij}^2 项的系数为 $mn + 1 - m - n$. 而在 G^* 中, 因为以 a_{ij} 为一个顶点的矩形数组恰有 $(m-1)(n-1)$ 个, 所以, G^* 中 a_{ij}^2 项的系数为

$$(m-1)(n-1) = mn + 1 - m - n.$$

这说明 G 和 G^* 中 a_{ij}^2 项的系数相等.

其次, 比较形如 $a_{ij}a_{ik} (j \neq k)$ 项的系数. G 中的系数为 $-2(n-1)$, 而 G^* 中这种项对应的矩形数组 $[psqr]$ 中还有一个行标 s 有 $n-1$ 种选择, 因此, 它在 G^* 中的系数也为 $-2(n-1)$. 这表明 G 和 G^* 中形如 $a_{ij}a_{ik} (j \neq k)$ 项的系数相等.

再次, 与上述类似, G 和 G^* 中形如 $a_{ik}a_{jk} (i \neq j)$ 项的系数都为 $-2(m-1)$.

最后, G 和 G^* 中形如 $a_{pq}a_{st} (p \neq s, q \neq t)$ 项的系数都为 2.

综上所述, 式 (1) 成立.

从而, $G \geq 0$, 亦即式 (1) 得证.

当所有 $a_{ij} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$ 均为 1 时, $f=1$, 故 f 的最大值为 1.

$$f \text{ 的最小值为 } \frac{m+n}{mn + \min\{m, n\}}.$$

$$\text{先证明: } f \geq \frac{m+n}{mn + \min\{m, n\}}.$$

不妨设 $n \leq m$. 此时, 只需证明

$$f \geq \frac{m+n}{mn+n}.$$

$$\text{记 } S = \frac{n^2(m+1)}{m+n} \sum_{i=1}^n r_i^2 + \frac{mn(m+1)}{m+n} \sum_{j=1}^m c_j^2 - \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \right]^2 - mn \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2,$$

其中, $r_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} (i=1, 2, \dots, n)$, $c_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} (j=1, 2, \dots, m)$. 欲证式 (2), 只需证明

$$S \geq 0.$$

在拉格朗日恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} (a_k b_l - a_l b_k)^2$$

中, 令 $a_i = r_i, b_i = 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 得

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \right]^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2 + \sum_{1 \leq k < l \leq n} (r_k - r_l)^2.$$

将上式代入 S 的表达式可得

$$S = \frac{mn(n-1)}{m+n} \sum_{i=1}^n r_i^2 + \frac{mn(m+1)}{m+n} \sum_{j=1}^m c_j^2 - mn \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 + \sum_{1 \leq k < l \leq n} (r_k - r_l)^2.$$

因为 $mn = \frac{mn(n-1)}{m+n} + \frac{mn(m+1)}{m+n}$, 所以, 上面的 S 可重写为

$$S = \frac{mn(n-1)}{m+n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} (r_i - a_{ij}) + \frac{mn(m+1)}{m+n} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} (c_j - a_{ij}) + \sum_{1 \leq k < l \leq n} (r_k - r_l)^2.$$

因为所有的 $a_{ij} \geq 0$, 且 $r_i - a_{ij} \geq 0, c_j - a_{ij} \geq 0 (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$, 故由式 (3) 便知 $S \geq 0$, 即式 (2) 成立.

当 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, 其他元素都取 0 时, $f = \frac{m+n}{mn+n}$, 所以, f 的最小值为 $\frac{m+n}{mn+m}$.

同理, 当 $n \leq m$ 时, f 的最小值为 $\frac{m+n}{mn+m}$.

$$\text{因此, } f \text{ 的最小值为 } \frac{m+n}{mn + \min\{m, n\}}.$$

六、引理 $\max_{1 \leq k \leq n} \{a_k\} < 2$,

$$\max_{1 \leq k \leq n} \{b_k\} < \frac{2}{n-1}.$$

引理的证明: 令 $L = \max_{1 \leq k \leq n} \{a_k\}$. 由 (2) 得

$$L^2 \leq 1 + L, \text{ 所以, } L < 2.$$

令 $b_m = \max_{1 \leq k \leq n} \{b_k\}$. 由 (1) 得



$$b_k \begin{cases} \frac{(k-1)b_m + (m-k)b_1}{m-1} > \frac{k-1}{m-1} b_m, & 1 < k < m; \\ \frac{(k-m)b_n + (n-k)b_m}{n-m} > \frac{n-k}{n-m} b_m, & m < k < n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } 1 &= \prod_{k=1}^n b_k = \prod_{k=1}^m b_k + \prod_{k=m+1}^n b_k \\ &> \frac{m}{2} b_m + \frac{n-m-1}{2} b_m = \frac{n-1}{2} b_m. \end{aligned}$$

此即 $b_m < \frac{2}{n-1}$. 引理得证.

回到原题.

令 $f_0 = 1$,

$$f_k = 1 + \prod_{i=1}^k a_i b_i \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

$$\text{则 } f_k - f_{k-1} = a_k b_k \quad b_k \sqrt{f_k}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \sqrt{f_k} - \sqrt{f_{k-1}} &= b_k \cdot \frac{\sqrt{f_k}}{\sqrt{f_k} + \sqrt{f_{k-1}}} \\ &= b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{f_k - f_{k-1}}{2(\sqrt{f_k} + \sqrt{f_{k-1}})^2} \right] \\ &< b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{2b_k}{2(\sqrt{f_k} + \sqrt{f_{k-1}})^2} \right] \end{aligned}$$

$$< b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{b_k}{4} \right]$$

$$< b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right].$$

对 k 从 1 到 n 求和得

$$\begin{aligned} M &= a_n \sqrt{f_n} \\ &< \sqrt{f_0} + \sum_{k=1}^n b_k \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

由 n 的任意性得 $M_{\max} = \frac{3}{2}$.

$M = \frac{3}{2}$ 是能够达到的. 例子如下:

$$a_k = 1 + \frac{k}{2n}, \quad b_k = \frac{1}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$\text{则 } a_k^2 = \left(1 + \frac{k}{2n} \right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i}{2n} \right)$$

成立.

综上所述, M 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

(熊斌提供)

征 稿 启 事

本刊是以报道中学数学课外活动和数学竞赛为中心内容的专业刊物。欢迎作者为数学活动课程讲座、命题与解题、我为数学竞赛命题、巧思妙解、赛题新解、课外训练、数学奥林匹克问题、数海拾贝、缤纷广角镜等栏目撰稿,欢迎更多的作者撰写适合初中生阅读的、内容充实的专题讲座和解题指导性文章。来稿时请注意以下各项:

1. 稿件的内容要新颖,形式要活泼,提倡短小精悍,讲清一、两个问题,不要“大而全”。来稿一般不超过3 000字,长文不超过4 000字。

2. 讲座稿应附有相应的练习题(5~7个),并随练习题给出答案或提示。

3. 文中例题最好选用国内外的竞赛试题,并注意标出竞赛名称(全称)、届次和时间。

4. 凡为本刊课外训练和数学奥林匹克问题栏目提供的稿件,请注意:试题内容范围以中国数学会普及工作委员会制定的《数学竞赛大纲》为准;题目要有新意(不能用成题),需注明是自编或改编,改编题需注明原出处。为数学奥林匹克问题栏目投稿时,题目要一式两份。

5. 来稿请用16开稿纸誊写,字迹清晰,书写格式规范,插图力求准确并随文绘出;电脑打印稿以小四号字为宜(要留有适当的行距),要求排版规范,外文字母的正斜体、大小写、上下角标清楚、准确。

6. 参考文献请用顺序编码制,在正文引用处注明。

7. 本刊已加入多个数据库并在网上发行,如作者不同意所著文章被数据库收录,请在来稿时声明。来稿三个月未收到录用通知的,可自行处理,恕不退稿。为联系方便,请注明联系电话。

本刊编辑部



2009年 IMO中国国家选拔考试

第一天

1. 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, 满足 $\angle CAD = \angle CBA$. $\odot O$ 经过点 B, D , 并分别与线段 AB, AD 交于点 E, F , BF, DE 交于点 G , M 是 AG 的中点. 求证: $CM \perp AO$.

(熊斌 供题)

2. 给定整数 $n (n \geq 2)$. 求具有下述性质的最大常数 $\lambda(n)$: 若实数序列 a_0, a_1, \dots, a_n 满足 $0 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ 及

$$a_i \geq \frac{1}{2} (a_{i+1} + a_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

$$\text{则 } \left(\sum_{i=1}^n ia_i \right)^2 \geq \lambda(n) \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

(朱华伟 供题)

3. 求证: 对于任意的奇质数 p , 满足 $p | (n! + 1)$ 的正整数 n 的个数不超过 $cp^{\frac{2}{3}}$, 这里, c 是一个与 p 无关的常数.

(余红兵 供题)

第二天

4. 设正实数 a, b 满足 $b - a > 2$ 求证: 对区间 $[a, b)$ 中任意两个不同的整数 m, n , 总存在一个由区间 $[ab, (a+1)(b+1))$ 中某些整数组成的 (非空) 集合 S , 使得

$$\prod_{\substack{j \in S \\ mn}} x$$

是一个有理数的平方.

(余红兵 供题)

5. 设 m 是大于 1 的整数, n 是一个奇数且 $3 \leq n < 2m$. 数 $a_{i,j} (i, j \in \mathbf{N}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 满足

(1) 对于任意的 $j (1 \leq j \leq n)$, $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{m,j}$ 是 $1, 2, \dots, m$ 的一个排列;

(2) 对于任意的 $i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1)$, 有 $|a_{i,j} - a_{i,j+1}| \leq 1$.

$$\text{求 } M = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{i,j} \text{ 的最小值.}$$

(付云皓 供题)

6. 求证: 在 40 个不同的正整数所组成的等差数列中, 至少有一项不能表示成 $2^k + 3^l (k, l \in \mathbf{N})$ 的形式.

(陈永高 供题)

参考答案

第一天

1. 如图 1, 联结 EF 并延长交 BC 于点 P , 联结 GP 交 AD 于点 K , 并交 AC 的延长线于点 L .

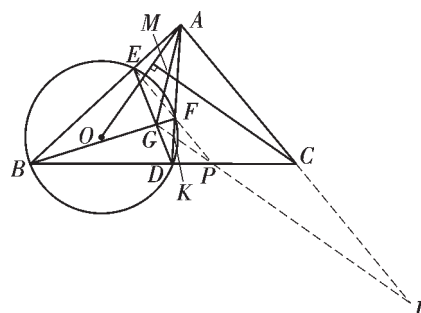


图 1

如图 2, 在 AP 上取一点 Q , 满足 $\angle PQF = \angle AEF = \angle ADB$.

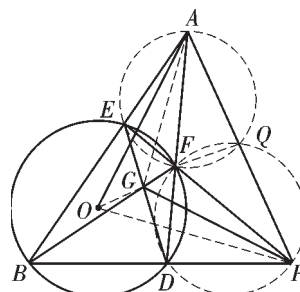


图 2

易知 A, E, F, Q 和 F, D, P, Q 分别四点共圆. 记 $\odot O$ 的半径为 r 根据圆幂定理知

$$\begin{aligned} AP^2 &= AQ \cdot AP + PQ \cdot AP \\ &= AF \cdot AD + PF \cdot PE \\ &= (AO^2 - r^2) + (PO^2 - r^2). \end{aligned} \quad (1)$$

类似得

$$AG^2 = (AO^2 - r^2) + (GO^2 - r^2). \quad (2)$$

由式①、②得 $AP^2 - AG^2 = PO^2 - GO^2$.

于是,由平方差原理即知 $PG \perp AO$.

如图 3,

对 $\triangle PFD$ 及截线 AEB 应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{DA}{AF} \cdot \frac{FE}{EP} \cdot \frac{PB}{BD} = 1. \quad (3)$$

对 $\triangle PFD$ 及形外一点 G 应用塞瓦定理得

$$\frac{DK}{KF} \cdot \frac{FE}{EP} \cdot \frac{PB}{BD} = 1. \quad (4)$$

③ ÷ ④ 即得

$$\frac{DA}{AF} = \frac{DK}{KF}. \quad (5)$$

式⑤表明 A 与 K, F 与 D 构成调和点列,即 $AF \cdot KD = AD \cdot FK$

再代入点列的欧拉公式知

$$AK \cdot FD = AF \cdot KD + AD \cdot FK = 2AF \cdot KD. \quad (6)$$

而由 B, D, F, E 四点共圆得

$$\angle DBA = \angle EFA.$$

$$\text{又} \angle CAD = \angle CBA, \text{故}$$

$$\angle CAF = \angle EFA,$$

这表明 $AC \parallel EP$. 由此,

$$\frac{CP}{PD} = \frac{AF}{FD}. \quad (7)$$

在 $\triangle ACD$ 中,对于截线 LPK 应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DK}{KA} = 1. \quad (8)$$

将式⑥、⑦代入上式即得 $\frac{AL}{LC} = 2$

最后,在 $\triangle AGL$ 中,由 M, C 分别是 AG, AL 的中点,知 MC 是其中位线,得

$$MC \parallel GL.$$

而已证 $GL \perp AO$, 因此, $MC \perp AO$.

$$2\lambda(n) = \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

首先,令 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. 得

$$\lambda(n) \leq \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

接下来证明:对任何满足条件的序列 a_0, a_1, \dots, a_n , 有不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n ia_i\right)^2 \geq \frac{n(n+1)^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (1)$$

$$\text{首先证明: } a_1 \geq \frac{a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{n}.$$

事实上,由条件有 $2ia_i \geq i(a_{i+1} + a_{i-1})$ 对任意的 $i(i=1, 2, \dots, n-1)$ 成立.

对于给定的正整数 $l(1 \leq l \leq n-1)$, 将此式对 $i(i=1, 2, \dots, l)$ 求和得

$$(l+1)a_l \geq la_{l+1},$$

即 $\frac{a_l}{l} \geq \frac{a_{l+1}}{l+1}$ 对任意的 $l(l=1, 2, \dots, n-1)$ 成立.

再证明:对于 $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若

$$i > j \text{ 则 } \frac{2ik^2}{i+k} > \frac{2jk^2}{j+k}$$

事实上,上式等价于

$$2ik^2(j+k) > 2jk^2(i+k),$$

即 $(i-j)k^3 > 0$, 显然成立.

现在证明式①

对于 $i, j(1 \leq i < j \leq n)$, 来估计 $a_i a_j$ 的下界.

$$\text{由前述知 } \frac{a_i}{i} \geq \frac{a_j}{j}, \text{ 即}$$

$$ja_i - ia_j \geq 0$$

因为 $a_i - a_j \leq 0$, 所以,

$$(ja_i - ia_j)(a_j - a_i) \geq 0,$$

$$\text{即 } a_i a_j \geq \frac{i}{i+j} a_j^2 + \frac{j}{i+j} a_i^2.$$

这样有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n ia_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ija_i a_j \\ &\geq \sum_{i=1}^n i^2 a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\frac{i}{i+j} a_j^2 + \frac{j}{i+j} a_i^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[a_i^2 \sum_{k=1}^n \frac{2ik^2}{i+k} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{记 } b_i = \sum_{k=1}^n \frac{2ik^2}{i+k}$$

由前面证明知 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

又 $a_1^2 \leq a_2^2 \leq \dots \leq a_n^2$, 由契比雪夫不等式有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

$$\text{因此, } \left(\sum_{i=1}^n ia_i \right)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \sum_{i=1}^n b_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{2ik^2}{i+k} \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{i^2 j}{i+j} + \frac{j^2 i}{i+j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \\ &= \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \left(\sum_{i=1}^n ia_i \right)^2 \geq \frac{n(n+1)^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

故式 ①得证.

$$\text{综上所述, } \lambda(n) = \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

3. 显然, 符合要求的 n 应满足

$$1 \leq n \leq p-1.$$

设这样的 n 的全体是

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k.$$

只须证明 $k \leq 12p^3$.

当 $k \leq 12$ 时, 结论是显然成立的.

下设 $k > 12$

将 $n_{i+1} - n_i$ ($1 \leq i \leq k-1$) 重排成不减的数列 $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{k-1}$, 则显然有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i &= \sum_{i=1}^{k-1} (n_{i+1} - n_i) \\ &= n_k - n_1 < p \end{aligned} \tag{1}$$

首先证明: 对 $s \geq 1$, 有

$$|\{1 \leq i \leq k-1: \mu_i = s\}| \leq s, \tag{2}$$

即等于给定的 s 的 μ_i 至多有 s 个.

事实上, 设 $n_{i+1} - n_i = s$ 则

$$n_i! + 1 \equiv n_{i+1}! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

由此知 $(p, n_i!) = 1$.

故 $(n_i + s)(n_i + s - 1) \dots (n_i + 1) \equiv 1 \pmod{p}$.

从而, n_i 是 s 次同余方程

$(x+s)(x+s-1) \dots (x+1) \equiv 1 \pmod{p}$ 的一个解.

又 p 是质数, 由拉格朗日定理知, 上述同余方程至多有 s 个解.

故满足 $n_{i+1} - n_i = s$ 的 n_i 至多只有 s 个值.

从而, 式 ②得证.

再证明: 对任意的正整数 l , 只要 $\frac{l(l+1)}{2} + 1 \leq k-1$, 就有 $\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1} \geq l+1$.

假设结论不成立, 即 $\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1} \leq l$ 则 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$ 都是 1 到 l 中的正整数.

而由式 ②知, 在 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$ 中, 1 至多出现 1 次, 2 至多出现 2 次, \dots, l 至多出现 l 次, 即从 1 到 l 的正整数总共至多出现 $1+2+\dots+l = \frac{l(l+1)}{2}$ 次, 这与

$\frac{l(l+1)}{2} + 1$ 个数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$ 都是不超过 l 的正整数矛盾.

设 m 是满足 $\frac{m(m+1)}{2} + 1 \leq k-1$ 的最大正整数. 则

$$\frac{m(m+1)}{2} + 1 \leq k-1 < \frac{(m+1)(m+2)}{2} + 1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i &\geq \sum_{i=0}^{m-1} \left[\mu_{\frac{i(i+1)}{2}+1} + \mu_{\frac{i(i+1)}{2}+2} + \dots + \mu_{\frac{i(i+1)}{2}+i} \right] \\ &\geq \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) \mu_{\frac{i(i+1)}{2}+1} \\ &\geq \sum_{i=0}^{m-1} (i+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} > \frac{m^3}{3}. \end{aligned}$$

由于 $k > 12$, 故 $m \geq 4$

因此, 结合式 ①、③得

$$k < 2 + \frac{(m+1)(m+2)}{2} < 4m^2$$

$$< 4 \left(3 \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \right)^2 < 4(3p)^2.$$

这就证明了结论.



第二天

4. 先证明一个引理.

引理 设整数 u 满足 $a \leq u < u+1 < b$ 则区间 $[ab, (a+1)(b+1))$ 中有两个不同整数 x, y , 使得 $\frac{xy}{u(u+1)}$ 是一个整数的平方.

引理的证明: 取 v 是大于或等于 $\frac{ab}{u}$ 的最小整数, 即整数 v 满足

$$\begin{aligned} \frac{ab}{u} \leq v < \frac{ab}{u} + 1 \\ \Rightarrow ab \leq uv < ab + u \quad (< ab + a + b + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{故 } ab < (u+1)v = uv + v < ab + u + \frac{ab}{u} + 1 \\ < ab + a + b + 1 \quad (\text{因 } a \leq u < b). \end{aligned} \quad (2)$$

这里, 应用了一个熟知的事实, 函数 $f(t) = t + \frac{ab}{t}$ ($a \leq t \leq b$) 在 $t=a$ 或 b 时取得最大值.

由式 (1)、(2) 知, uv 和 $(u+1)v$ 为区间 $I = [ab, (a+1)(b+1))$ 中的两个不同整数. 取 $x = uv, y = (u+1)v$, 则 $\frac{xy}{u(u+1)} = v^2$ 是一个整数的平方.

回到原题.

设 $m < n$ 则 $a \leq m \leq n-1 < b$

由引理知, 对于 $k=m, m+1, \dots, n-1$, 分别有区间 $[ab, (a+1)(b+1))$ 中的两个不同整数 x_k, y_k , 都存在一个整数 A_k , 使得

$$\frac{x_k y_k}{k(k+1)} = A_k^2.$$

将所有这些等式相乘得

$$\frac{\prod_{k=m}^{n-1} x_k y_k}{mn(m+1)^2 \cdots (n-1)^2} = \prod_{k=m}^{n-1} A_k^2$$

是一个整数的平方.

令 S 为 x_i, y_i ($m \leq i \leq n-1$) 中出现奇数次的数的集合.

若 S 非空, 则由上式易知, $\prod_{i \in S} x_i$ 是一

个有理数的平方.

若 S 是空集, 则 mn 是一个整数的平方.

而由 $a+b > 2\sqrt{ab}$, 知

$$ab + a + b + 1 > ab + 2\sqrt{ab} + 1,$$

即 $\sqrt{(a+1)(b+1)} > \sqrt{ab} + 1$,

即区间 $[\sqrt{ab}, \sqrt{(a+1)(b+1)})$ 中至少有一个整数. 故在区间 $[ab, (a+1)(b+1))$ 中至少有一个完全平方数.

设 $r^2 \in [ab, (a+1)(b+1))$ ($r \in \mathbf{Z}$), 令

$S' = \{r^2\}$, 则 $\prod_{i \in S'} x_i$ 是一个有理数的平方.

5. 令 $n = 2l+1$.

由 $3 \leq n < 2m$, 得 $1 \leq l \leq m-1$.

下面先估计 M 的下界.

由 (1) 知存在唯一的一个 i_0 ($1 \leq i_0 \leq m$), 使 $a_{i_0, l+1} = m$.

考虑 a_{i_0} 与 $a_{i_0, l+2}$.

情形 1: $a_{i_0, l}$ 与 $a_{i_0, l+2}$ 中至少有一个为 m .

由对称性不妨设 $a_{i_0, l} = m$.

由 (2) 有

$$a_{i_0, l-1} \geq m-1, a_{i_0, l-2} \geq m-2, \dots$$

$$a_{i_0, 1} \geq m-l+1,$$

及 $a_{i_0, l+2} \geq m-1, a_{i_0, l+3} \geq m-2, \dots$

$$a_{i_0, 2l+1} \geq m-l$$

$$\text{故 } M \geq \sum_{j=1}^n a_{i_0, j}$$

$$\geq (m-l) + 2[(m-l+1) +$$

$$(m-l+2) + \dots + m]$$

$$= (2l+1)m - l.$$

情形 2: $a_{i_0, l}$ 与 $a_{i_0, l+2}$ 都不为 m .

由 (1) 知存在 i_1 ($1 \leq i_1 \leq m, i_1 \neq i_0$), 使

$$a_{i_1, l} = m.$$

由 (1)、(2) 易知

$$a_{i_1, l+1} = m-1, a_{i_1, l+2} = m.$$

再利用 (2) 有

$$a_{i_1, l-1} \geq m-1, a_{i_1, l-2} \geq m-2, \dots$$

$$a_{i_1, 1} \geq m-l+1,$$

及 $a_{i_1, l+3} \geq m-1, a_{i_1, l+4} \geq m-2, \dots$

$$a_{i_1, 2l+1} \geq m-l+1.$$

$$\text{故 } M \geq \sum_{j=1}^n a_{i_1, j}$$

$$\begin{aligned} &\geq 2 [(m - l + 1) + (m - l + 2) + \dots + m] + (m - 1) \\ &= (2l + 1)m - (l - l + 1). \end{aligned}$$

综合情形 1、2 知 $M \geq (2l + 1)m - l$.

另一方面, 令

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= f(2i + j) = 2i + j (2i + j \leq m), \\ a_{i,j} &= f(2i + j) \\ &= (2m + 1) - (2i + j) (m + 1 \leq 2i + j \leq 2m), \\ a_{i,j} &= f(2i + j) \\ &= (2i + j) - 2m (2m + 1 \leq 2i + j \leq 3m), \\ a_{i,j} &= f(2i + j) = (4m + 1) - (2i + j) \\ &(3m + 1 \leq 2i + j \leq 4m). \end{aligned}$$

于是, 对于任意的 $i, j (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1)$, 若 $m \nmid (2i + j)$, 则

$$\begin{aligned} &|a_{i,j} - a_{i,j+1}| \\ &= |f(2i + j) - f(2i + j + 1)| = 1; \end{aligned}$$

若 $m \mid (2i + j)$, 则

$$\begin{aligned} &|a_{i,j} - a_{i,j+1}| \\ &= |f(2i + j) - f(2i + j + 1)| = 0 \end{aligned}$$

即 (2) 成立.

接下来证明 (1) 成立.

事实上, 只须证明对任意的整数 $j (1 \leq j \leq n)$ 及 $k (1 \leq k \leq m)$, 存在一个整数 $i (1 \leq i \leq m)$, 使得 $a_{i,j} = k$ 即可.

当 $j \equiv k \pmod{2}$ 时, 由 $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$ 及 $n < 2m$, 知 $-2m < k - j < m$. 故

$$-m < \frac{k - j}{2} < m,$$

且 $\frac{k - j}{2}$ 是一个整数.

因此, $\frac{k - j}{2}$ 与 $\frac{k - j}{2} + m$ 至少有一个在集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 中, 取这个数为 i 即可.

当 $j \not\equiv k \pmod{2}$ 时, 由 $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$ 及 $n < 2m$, 知

$$-2m < (2m + 1) - (j + k) < 2m.$$

$$\text{因此, } -m < \frac{(2m + 1) - (j + k)}{2} < m,$$

且 $\frac{(2m + 1) - (j + k)}{2}$ 是一个整数.

$$\text{故 } \frac{(2m + 1) - (j + k)}{2} \text{ 与 } \frac{(2m + 1) - (j + k)}{2} + m$$

至少有一个在集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 中, 取这个数为 i 即可.

现在, 估计此时的 M .

由于 (1) 成立, 故对任意的 $1 \leq i_1 < i_2 \leq m, 1 \leq j \leq n$, 有

$$f(2i_1 + j) \neq f(2i_2 + j),$$

即对于奇偶性相同且满足 $3 \leq x < y \leq 2m + n$ 及 $y - x < 2m$ 的整数 x, y , 有

$$f(x) \neq f(y).$$

因此, 对于给定的 $i, a_{i,1}, a_{i,3}, \dots, a_{i,2l+1}$ 两两不同, $a_{i,2}, a_{i,4}, \dots, a_{i,2l}$ 两两不同. 于是,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n a_{i,j} \\ &\leq (m - l) + 2 [(m - l + 1) + (m - l + 2) + \dots + m] \\ &= (2l + 1)m - l. \end{aligned}$$

$$\text{此时, } M = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq (2l + 1)m - l.$$

综上, M 的最小值为

$$(2l + 1)m - l = mn - \left(\frac{n-1}{2} \right)^2.$$

6. 假设存在一个各项不同且均能表示成 $2^k + 3^l$ 形式的 40 项等差数列, 设这个等差数列为 $a, a + d, a + 2d, \dots, a + 39d$, 其中, $a, d \in \mathbf{N}_+$.

$$\text{设 } m = \lfloor \lg(a + 39d) \rfloor,$$

$$n = \lfloor \lg(a + 39d) \rfloor,$$

其中, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

首先证明: $a + 26d, a + 27d, \dots, a + 39d$ 中至多有一个不能表示成 $2^m + 3^l$ 或 $2^k + 3^n (k, l \in \mathbf{N})$ 的形式.

若 $a + 26d, a + 27d, \dots, a + 39d$ 中的某一个 $a + hd$ 不能表示成 $2^m + 3^l$ 或 $2^k + 3^n$ 的形式, 由假设, 一定存在非负整数 b, c , 使得 $a + hd = 2^b + 3^c$.

由 m, n 的定义知 $b \leq m, c \leq n$

又因为 $a + hd$ 不能表示成 $2^m + 3^l$ 或 $2^k + 3^n$ 的形式, 所以, $b \leq m - 1, c \leq n - 1$.

若 $b \leq m - 2$, 则

$$\begin{aligned} a + hd &\leq 2^{m-2} + 3^{n-1} = \frac{1}{4} \times 2^m + \frac{1}{3} \times 3^n \\ &\leq \frac{7}{12} (a + 39d) < a + 26d, \end{aligned}$$

矛盾;

若 $c \leq n - 2$, 则

$$a + hd \leq 2^{m-1} + 3^{n-2} = \frac{1}{2} \times 2^m + \frac{1}{9} \times 3^n$$

2008年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛

1. 设 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} \right] i^{2008} = f(x) + i g(x)$ ($f(x)$ 、 $g(x)$ 均为实系数多项式). 则 $f(x)$ 的系数之和是 ().

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

2. 方程 $10 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = x$ 的根的个数为 ().

- (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5

3. 六个家庭依次编号为 1、2、3、4、5、6 每家三人, 大家一起聚会做游戏, 游戏按每组三人依次进行. 那么, 同一组的成员来自不同家庭的概率为 ().

- (A) $\frac{5}{68}$ (B) $\frac{15}{68}$ (C) $\frac{45}{68}$ (D) $\frac{5}{204}$

4. 已知 $f(x) = ax^3 + x^2 + x + d$ 满足 a, d 为实数, 当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$ 则 a, d 一定属于 ().

- (A) $[-2, 0]$ (B) $[0, 2]$
(C) $[-1, 0]$ (D) $[0, 1]$

5. 设 $A = \{x | 1 \leq x \leq 9, x \in \mathbf{Z}\}$,

$$\leq \frac{11}{18} (a + 39d) < a + 26d,$$

矛盾.

因此, 只有 $b = m - 1, c = n - 1$, 即 $a + 26d, a + 27d, \dots, a + 39d$ 中至多有一个不能表示成 $2^m + 3^l$ 或者 $2^k + 3^n$ 的形式.

所以, 这 14 个数中至少有 13 个可以写成 $2^m + 3^l$ 或者 $2^k + 3^n$ 的形式.

由抽屉原理, 至少有 7 个数可表示为同一种形式.

下面分两种情形.

(1) 有 7 个数可表示成 $2^m + 3^l$ 的形式.

设它们为 $2^m + 3^1, 2^m + 3^2, \dots, 2^m + 3^7$ ($4 < l < \dots < 7$). 则 $3^1, 3^2, \dots, 3^7$ 是某个公差为 d 的 14 项等差数列中的 7 项. 但

$B = \{(a, b) | a, b \in A\}$,
定义 B 到 \mathbf{Z} 的映射

$$f: (a, b) \rightarrow ab - a - b$$

则满足 $(a, b) \xrightarrow{f} 11$ 的有序数对共有 () 对.

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

6. 若实数 x, y 满足

$$(x - 3)^2 + 4(y - 1)^2 = 4,$$

则 $\frac{x+y-3}{x-y+1}$ 的最大值和最小值是 ().

- (A) 1, 0 (B) 0, -1
(C) 1, -1 (D) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

二、填空题 (每小题 9 分, 共 54 分)

7. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{17} = 170, a_{2000} = 2001$. 则 $S_{2008} =$ _____.

8. 设 z 是复数, 且 $|z| = 1$ 则 $u = |z^2 - z + 1|$ 的最大值与最小值是 _____.

9. 已知函数

$$f(x) = \cos^2 \theta x + \cos \theta x \cdot \sin \theta x$$

的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$. 则 $\theta f(x)$ 的最大值是 _____.

$$13d \geq 3^{k_7} - 3^{k_1} \geq \left[3^5 - \frac{1}{3} \right] \times 3^{k_2}$$

$$> 13(3^{k_2} - 3^{k_1}) \geq 13d,$$

矛盾.

(2) 有 7 个数可表示成 $2^k + 3^n$ 的形式.

设它们为 $2^{k_1} + 3^n, 2^{k_2} + 3^n, \dots, 2^{k_7} + 3^n$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_7$). 则 $2^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, 2^{k_7}$ 是某个公差为 d 的 14 项等差数列中的 7 项. 但

$$13d \geq 2^{k_7} - 2^{k_1} \geq \left[2^5 - \frac{1}{2} \right] \times 2^{k_2}$$

$$> 13(2^{k_2} - 2^{k_1}) \geq 13d,$$

矛盾.

综上, 假设不成立. 故原题得证.

(朱华伟 提供)

2010年中国国家集训队选拔考试

中图分类号: G424.79

文献标识码: A

文章编号: 1005-6416(2010)05-0021-07

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, M 是边 BC 的中点, P 是 $\triangle AMC$ 内一点, 使得 $\angle MAB = \angle PAC$. 设 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABP$ 、 $\triangle ACP$ 的外心分别为 O 、 O_1 、 O_2 . 证明: 直线 AO 平分线段 O_1O_2 . (熊斌 供题)

2. 已知

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2010}\}$$

$$\text{和 } B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2010}\}$$

是复数集的两个子集, 且满足

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2010} (a_i + a_j)^n = \sum_{1 \leq i < j \leq 2010} (b_i + b_j)^n$$

对 $n = 1, 2, \dots, 2010$ 成立. 证明: $A = B$.

(冷岗松 供题)

3. 设 n_1, n_2, \dots, n_{26} 是26个互不相同的正整数, 满足:

(1) 每个 n_i 在十进制表示中的数码均属于集合 $\{1, 2\}$;

(2) 对任意的 i, j , 在 n_i 的末位后添加若干个数码, 不能得到 n_j .

试求 $\sum_{i=1}^{26} S(n_i)$ 的最小值, 其中, $S(m)$ 表示正整数 m 的十进制表示的各位数码之和.

(付云皓 供题)

4. 设 $G = G(V; E)$ 是一个简单图, V 是顶点集, E 是边集, $|V| = n$. 一个映射 $f: V \rightarrow \mathbf{Z}$ 称为“好的”, 如果 f 满足:

$$(1) \sum_{v \in V} f(v) = |E|;$$

(2) 将任意若干个顶点染成红色, 则总存在一个红色顶点 v , 使得 $f(v)$ 不超过与 v 相邻的未染色的顶点个数.

设 $m(G)$ 是所有好的映射 f 的个数. 证明: 若 V 中每个顶点都至少与另外一个顶点有边相连, 则 $n \leq m(G) \leq n!$.

(瞿振华 供题)

5. 给定整数 $a_1 \geq 2$, 对整数 $n \geq 2$, 定义 a_n 是与 a_{n-1} 不互质, 且不等于 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 的最小正整数. 证明: 每个不小于2的整数均在数列 $\{a_n\}$ 中出现. (余红兵 供题)

6. 设整数 $n (n \geq 2)$, 给定区间 $[0, 1]$ 中的实数 x_1, x_2, \dots, x_n . 证明: 存在实数 a_0, a_1, \dots, a_n , 满足:

$$(1) a_0 + a_n = 0;$$

$$(2) |a_i| \leq 1 (i = 0, 1, \dots, n);$$

$$(3) |a_i - a_{i-1}| = x_i (i = 1, 2, \dots, n).$$

(朱华伟 供题)

参考答案

1. 证法1 如图1, 作出 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABP$ 、 $\triangle ACP$ 的外接圆, 延长 AP 交 $\odot O$ 于点 D , 联结 BD , 并作出 $\odot O$ 在点 A 处的切线, 分别与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 交于点 E 、 F , 联结 BE .

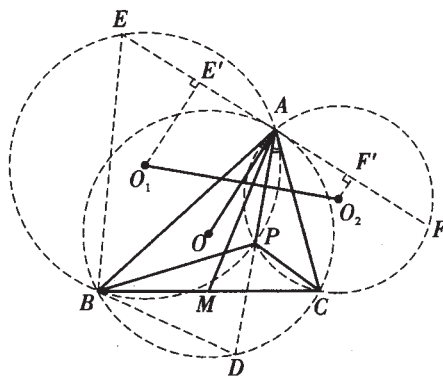


图1

$$\text{易证 } \triangle AMC \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AM}{MC}.$$

$$\text{又 } \triangle EAB \sim \triangle PDB, \text{ 得 } \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{PD}.$$

所以, $\frac{AM}{MC} = \frac{AE}{PD}$, 即 $AE = \frac{AM \cdot PD}{MC}$.

同理, $AF = \frac{AM \cdot PD}{MB}$.

因此, $AE = AF$. ①

再分别作 $O_1 E' \perp AE$ 、 $O_2 F' \perp AF$ 于点 E' 、 F' . 由垂径定理知, E' 、 F' 分别是 AE 、 AF 的中点. 故由式①即知 A 也是 $E'F'$ 的中点.

在直角梯形 $O_1 E' F' O_2$ 中, OA 即中位线所在直线, 故它一定平分 $O_1 O_2$.

证法 2 如图 2, 联结 AO_1 、 OO_1 、 AO_2 、 OO_2 . 记直线 AO 与线段 $O_1 O_2$ 的交点为 Q . 则

$$\frac{O_1 Q}{Q O_2}$$

$$= \frac{S_{\triangle A O O_1}}{S_{\triangle A O O_2}}$$

$$= \frac{AB \cdot OO_1}{AC \cdot OO_2},$$

其中, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC}$.

而 $\angle OO_1 Q = \angle BAP = \angle CAM$,

$\angle OO_2 Q = \angle CAP = \angle BAM$,

$$\text{则 } \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{\sin \angle OO_2 Q}{\sin \angle OO_1 Q} = \frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle CAM}.$$

$$\text{故 } \frac{O_1 Q}{Q O_2} = \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle CAM} \cdot \frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle ABM}$$

$$= \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{CM}.$$

注意到 M 是 BC 的中点, 则 $O_1 Q = Q O_2$, 故直线 AO 平分线段 $O_1 O_2$.

$$2. \text{ 记 } T_k = \sum_{1 \leq i < j \leq 2010} (a_i + a_j)^k,$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i \leq 2010} a_i^k, S_{k,l} = \sum_{1 \leq i < j \leq 2010} a_i^k a_j^l.$$

对集合 B 类似地定义 T'_k 、 S'_k 、 $S'_{k,l}$.

接下来用数学归纳法证明:

$$S_k = S'_k (k = 1, 2, \dots, 2010).$$

由题设知, $T_k = T'_k$ 对任意的 $k (k = 1, 2, \dots, 2010)$ 成立.

易知 $T_1 = 2009S_1$, $T'_1 = 2009S'_1$. 则

$$S_1 = S'_1.$$

假设 $k = 1, 2, \dots, t (t \leq 2009)$ 时, 均有

$$S_k = S'_k.$$

考虑 $k = t + 1$ 的情况.

(1) 如果 $t + 1 = 2m$ 是偶数, 则有下面的恒等式

$$T_{2m} = 2009S_{2m} + C_{2m}^1 (S_{1,2m-1} + S_{2m-1,1}) + \dots + C_{2m}^{m-1} (S_{m-1,m+1} + S_{m+1,m-1}) + C_{2m}^m S_{m,m},$$

$$S_1 S_{2m-1} = S_{2m} + (S_{1,2m-1} + S_{2m-1,1}),$$

$$S_2 S_{2m-2} = S_{2m} + (S_{2,2m-2} + S_{2m-2,2}),$$

.....

$$S_m S_m = S_{2m} + 2S_{m,m}.$$

将 T_k 、 S_k 、 $S_{k,l}$ 换成 T'_k 、 S'_k 、 $S'_{k,l}$, 上述恒等式仍成立.

由 $T_{2m} = T'_{2m}$, 得

$$2009(S_{2m} - S'_{2m}) + C_{2m}^1 (S_{1,2m-1} + S_{2m-1,1} - S'_{1,2m-1} - S'_{2m-1,1}) + \dots + C_{2m}^{m-1} (S_{m-1,m+1} + S_{m+1,m-1} - S'_{m-1,m+1} - S'_{m+1,m-1}) + C_{2m}^m (S_{m,m} - S'_{m,m}) = 0.$$

①

由归纳假设

$$S_1 S_{2m-1} = S'_1 S'_{2m-1},$$

$$S_2 S_{2m-2} = S'_2 S'_{2m-2},$$

.....

$$S_m S_m = S'_m S'_m.$$

$$\text{故 } (S_{2m} - S'_{2m}) + (S_{1,2m-1} + S_{2m-1,1} - S'_{1,2m-1} - S'_{2m-1,1}) = 0,$$

.....

$$(S_{2m} - S'_{2m}) + 2(S_{m,m} - S'_{m,m}) = 0.$$

将上述等式代入式①得

$$2009(S_{2m} - S'_{2m}) - [C_{2m}^1 (S_{2m} - S'_{2m}) + \dots + C_{2m}^{m-1} (S_{2m} - S'_{2m}) + \frac{1}{2} C_{2m}^m (S_{2m} - S'_{2m})] = 0,$$

$$\text{即 } (2010 - 2^{2m-1})(S_{2m} - S'_{2m}) = 0.$$

所以, $S_{2m} = S'_{2m}$.

(2) 如果 $t + 1 = 2m + 1$ 是奇数, 类似(1)

可得

$$T_{2m+1} = 2\ 009S_{2m+1} + C_{2m+1}^1(S_{1,2m} + S_{2m,1}) + \dots + C_{2m+1}^m(S_{m,m+1} + S_{m+1,m}),$$

$$S_1 S_{2m} = S_{2m+1} + (S_{1,2m} + S_{2m,1}),$$

$$S_2 S_{2m-1} = S_{2m+1} + (S_{2,2m-1} + S_{2m-1,2}),$$

.....

$$S_m S_{m+1} = S_{2m+1} + (S_{m,m+1} + S_{m+1,m}).$$

将 $T_k, S_k, S_{k,l}$ 换成 $T'_k, S'_k, S'_{k,l}$, 上述恒等式仍成立.

由 $T_{2m+1} = T'_{2m+1}$, 得

$$2\ 009(S_{2m+1} - S'_{2m+1}) + C_{2m}^1(S_{1,2m} + S_{2m,1} - S'_{1,2m} - S'_{2m,1}) + \dots + C_{2m+1}^m(S_{m,m+1} + S_{m+1,m} - S'_{m,m+1} - S'_{m+1,m}) = 0. \quad (2)$$

由归纳假设

$$S_1 S_{2m} = S'_1 S'_{2m},$$

$$S_2 S_{2m-1} = S'_2 S'_{2m-1},$$

.....

$$S_m S_{m+1} = S'_m S'_{m+1}.$$

$$\text{故}(S_{2m+1} - S'_{2m+1}) + (S_{1,2m} + S_{2m,1} - S'_{1,2m} - S'_{2m,1}) = 0,$$

.....

$$(S_{2m+1} - S'_{2m+1}) + (S_{m,m+1} + S_{m+1,m} - S'_{m,m+1} - S'_{m+1,m}) = 0.$$

代入式(2)得

$$(2\ 009 - 2^{2m})(S_{2m+1} - S'_{2m+1}) = 0.$$

故 $S_{2m+1} = S'_{2m+1}$.

由数学归纳法知 $S'_k = S_k$ 对一切的 $k (k = 1, 2, \dots, 2\ 010)$ 均成立.

进一步, 设

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2\ 010}) = x^{2\ 010} + A_1 x^{2\ 009} + \dots + A_{2\ 010}, \quad (3)$$

$$(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_{2\ 010}) = x^{2\ 010} + B_1 x^{2\ 009} + \dots + B_{2\ 010}. \quad (4)$$

则由牛顿公式知

$$S_k + A_1 S_{k-1} + \dots + A_{k-1} S_1 + k A_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2\ 010), \quad (5)$$

$$S'_k + B_1 S'_{k-1} + \dots + B_{k-1} S'_1 + k B_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2\ 010). \quad (6)$$

由式(5)、(6), $S_k = S'_k (k = 1, 2, \dots, 2\ 010)$ 及数学归纳法得

$$A_k = B_k (k = 1, 2, \dots, 2\ 010).$$

因此, 式(3)、(4)的右边恒等, 故左边也相等, 即 $A = B$.

3. 对于两个十进制正整数 a, b , 若在 b 的末位后添加数码可以得到 a , 则称“ a 包含 b ”.

先证明一个引理.

引理 给定一些互不相同的正整数 n_1, n_2, \dots, n_r , 每一个 n_i 的十进制表示中的数码均为 1 和 2. 若它们当中的任意两个互不包含, 则对于任意正整数 t , 满足 $S(n_i) \leq t$ 的 i 最多有 F_t 个, 其中, $\{F_n\}$ 是斐波那契数列,

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \geq 1).$$

证明 对 t 进行归纳.

当 $t = 1, 2$ 时, 显然 ($t = 2$ 时, 1 和 11 不能同时存在).

若对小于 t 的正整数都成立, 考虑 t 的情况.

不妨设 $S(n_1), S(n_2), \dots, S(n_i)$ 是所有不大于 t 的 $S(n_i)$, 其中, n_1, n_2, \dots, n_j 的首位为 1, $n_{j+1}, n_{j+2}, \dots, n_i$ 的首位为 2.

若 n_1, n_2, \dots, n_j 中有一位数, 则其必然为 1, 此时, $j = 1 \leq F_{t-1}$. 若不然, 则将 n_1, n_2, \dots, n_j 首位的 1 去掉, 剩下的数仍然互不包含.

由归纳假设知 $j \leq F_{t-1}$.

同理, $l - j \leq F_{t-2}$.

因此, $l \leq F_{t-1} + F_{t-2} = F_t$.

故对 t 也成立.

回到原题.

设将题目中的 26 改为 m 后, $\sum_{i=1}^m S(n_i)$ 的最小值为 $f(m)$.

对于任何 $m (m \geq 3)$, 由 $f(m)$ 的定义知, 存在互不包含且各位数码均为 1 或 2 的正整

数 n_1, n_2, \dots, n_m , 使得它们的各位数码之和满足 $\sum_{i=1}^m S(n_i) = f(m)$.

不妨设 $\max_{1 \leq i \leq m} S(n_i) = S(n_1)$, 且 n_1 是所有这些各位数码和为 $S(n_1)$ 的数中最大的一个.

由 $m \geq 3$ 知 n_1 不是一位数.

若 n_1 的末位数字为 1, 由 n_1, n_2, \dots, n_m 互不包含知, $\frac{n_1-1}{10}$ 不在 n_2, n_3, \dots, n_m 中.

注意到 $S\left(\frac{n_1-1}{10}\right) = S(n_1) - 1$.

故 $\frac{n_1-1}{10}, n_2, \dots, n_m$ 两两不同且各位数码之和为 $f(m) - 1$.

由 $f(m)$ 的定义知, $\frac{n_1-1}{10}, n_2, \dots, n_m$ 中有两个数, 一个包含另一个.

由 n_1, n_2, \dots, n_m 互不包含知, n_2, n_3, \dots, n_m 中有一个包含 $\frac{n_1-1}{10}$.

不妨设 n_2 包含 $\frac{n_1-1}{10}$. 则 n_2 的各位数码之和至少比 $\frac{n_1-1}{10}$ 的各位数码之和多 2 (在 $\frac{n_1-1}{10}$ 后添加一个 1 即为 n_1), 这说明 $S(n_2) > S(n_1)$, 矛盾.

因此, n_1 的末位数码为 2.

若 $n_1 - 1$ 不在 n_2, n_3, \dots, n_m 中, 则由于 $S(n_1 - 1) = S(n_1) - 1$, 故 $n_1 - 1, n_2, \dots, n_m$ 两两不同且各位数码之和为 $f(m) - 1$.

由 $f(m)$ 的定义知, $n_1 - 1, n_2, \dots, n_m$ 中有两个数, 一个包含另一个.

由于 n_1, n_2, \dots, n_m 互不包含, 故只能是 $n_1 - 1$ 与某个 n_i 间存在包含关系.

若 n_i 包含 $n_1 - 1$, 由 $S(n_1 - 1) = S(n_1) - 1$ 知, 这个 n_i 只能是在 $n_1 - 1$ 的十进制表示的

末位加上一个 1, 即 $n_i = 10(n_1 - 1) + 1$. 因此, $S(n_i) = S(n_1)$, 且 $n_i > n_1$, 这与 n_1 的定义矛盾.

若 $n_1 - 1$ 包含某个 n_i , 则 n_1 也包含 n_i (因 n_i 与 $n_1 - 1$ 仅是末位不同), 与假设矛盾. 因此, n_1 的末位数码为 2 且 $n_1 - 1$ 在 n_1, n_2, \dots, n_m 中.

不妨设 $n_2 = n_1 - 1$. 考虑 $\frac{n_1-2}{10}, n_3, \dots, n_m$.

显然, n_3, n_4, \dots, n_m 互不包含, $\frac{n_1-2}{10}$ 也不可能包含 n_3, n_4, \dots, n_m 中的任何一个 (因 n_1 包含 $\frac{n_1-2}{10}$, 且包含具有传递性). 若 $n_3,$

n_4, \dots, n_m 中的某一个包含 $\frac{n_1-2}{10}$ (不妨设为 n_3), 由于 $S\left(\frac{n_1-2}{10}\right) = S(n_1) - 2$, 故 n_3 只能

是在 $\frac{n_1-2}{10}$ 的末位后加上 1、2 或 11 得到. 但在 $\frac{n_1-2}{10}$ 后加上 1、2 分别构成 n_2, n_1 , 故只能

有 $n_3 = 100 \cdot \frac{n_1-2}{10} + 11 = 10n_1 - 9$, 但 $S(n_3) = S(n_1)$ 且 $n_3 > n_1$, 与 n_1 的定义矛盾.

因此, $\frac{n_1-2}{10}, n_3, \dots, n_m$ 互不包含.

由 f 的定义知, 它们的各位数码之和的总和应不小于 $f(m - 1)$.

故 $f(m) - S(n_1) - (S(n_1) - 1) + (S(n_1) - 2) \geq f(m - 1)$,

即 $f(m) \geq f(m - 1) + S(n_1) + 1$.

设 u 是满足 $F_{u-1} < m \leq F_u$ 的整数. 则由引理知, $S(n_1), S(n_2), \dots, S(n_m)$ 中最多有 F_{u-1} 个小于或等于 $u - 1$.

因此, $S(n_1) \geq u$. 由此即得

$f(m) \geq f(m - 1) + u + 1$. ①

易知, $f(1) = 1, f(2) = 3$. 于是,

$$\begin{aligned}
f(26) &= f(2) + \sum_{i=3}^{26} (f(i) - f(i-1)) \\
&= f(2) + (f(3) - f(2)) + \\
&\quad (f(5) - f(3)) + (f(8) - f(5)) + \\
&\quad (f(13) - f(8)) + (f(21) - f(13)) + \\
&\quad (f(26) - f(21)) \\
&\geq 3 + 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + 7 \times 5 + \\
&\quad 8 \times 8 + 9 \times 5 \text{ (由式①)} \\
&= 179.
\end{aligned}$$

$$\text{所以, } \sum_{i=1}^{26} S(n_i) \geq 179.$$

另一方面,由斐波那契数的性质易知,恰有8个由数码1和2组成,且各位数码之和为5的正整数(设为 a_1, a_2, \dots, a_8),恰有13个由数码1和2组成,且各位数码之和为6的正整数(设为 b_1, b_2, \dots, b_{13}).在 a_1, a_2, \dots, a_8 末位后各添一个2组成8个新的数 c_1, c_2, \dots, c_8 ,在 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 的末位后添上1和添上2各组成5个新的数 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 和 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 .

考虑 $c_1, c_2, \dots, c_8, d_1, d_2, \dots, d_5, e_1, e_2, \dots, e_5, b_6, b_7, \dots, b_{13}$ 这26个数,它们均由数码1和2组成,各位数码之和的总和为

$$7 \times 8 + 7 \times 5 + 8 \times 5 + 6 \times 8 = 179,$$

且没有两个互相包含(事实上,若有 x 包含 y ,考虑到它们的各位数码之和都是6、7或8,且各位数码之和为8的数末位都是2,则 x 应当恰比 y 多一个末位,而将 d_1, d_2, \dots, d_5 和 e_1, e_2, \dots, e_5 去掉末位后是 b_1, b_2, \dots, b_5 ,将 c_1, c_2, \dots, c_8 去掉末位后是 a_1, a_2, \dots, a_8 ,均不能与集合中其他数相同).

综上, $\sum_{i=1}^{26} S(n_i)$ 的最小值为179.

4. 对 V 中顶点的一个排序 $\tau = (v_1, v_2, \dots, v_n)$,定义 $f_\tau: V \rightarrow \mathbf{Z}$ 如下: $f_\tau(v)$ 等于排在 v 之前的与 v 相邻的顶点个数.

下面说明: f_τ 是好的映射.

在计算 $\sum_{v \in V} f_\tau(v)$ 中,每条边恰被计算一次,这是因为若 $e \in E$,设 e 的两个端点为

$u, v \in V$,且 u 在 τ 中排在 v 之前,则 e 在 $f_\tau(v)$ 中被计算了一次.故

$$\sum_{v \in V} f_\tau(v) = |E|.$$

对任意非空子集 $A \subseteq V$ (A 中顶点染为红色,其余顶点未染色),取 $v \in A$ 是在排序 τ 下排最前的 A 中顶点.则由 f_τ 的定义及 v 的选取可知, $f_\tau(v)$ 不超过与 v 相邻的未染色顶点数.这样, f_τ 便是一个好的映射.

反之,若 $f: V \rightarrow \mathbf{Z}$ 是任意的一个好的映射,接下来说明:一定存在至少一个 V 中顶点的排序 τ ,使得 $f = f_\tau$.

首先,取 $A = V$ (同上, A 中顶点染为红色,其余顶点未染色).

由条件(2)知,存在 $v \in A$,使得

$$f(v) \leq 0.$$

将这些点中任一个记为 v_1 .

假设已取出了 v_1, v_2, \dots, v_k ,若 $k < n$,取 $A = V - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$,由条件(2)知,存在顶点 $v \in A$,使得 $f(v)$ 不超过 v_1, v_2, \dots, v_k 中与 v 相邻的顶点个数.将其中任一个这样的 v 记为 v_{k+1} .如此递推地将 V 中顶点排序为 $\tau = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

由上面的构造知 $f(v) \leq f_\tau(v)$,对任意 $v \in V$ 成立.

由 $|E| = \sum_{v \in V} f(v) \leq \sum_{v \in V} f_\tau(v) = |E|$,故 $f(v) = f_\tau(v)$ 对任意 $v \in V$ 成立.

如此证明了对任何顶点的排序 τ , f_τ 是一个好的映射,而任意一个好的映射一定是某个 f_τ .

由于排序 τ 一共有 $n!$ 个,故 $m(G) \leq n!$ (两个不同的排序可能得到相同的映射).

下面证明: $n \leq m(G)$.

先假设 G 是连通图,任取一个 $v \in V$,记为 v_1 .

由连通性可选取 $v_2 \in V - \{v_1\}$,使得 v_2 和 v_1 相邻.接着可选取 $v_3 \in V - \{v_1, v_2\}$,使得 v_3 与 v_1, v_2 中至少一个相邻.继续下去,将 V 中顶点排序为 $\tau = (v_1, v_2, \dots, v_n)$,使得当

$2 \leq k \leq n$ 时, v_k 与排在它之前的至少一个顶点相邻. 于是, $f_r(v_1) = 0$. 而对 $2 \leq k \leq n$, 有 $f_r(v_k) > 0$.

由于 v_1 可任意选取, 这样便得到至少 n 个好的映射.

一般情况下, 可以把 G 分成若干个连通分支 G_1, G_2, \dots, G_k .

由于每个顶点都至少与另外一个顶点有边相连, 故每个连通分支的顶点数都不少于 2, 设这些连通分支的顶点数分别为 $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$. 对每个连通分支 $G_i (i = 1, 2, \dots, k)$, 至少有 n_i 个好的映射.

易知, 把每个 G_i 上的好的映射拼起来得到的是 G 上好的映射. 故

$$m(G) \geq n_1 n_2 \cdots n_k \geq n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

综上, $n \leq m(G) \leq n!$.

5. 分三步来证明结论.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 中含无穷多个偶数.

假设数列 $\{a_n\}$ 中只有有限个偶数. 则必存在整数 c , 使得大于 c 的偶数均不出现. 这样, 必存在正整数 m , 使得当 $n \geq m$ 时, a_n 均为大于 c 的奇数. 因而, 必存在 $n_1 > m$, 使得 a_{n_1} 为大于 c 的奇数, 且 $a_{n_1+1} > a_{n_1}$ (否则, 从 a_{n_1} 开始数列递减, 矛盾).

设 p 是 a_{n_1} 的最小质因子. 则 $p \geq 3$.

$$\text{由 } (a_{n_1+1} - a_{n_1}, a_{n_1}) = (a_{n_1+1}, a_{n_1}) > 1,$$

得 $a_{n_1+1} - a_{n_1} \geq p \Rightarrow a_{n_1+1} \geq a_{n_1} + p$.

另一方面, $a_{n_1} + p$ 是大于 c 的偶数, 故 $a_{n_1} + p$ 在 a_{n_1} 之前未出现.

又 $(a_{n_1} + p, a_{n_1}) > 1$, 故必有 $a_{n_1+1} = a_{n_1} + p$, 这是一个大于 c 的偶数, 矛盾.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中含所有偶数.

假设结论不成立, 设 $2k$ 是不属于 $\{a_n\}$ 的最小正偶数, $\{a_{n_i}\}$ 为 $\{a_n\}$ 中所有偶数所成的子列. 由 (1) 的结论知, 这是一个无穷数列.

由于 $(a_{n_i}, 2k) > 1 (2k \notin \{a_n\})$, 故由该数列的定义知 $a_{n_i+1} \leq 2k$.

但 $\{a_{n_i+1}\}$ 是一个无穷整数列, 矛盾.

所以, 数列 $\{a_n\}$ 中含所有偶数.

(3) 数列 $\{a_n\}$ 中含所有大于 1 的奇数.

假设结论不成立, 设 $2k+1$ 为最小的大于 1 的奇数, 使得 $2k+1 \notin \{a_n\}$.

由 (2) 的结论知, 数列 $\{a_n\}$ 中包含一个无穷子列 $\{a_{m_i}\}$, 使得其中每一项均为 $2k+1$ 的偶数倍. 与 (2) 的证明同理可知, $a_{m_i+1} \leq 2k+1 (i = 1, 2, \dots)$, 矛盾.

综上, 数列 $\{a_n\}$ 含所有不小于 2 的整数.

6. 对任意 $a \in [0, 1)$, 定义 a 的生成数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ 如下: $a_0 = a$, 对 $1 \leq i \leq n$,

若 $a_{i-1} \geq 0$, 则 $a_i = a_{i-1} - x_i$;

若 $a_{i-1} < 0$, 则 $a_i = a_{i-1} + x_i$.

记 $f(a) = a_n$.

由数学归纳法易知, 对任意的 $i (0 \leq i \leq n)$, 都有 $|a_i| \leq 1$.

若存在一个 a , 使得 $f(a) = -a$, 则考虑其生成数列 $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = f(a) = -a$.

显然, a_0, a_1, \dots, a_n 满足 (1) 和 (3).

又由 a_0, a_1, \dots, a_n 的递推式易知, 它们满足 (2). 从而, 这样的 a_0, a_1, \dots, a_n 符合要求. 故只要证明存在 $a \in [0, 1)$, 满足 $f(a) = -a$.

若某个 $a \in [0, 1)$ 的生成数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ 中至少有一项为 0, 则称 a 为“间断数”.

由于每个间断数必然能写成 $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ 的形式, 其中, $t_i = -1, 0, 1$, 因此, 间断数的个数是有限的.

显然, 0 是间断数.

设所有的间断数从小到大排列为

$$0 = b_1 < b_2 < \cdots < b_m < 1.$$

先证明: 对于任意的 $k (1 \leq k \leq m-1)$, 函数 $f(a)$ 在区间 $[b_k, b_{k+1})$ 上的解析式为

$$f(a) = f(b_k) + (a - b_k).$$

考虑 b_k 与 b_{k+1} 以及它们生成的数列.

设 b_k 的生成数列为 $q_0 = b_k, q_1, q_2, \dots, q_n$, b_{k+1} 的生成数列为 $r_0 = b_{k+1}, r_1, r_2, \dots, r_n$, 且 $\{r_i\}_{i=0}^n$ 中第一个等于 0 的项是 r_i .

构造数列 $\{s_i\}_{i=0}^n$ 如下:

$$s_0 = r_0, s_1 = r_1,$$

.....

$$s_l = r_l = 0, s_{l+1} = -r_{l+1},$$

.....

$$s_n = -r_n,$$

即在 r_l 之前的项与 r_l 相同, 之后的项是 r_l 的相反数.

显然, $\{s_i\}_{i=0}^n$ 满足 $s_0 = b_{k+1}$.

对 $1 \leq i \leq n$, 若 $s_{i-1} > 0$, 则 $s_i = s_{i-1} - x_i$; 若 $s_{i-1} \leq 0$, 则 $s_i = s_{i-1} + x_i$ (即变为逢 0 则加).

下面用数学归纳法证明:

$$q_i s_i \geq 0, \text{ 且 } s_i - q_i = b_{k+1} - b_k.$$

当 $i=0$ 时, 结论显然成立.

若结论对 $i-1$ 成立, 则

$$q_{i-1} s_{i-1} \geq 0, \text{ 且 } s_{i-1} - q_{i-1} = b_{k+1} - b_k > 0.$$

这说明 $q_{i-1} \geq 0, s_{i-1} > 0$ 或 $q_{i-1} < 0, s_{i-1} \leq 0$.

若是前者, 则 $q_i = q_{i-1} - x_i, s_i = s_{i-1} - x_i$.

$$\text{故 } s_i - q_i = s_{i-1} - q_{i-1} = b_{k+1} - b_k.$$

同理, 若是后者, 也有 $s_i - q_i = b_{k+1} - b_k$.

如果 $q_i s_i < 0$, 则只能是 $q_i < 0 < s_i$.

$$\text{取 } b' = b_{k+1} - s_i = b_k + (-q_i) \in (b_k, b_{k+1}).$$

考虑由 b' 生成的数列 $u_0 = b', u_1, \dots, u_n$.

由数学归纳法易知, 对 $0 \leq j \leq i$, 有

$$s_j - u_j = s_0 - u_0 = s_i$$

(q 和 s 在前面每一项都是同加或者同减, u 位于它们之间, 递推式也必然与它们相同), 但这导致 $u_i = s_i - s_i = 0$, 即 b' 是间断数, 而这与 b_k, b_{k+1} 是两个连续的间断数矛盾.

故 $q_i s_i \geq 0$, 即 $q_i s_i \geq 0$ 且 $s_i - q_i = b_{k+1} - b_k$ 对任意 $0 \leq i \leq n$ 都成立.

$$\text{由 } f(b_k) = q_n, f(b_{k+1}) = r_n = -s_n, \text{ 知}$$

$$f(b_k) + f(b_{k+1}) = b_k - b_{k+1}.$$

且由上面的证明知, 对 $b_k < b' < b_{k+1}$, b' 的生成数列的递推公式应与 $\{q_i\}_{i=0}^n, \{s_i\}_{i=0}^n$ 相同, 即 $f(b') = f(b_k) + (b' - b_k)$, 即前述的结论得证.

最后, 证明本题结论.

若存在 k , 使 $f(b_k) = -b_k$, 则结论已然成立; 若存在 k , 使 $f(b_k) = b_k$, 则考虑 b_k 的生成数列, 将其中第一个 0 之后的每项都取相反数, 得到一新数列 $z_0 = b_k, z_1, \dots, z_n = -b_k$ 满足题目中的三个条件, 此时, 结论也成立.

下设对每个 k 都有 $|f(b_k)| \neq b_k$, 分两种情形讨论.

【情形 1】 若 $|f(b_m)| < b_m$, 则由 $|f(b_1)| > b_1 = 0$, 知存在一个 k 使得

$$|f(b_k)| > b_k, |f(b_{k+1})| < b_{k+1}.$$

$$\text{由 } f(b_k) + f(b_{k+1}) = b_k - b_{k+1}, \text{ 得}$$

$$f(b_k) - b_k = -(f(b_{k+1}) + b_{k+1}) < 0.$$

$$\text{故 } f(b_k) < -b_k.$$

$$\text{由 } f(b_k) + f(b_{k+1}) = b_k - b_{k+1}, \text{ 得}$$

$$f(b_k) = b_k - b_{k+1} - f(b_{k+1}) > b_k - 2b_{k+1},$$

即 $b_k - 2b_{k+1} < f(b_k) < -b_k$.

$$\text{令 } b' = \frac{b_k - f(b_k)}{2}. \text{ 则 } b_k < b' < b_{k+1}.$$

$$\text{故 } f(b') = f(b_k) + (b' - b_k)$$

$$= (b_k - 2b') + (b' - b_k) = -b'.$$

此时结论成立.

【情形 2】 若 $|f(b_m)| > b_m$, 由于 $(b_m, 1)$ 中没有间断数, 故仿照前面的推理易知, 对 $b' \in (b_m, 1)$, b' 的生成数列与 b_m 的生成数列应有相同的递推式.

$$\text{故有 } f(b') = f(b_m) + (b' - b_m).$$

$$\text{由 } |f| \leq 1, \text{ 得 } f(b_m) \leq b_m.$$

$$\text{故 } f(b_m) < -b_m.$$

$$\text{因此, } -1 \leq f(b_m) < -b_m.$$

$$\text{令 } b' = \frac{b_m - f(b_m)}{2}. \text{ 则}$$

$$b_m = \frac{b_m - (-b_m)}{2} < b'$$

$$< \frac{b_m - (-1)}{2} = \frac{b_m + 1}{2} < 1$$

及 $f(b') = f(b_m) + (b' - b_m)$

$$= (b_m - 2b') + (b' - b_m) = -b'.$$

故此时结论也成立.

(熊斌提供)