

2001年中国数学奥林匹克国家集训队选拔考试

(2001-03-31—04-01)

O1 E

一、平面上给定凸四边形 $ABCD$ 及其内点 E 和 F , 适合

$$AE = BE, CF = DE, \angle AEB = \angle CED,$$

$$AF = DF, BF = CF, \angle AFD = \angle BFC.$$

求证: $\angle AFD + \angle AEB = \pi$.

(许以超 提供)

解: 如图 1, 约定将凸四边形对角线 AC 与 BD 的交点记为 G , 并记 $\angle EAB = \angle ABE = \theta$, $\angle FAD = \angle ADF = \varphi$.

因为 $\triangle AEC$ 可通过绕 E 点的旋转与 $\triangle BDE$ 重合, 所以 $\angle GAE = \angle GBE$, 有 A, B, E, G 四点共圆. 又因为 $\triangle AFC$ 可通过绕 F 点的旋转与 $\triangle BDF$ 重合, 所以 $\angle GAF = \angle GDF$, 有 A, D, F, G 四点共圆. 依据圆内接四边形的等角关系可知

$$\angle EGB = \angle EAB = \theta, \angle FGD = \angle FAD = \varphi,$$

$$\angle EGC = \angle ABE = \theta, \angle FGC = \angle ADF = \varphi.$$

$$\text{又} \because \angle EGB + \angle EGC + \angle FGC + \angle FGD = \pi,$$

$$\therefore 2\theta + 2\varphi = \pi.$$

$$\text{于是, } (\pi - 2\theta) + (\pi - 2\varphi) = \pi,$$

即 $\angle AFD + \angle AEB = \pi$.

二、对给定的正整数 $a, b, b > a > 1$, a 不能整除 b 及给定的正整数数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足对所有正整数 n 有 $b_{n+1} \geq 2b_n$. 是否总存在正整数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得对所有正整数 n , 有 $a_{n+1} - a_n \in \{a, b\}$, 且对所有正整数 m, l (可以相同), 有 $a_m + a_l \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$?

(陈永高 提供)

解: 答案是肯定的. 我们用归纳法构造.

取 a_1 为正整数, 使 $2a_1 \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 > b - a$ (如 $b_{n_0} > b - a + 1$, 取 $a_1 = b_{n_0} - 1$ 即可).

假设已取 a_1, a_2, \dots, a_k 使得

$$a_{i-1} - a_i \in \{a, b\}, a_m + a_l \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

($1 \leq m \leq k, 1 \leq l \leq k$). 考虑

$$(I) a_1 + a_k + a, a_2 + a_k + a, \dots, a_k + a_k + a,$$

$$2a_k + 2a;$$

$$(II) a_1 + a_k + b, a_2 + a_k + b, \dots, a_k + a_k + b,$$

$$2a_k + 2b.$$

假设 (I) 中有 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项 b_s , (II) 中有 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项 b_t . 由于

$$2a_k + 2b < 2(a_1 + a_k + a)$$

及 $a_1 + a_k + a \leq b_s, b_t \leq 2a_k + 2b$,

$$\text{故 } b_s = b_t.$$

$$\text{又 } b_s = b_t \leq 2a_k + 2a \leq 2a_k + 2b,$$

从而, 存在 $1 \leq j \leq k-1$, 使

$$b_s = a_j + a_k + b.$$

情形 1 $b_s = a_i + a_k + a, 1 \leq i \leq k$.

此时, $a_i - a_j = b - a > 0$. 由归纳假设知

$$a_i - a_j = ca + db, c, d \text{ 为非负整数.}$$

$$\text{这样, } ca + db = b - a.$$

因此, $d = 0, b = (c+1)a$, 与 a 不能整除 b 矛盾.

情形 2 $b_s = 2a_k + 2a$.

此时, $a_k - a_j = b - 2a$. 由 $1 \leq j \leq k$ 及归纳假设

知

$$a_k - a_j = c'a + d'b, c', d' \text{ 为非负整数.}$$

$$\text{这样, } c'a + d'b = b - 2a.$$

$$\text{因此, } d' = 0, b = (c'+1)a, \text{ 矛盾.}$$

故 (I) 或 (II) 中不含 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项.

由此可取 $a_{k+1} = a_k + a$ 或 $a_k + b$ 使得

$$a_{i-1} + a_i \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, 1 \leq i \leq k+1.$$

命题得证.

三、给定大于 1 的整数 k , 记 \mathbf{R} 为全体实数组成的集合. 求所有函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 使得对 \mathbf{R} 中的一切 x 和 y , 都有

$$f(x^k + f(y)) = y + (f(x))^k. \quad (1)$$

(黄宜国 提供)

解: 令 $x=0, t = (f(0))^k$, 由 (1) 有

$$f(f(y)) = y + t. \quad (2)$$

及 $f(f(x^k + f(f(y)))) = f(f(y) + f(x))^k$

$$= f((f(x))^k + f(y)) = y + (f(f(x)))^k = y + (x+t)^k. \quad (3)$$

由 (2) 有

$$f(f(x^k + f(f(y)))) = x^k + f(f(y)) + t = x^k + y + 2t. \quad (4)$$

由 (3), (4) 有 $x^k + y + 2t = y + (x+t)^k$, 即对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$x^k + 2t = (x+t)^k. \quad (5)$$

$$\text{得到 } t = 0, \text{ 即 } f(0) = 0. \quad (6)$$

由(2)、(6)有

$$f(f(y)) = y. \quad (7)$$

由(1)、(7),有

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x+f(f(y))) \\ &= f((x^{\frac{1}{k}})^k + f(f(y))) \\ &= f(y) + f(x^{\frac{1}{k}})^k. \end{aligned} \quad (8)$$

这里当 k 为偶数时,限制 $x \geq 0$.

①当 k 为偶数时,从上式知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的单调递增函数. 现证明: 对 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x$.

因为, 如果有 $z \in \mathbf{R}, f(z) \neq z$. 当 $z < f(z)$ 时, $f(z) \leq f(f(z)) = z$, 矛盾. 当 $z > f(z)$ 时, $f(z) \geq f(f(z)) = z$, 矛盾.

②当 k 为奇数时, 在(1)中令 $y=0$, 有

$$f(x^k) = (f(x))^k.$$

$$\text{从而, } (f(x^{\frac{1}{k}}))^k = f(x), x \in \mathbf{R} \quad (9)$$

由(8)、(9)有

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}. \quad (10)$$

由(10)知对任意有理数 t , 有

$$f(tx) = tf(x), \forall x \in \mathbf{R} \quad (11)$$

及 $f(-x) = -f(x)$.

由(9)、(10)有

$$f((t+x)^k) = (f(t+x))^k = (f(t) + f(x))^k.$$

$$\text{从而, } f\left(\sum_{i=0}^k C_k^i t^i x^{k-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^k C_k^i (f(t))^i (f(x))^{k-i}.$$

由(10)、(11)及上式知, 对任意有理数 t , 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k C_k^i t^i f(x^{k-i}) \\ = \sum_{i=0}^k C_k^i (f(1))^i (f(x))^{k-i}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{从而, } f(x^{k-s}) = (f(1))^s (f(x))^{k-s}, s \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (13)$$

令 $s=k$, $x=1$, 有

$$f(1) = (f(1))^k. \quad (14)$$

由于 $k > 1$ 为正整数以及(6)和(7), 有

$$f(1) = \pm 1. \quad (15)$$

取 $s=k-2$, 则 s 为奇数. 由(13)、(15)有

$$f(x^2) = \pm f(x)^2. \quad (16)$$

当上式取正号时, 有

$$f(x) = f((\sqrt{x})^2) = (f(\sqrt{x}))^2 > 0. \quad (17)$$

由(10)、(17)知, $f(x)$ 是单调递增函数, 再利用(7), 有 $f(x) = x$.

当式(16)取负号时, 对 $\forall x > 0$ 有

$$f(x) = f((\sqrt{x})^2) = -(f(\sqrt{x}))^2 < 0. \quad (18)$$

由(10)、(18)知, $f(x)$ 是单调递减函数.

下面证明 $f(x) = -x, \forall x \in \mathbf{R}$.

如果有 $z \in \mathbf{R}, f(z) \neq -z$.

当 $-z < f(z)$ 时, $f(-z) \geq f(f(z)) = z$,

$-f(z) \geq z, f(z) \leq -z$, 矛盾.

当 $-z > f(z)$ 时, $f(-z) \leq f(f(z)) = z$,

$-f(z) \leq z, f(z) \geq -z$, 也矛盾.

经检验, 当 k 是偶数时, $f(x) = x$ 是解; 当 k 是奇数时, $f(x) = x$ 或 $f(x) = -x$ 是解.

四. 给定大于3的整数 n , 设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}$ 满足条件

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{n-1} < x_{n-2}.$$

试求

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1}}{x_i}\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_{j-2}}{x_{j-1}}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_{n-1} x_{i-2}}{x_i^2 + x_i x_{i-2}}\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_{j-1}^2 + x_i x_{i-2}}{x_j x_{j+1}}\right)}$$

的最小值, 并求出使该式达到最小值的所有满足条件的实数组 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}$.

◀张筑生 提供

解: (I) 记 $t_i = \frac{x_{i-1}}{x_i} (> 1), 1 \leq i \leq n+1$. 题中的式子可写成

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n t_{i-1}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}}\right) \left(\sum_{i=1}^n (t_i + t_{i-1})\right)}$$

我们看到

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}}\right) \left(\sum_{i=1}^n (t_i + t_{i-1})\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{t_i + t_{i-1}}\right) \left(\sum_{i=1}^n (t_i + t_{i-1})\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n (t_i + t_{i-1})\right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{t_i + t_{i-1}}\right) \left(\sum_{i=1}^n (t_i + t_{i-1})\right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n (t_i + t_{i-1})\right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sqrt{t_i + t_{i-1}}} \sqrt{t_i + t_{i-1}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{i=1}^n t_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n t_{i+1}\right) - \left(\sum_{i=1}^n t_i\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n t_{i-1}\right). \end{aligned}$$

因此, 对符合条件的实数组 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n-1} < x_{n-2}$, 题中的式子不小于1.

(II) 上面推演中用到 Cauchy 不等式, 等号成立的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{t_i + t_{i-1}}}{t_i} = d (1 \leq i \leq n) \text{ (常数).}$$

$$\sqrt{t_i + t_{i-1}}$$

$$\text{也就是 } \frac{t_{i-1}}{t_i} = d - 1 = c, 1 \leq i \leq n.$$

记 $t_1 = b$, 有 $t_j = bc^{j-1}$, $1 \leq j \leq n+1$.

相应地有 $\frac{x_{j+1}}{x_j} = t_j = bc^{j-1}$, $1 \leq j \leq n+1$.

记 $x_1 = a > 0$, 有

$$x_k = t_{k-1} t_{k-2} \cdots t_1 a = ab^{k-1} c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}, \quad 2 \leq k \leq n+2.$$

$$\therefore x_2 > x_1, \therefore b = \frac{x_2}{x_1} > 1.$$

又 $\because t_j = bc^{j-1} > 1, 1 \leq j \leq n+1$,

$$\therefore c > \sqrt[n]{\frac{1}{b}} (\geq \sqrt[n-1]{\frac{1}{b}}, 1 \leq j \leq n+1).$$

(III) 得到结论:

(i) 对于符合条件的实数组 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$, 题中式子的最小值是 1.

(ii) 能使该式达到最小值的符合条件 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}$ 的实数组 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ 应该是

$$x_1 = a, x_k = ab^{k-1} c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}, \quad 2 \leq k \leq n+2,$$

其中 $a > 0, b > 1, c > \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$.

五、给定正 $\triangle ABC$, D 是 BC 边上任意一点, $\triangle ABD$ 的外心、内心分别为 O_1, I_1 , $\triangle ADC$ 的外心、内心分别为 O_2, I_2 , 直线 $O_1 I_1$ 与 $O_2 I_2$ 相交于 P . 试求: 当点 D 在 BC 边上运动时, 点 P 的轨迹.

(李胜宏 刘裕文 提供)

解法一: 如图 2 作辅助线. 由

$$\angle AO_2 D = 2 \angle C = 120^\circ,$$

$$\angle AI_2 D = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

$$= 120^\circ,$$

$$\angle B = 60^\circ,$$

知 O_2, I_2 均在 $\odot O_1$.

上.

同理, O_1, I_1 均在 $\odot O_2$

上.

显然, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是等圆, $\angle O_1 D O_2 = 60^\circ$.

$$\therefore \angle AI_2 O_2 = 30^\circ = \angle I_1 A I_2,$$

$$\therefore AI_1 \parallel O_2 P, \angle O_1 P O_2 = \angle O_1 I_1 A = 30^\circ.$$

于是, D 是 $\triangle O_1 P O_2$ 的外心.

在 $\triangle O_2 D I_2$ 中, 由

$$\angle D I_2 O_2 = 150^\circ \Rightarrow \angle O_2 D I_2 + \angle D O_2 I_2 = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle O_2 D C = \angle I_2 D C + \angle O_2 D I_2$$

$$= \angle A D I_2 + \angle O_2 D I_2$$

$$= \angle A D O_2 + \angle O_2 D I_2 + \angle O_2 D I_2$$

$$= 30^\circ + 2 \angle O_2 D I_2,$$

于是, 由 $\angle D O_2 P = \angle D P O_2$, 有

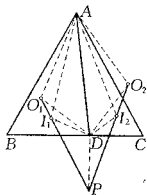


图 2

$$\begin{aligned} \angle PDC &= 180^\circ - \angle C D O_2 - 2 \angle D O_2 P \\ &= 150^\circ - 2 \angle O_2 D I_2 - 2 \angle D O_2 P = 90^\circ. \end{aligned}$$

有 $\angle PDC = 90^\circ$,

即 $PD \perp BC$, 以及 $AD = \sqrt{3} D O_1 = \sqrt{3} D P$.

现以 BC 边所在的直线为 x 轴, BC 边的中点 O 为坐标原点建立直角坐标系, 且不妨设正 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 点 P 的坐标为 (x, y) . 则在直角 $\triangle AOD$ 中, 有

$$AD^2 - OD^2 = AO^2,$$

$$\text{即 } (\sqrt{3}y)^2 - x^2 = (\sqrt{3})^2,$$

$$y^2 - \frac{x^2}{3} = 1, \quad -1 < x < 1, y < 0.$$

解法二: 如图 3

建立坐标系, $BE \perp$

$AC, CF \perp AB$. 设点

D 的坐标为 $(a, 0)$,

不妨设 $0 \leq a < 1$.

则 O_2, I_1 在 BE 或

其延长线上, O_1, I_2

在 CF 或其延长线

上. 由于 O_2 在 DC

的垂直平分线上,

故 O_2 的横坐标为 $\frac{a+1}{2}$. 由 $\angle C B O_2 = 30^\circ$ 知, O_2 的纵

坐标为 $\frac{3+a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. 因此, 点 O_2 的坐标为

$(\frac{a+1}{2}, \frac{3+a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})$. 点 I_2 的纵坐标为 $\triangle ADC$ 内切

圆的半径长 r_2 . 由 $AD = \sqrt{a^2+3}$ 及面积关系有

$$(2+1-a+\sqrt{a^2+3})r_2 = (1-a)\sqrt{3},$$

$$\text{即 } r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(3-a-\sqrt{a^2+3}).$$

过 I_2 作 $I_2 G \perp BC$ 交 BC 于 G . 则由 $\angle G C I_2 = 30^\circ$ 知

$$CG = r_2 \cot 30^\circ = \sqrt{3} r_2.$$

点 I_2 的横坐标为

$$1 - CG = 1 - \frac{1}{2}(3-a-\sqrt{a^2+3})$$

$$= \frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3}).$$

因此, 点 I_2 的坐标为

$$\left(\frac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3}), \frac{\sqrt{3}}{6}(3-a-\sqrt{a^2+3}) \right).$$

同理, 点 I_1 的坐标为

$$\left(\frac{1}{2}(a+1-\sqrt{a^2+3}), \frac{\sqrt{3}}{6}(3+a-\sqrt{a^2+3}) \right).$$

点 O_1 的坐标为 $(\frac{a-1}{2}, \frac{3-a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})$.

$O_2 I_2$ 的方程为

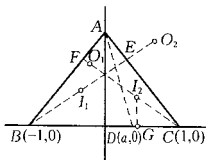


图 3

$$\frac{y - \frac{a+3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{x - \frac{a+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}},$$

$$\text{即 } y - \frac{\sqrt{3}(a+3)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}} \left(x - \frac{a+1}{2}\right). \quad (1)$$

$O_1 I_1$ 的方程为

$$\frac{y - \frac{a-3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{x - \frac{a-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a - \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}},$$

$$\text{即 } y - \frac{\sqrt{3}(3-a)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a - \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}} \left(x - \frac{a-1}{2}\right). \quad (2)$$

由(1)和(2),解得 $x = a$. 代入(2)有

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}(3-a)}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a - \sqrt{a^2+3}}{2 - \sqrt{a^2+3}} \left(a - \frac{a-1}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2+3}. \end{aligned}$$

$$\text{因此, } y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+3},$$

$$\text{即 } y^2 - \frac{x^2}{3} = 1, \quad -1 < x < 1, y < 0.$$

六、记 $F = \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - ax^2 - bx - c|$. 当 a, b, c 取遍所有实数时,求 F 的最小值.

(黄玉民 提供)

解:令

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^3 - a(x+2)^2 - b(x+2) - c \\ &= x^3 + (6-a)x^2 + (12-4a-b)x \\ &\quad + (8-4a-2b-c). \end{aligned}$$

记 $6-a = a_1, 12-4a-b = b_1, 8-4a-2b-c = c_1$. 问题化为求 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$ 的最小值.

可以证明:

$$1 + |a_1| + |b_1| + |c_1| \leq 7 \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|. \quad (*)$$

((*)的证明放在最后).

若(*)成立,当 $|a_1| + |b_1| + |c_1| \geq \frac{3}{4}$ 时,有

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \geq \frac{1}{4}. \quad (1)$$

当 $|a_1| + |b_1| + |c_1| < \frac{3}{4}$ 时,由于

$$|f(1)| \geq 1 - |a_1| - |b_1| - |c_1| > \frac{1}{4}, \quad (2)$$

从而,由(1)和(2)得

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \geq \frac{1}{4}, \quad \forall a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

$$\text{令 } a_1 = 0, b_1 = -\frac{3}{4}, c_1 = 0,$$

$$\text{即 } a = 6, b = -\frac{45}{4}, c = \frac{13}{2}.$$

$$\text{则 } f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x.$$

$$\begin{aligned} \text{由 } f(x) - f(1) &= (x-1) \left(x^2 + x + 1 - \frac{3}{4}\right) \\ &= (x-1) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{从而, } f(x) \leq f(1) = \frac{1}{4}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

$$\text{同理可证 } f(x) - f(-1) = (x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\text{即 } f(x) \geq f(-1) = -\frac{1}{4}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

$$\text{于是,得 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = |f(1)| = \frac{1}{4}. \quad (4)$$

由(3)和(4)可知, $\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - ax^2 - bx - c|$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$, 且当 $a = 6, b = -\frac{45}{4}, c = \frac{13}{2}$ 时达到.

式(*)证明.

只要证明以下命题: 设实系数三次多项式 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足

$$|p(x)| \leq 1, \quad \forall |x| \leq 1, \quad (5)$$

$$\text{则 } |a| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \leq 7.$$

证明: 由 $\pm p(\pm x)$ 均满足(5), 不妨设 $a, \beta \geq 0$.

(i) 当 $\gamma, \delta \geq 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} |a| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \\ = a + \beta + \gamma + \delta = p(1) \leq 1. \end{aligned}$$

(ii) 当 $\gamma \geq 0, \delta \leq 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} |a| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \\ = a + \beta + \gamma - \delta = p(1) - 2p(0) \leq 3. \end{aligned}$$

(iii) 当 $\gamma < 0, \delta \geq 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} |a| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \\ = a + \beta - \gamma + \delta = \frac{4}{3}(a + \beta + \gamma + \delta) \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{3}(-a + \beta - \gamma + \delta)$$

$$- \frac{8}{3} \left(\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{2} + \delta \right)$$

$$+ \frac{8}{3} \left(-\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} - \frac{\gamma}{2} + \delta \right)$$

$$= \frac{4}{3}p(1) - \frac{1}{3}p(-1) - \frac{8}{3}p\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{8}{3}p\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\leq 7.$$

(vi) 当 $\gamma < 0, \delta < 0$ 时, 则

$$|a| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| = a + \beta - \gamma - \delta$$

$$= \frac{5}{3}p(1) - 4p\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}p\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 7.$$

综上所述可知式(5)成立.

(浙江大学数学系 李胜宏 整理)