竞赛之窗

2015 中国国家集训队选拔考试

中图分类号:G424.79　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-6416(2015)05-0019-05

1. 如图 1,在等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC>BC$,D 为 $\triangle ABC$ 内一点,满足 $DA=DB+DC$. 边 AB 的中垂线与 $\angle ADB$ 的外角平分线交于点 P,边 AC 的中垂线与 $\angle ADC$ 的外角平分线交于点 Q. 证明:B、C、P、Q 四点共圆.

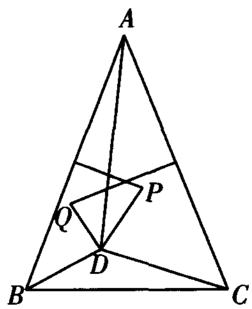

图 1

（何忆捷　供题）

2. 设 X 为非空有限集合,$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为 X 的 k 个子集,满足

(1) $|A_i|\leqslant 3(i=1,2,\cdots,k)$;

(2) X 中任意一个元素属于 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中的至少四个集合.

证明:可从 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中选出 $\left[\frac{3}{7}k\right]$ 个集合,使得它们的并集为 X,其中,$[x]$ 表示不超实数 x 的最大整数.　（熊　斌　供题）

3. 设 a、b 为正整数,且 a 与 b 的最大公约数至少有两个不同的素因子. 设

$$S=\{n\in \mathbf{Z}_+ \mid n\equiv a(\bmod b)\}.$$

对集合 S 中的元素 x,若 x 不能表示成 S 中两个或更多个元素的乘积(这些元素允许相同),则称 x 为"不可约的". 证明:存在正整数 t,使得集合 S 中的每个元素均可表示成 S 中不超过 t 个不可约元素的乘积.

（瞿振华　供题）

4. 给定整数 $n\geqslant 2$,设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为单调不减的正数序列,并使 $x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n}$ 构成一个单调不增的序列. 证明:

$$\frac{A_n}{G_n}\leqslant\frac{n+1}{2\sqrt[n]{n!}},$$

其中,A_n 与 G_n 分别表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均与几何平均.　（冷岗松　供题）

5. 将 2 015 阶完全图 G 的每条边染红、蓝两色之一. 对于图 G 的顶点集 V 的任意一个二元子集 $\{u,v\}$,定义

$L(u,v)=\{u,v\}\cup\{w\in V\mid$ 以 u、v、w 为顶点的三角形中恰有两条红边$\}$.

证明:当 $\{u,v\}$ 取遍顶点集 V 的所有二元子集时,至少可以得到 120 个不同的集合 $L(u,v)$.　（姚一隽　供题）

6. 对正整数 n,定义

$$f(n)=\tau(n!)-\tau((n-1)!),$$

其中,$\tau(a)$ 表示正整数 a 的正约数个数. 证明:存在无穷多个合数 n,使得对任意正整数 $m<n$,均有 $f(m)<f(n)$.　（余红兵　供题）

参考答案

1. 先证明:A、B、D、P 四点共圆.

事实上,如图 2,取弧 $\overparen{ADB}$ 的中点 P',则 P' 在线段 AB 的中垂线上.

任取 BD 延长线上一点 X,则由 $P'A=P'B$ 及 A、B、D、P' 四点共圆,知

$$\angle P'DA=\angle P'BA=\angle P'AB=\angle P'DX,$$

即点 P' 在 $\angle ADB$ 的外角平分线上.

故点 P' 与 P 重合,即 A、B、D、P 四点共圆.

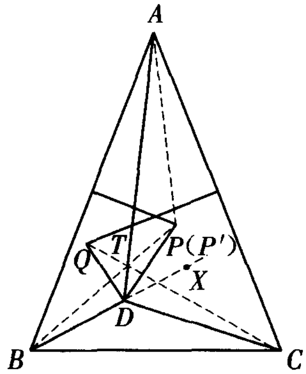

图2

接下来,由托勒密定理得

$AB\cdot DP+BD\cdot AP=AD\cdot BP$.

结合 $PA=PB$ 及 $AD=BD+CD$,知

$$AB\cdot DP=AD\cdot BP-BD\cdot AP$$
$$=AP(AD-BD)=AP\cdot CD$$
$$\Rightarrow\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{CD}.$$

记 BP 与 AD 的交点为 T.

注意到,$\angle BAP+\angle BDP=180^{\circ}$.

$$故\frac{AT}{TD}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle DBP}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AP\sin\angle BAP}{\frac{1}{2}DB\cdot DP\sin\angle BDP}$$
$$=\frac{AB}{DB}\cdot\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{DB}\cdot\frac{AB}{CD}=\frac{AB^2}{BD\cdot CD}.$$

类似地,A、C、D、Q 四点共圆,且若记 CQ 与 AD 的交点为 T',则

$$\frac{AT'}{T'D}=\frac{AC^2}{BD\cdot CD}.$$

又 $AB=AC$,于是,$\frac{AT'}{T'D}=\frac{AT}{TD}$.

因此,点 T' 与 T 重合.

由圆幂定理得

$TB\cdot TP=TA\cdot TD=TC\cdot TQ$.

从而,B、C、P、Q 四点共圆.

2. 从 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中选取尽可能多的互不相交的三元集,设选取了 x 个集合,不妨设为 $A_1,A_2,\cdots,A_x$.

对 $i(x<i\leqslant k)$,令 $B_i=A_i\backslash(\bigcup\limits_{j=1}^{x}A_j)$. 于是,$|B_i|\leqslant 2$(否则,若某个 B_i 为三元集,则 A_i 为与 $A_1,A_2,\cdots,A_x$ 不交的三元集,这与 x 的最大性矛盾).

设 $X_1=X\backslash(\bigcup\limits_{j=1}^{x}A_j)$.

由条件(2),知集合 X_1 中的每个元素均属于 $B_{x+1},B_{x+2},\cdots,B_k$ 中的至少四个集合.

再从 $B_{x+1},B_{x+2},\cdots,B_k$ 中选取尽可能多的互不相交的二元集,设选取了 y 个集合,不妨设为 $B_{x+1},B_{x+2},\cdots,B_{x+y}$.

对 $i(x+y<i\leqslant k)$,令 $C_i=B_i\backslash(\bigcup\limits_{j=x+1}^{x+y}B_j)$.

则 $|C_i|\leqslant 1$.

设 $X_2=X_1\backslash(\bigcup\limits_{j=x+1}^{x+y}B_j)$. 则集合 X_2 中的每个元素均属于 $C_{x+y+1},C_{x+y+2},\cdots,C_k$ 中的至少四个集合. 再从 $C_{x+y+1},C_{x+y+2},\cdots,C_k$ 中选取 $z=|X_2|$ 个集合,它们的并集为 X_2,不妨设选取了 $C_{x+y+1},C_{x+y+2},\cdots,C_{x+y+z}$.

考虑集合 $A_1,A_2,\cdots,A_{x+y+z}$.

首先有

$$\bigcup_{i=1}^{x+y+z}A_i=(\bigcup_{i=1}^{x}A_i)\cup(\bigcup_{i=x+1}^{x+y}B_i)\cup(\bigcup_{i=x+y+1}^{x+y+z}C_i)$$
$$=(X\backslash X_1)\cup(X_1\backslash X_2)\cup X_2=X. \quad ①$$

其次证明:$x+y+z<\frac{3}{7}k$.

显然,$|X_1|=|X|-3x$,

$|X_2|=|X_1|-2y=|X|-3x-2y$.

由条件(1)、(2)易知

$$4|X|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|A_i|\leqslant 3k.$$

类似地,由 B_i 及 C_j 的上述性质得

$$4(|X|-3x)=4|X_1|$$
$$\leqslant\sum_{i=x+1}^{k}|B_i|\leqslant 2(k-x),$$
$$4(|X|-3x-2y)=4|X_2|$$
$$\leqslant\sum_{i=x+y+1}^{k}|C_i|\leqslant k-x-y.$$

以上三式整理得

$$|X|\leqslant\frac{3k}{4},$$

$5x \geqslant 2|X|-k$,

$11x+7y \geqslant 4|X|-k$.

故 $x+y+z$

$=x+y+|X|-3x-2y$

$=|X|-2x-y$

$=|X|-\frac{3}{35}\times 5x-\frac{1}{7}(11x+7y)$

$\leqslant |X|-\frac{3}{35}(2|X|-k)-\frac{1}{7}(4|X|-k)$

$=\frac{9}{35}|X|+\frac{8}{35}k \leqslant \frac{9}{35}\times\frac{3}{4}k+\frac{8}{35}k$

$=\frac{59}{140}k<\frac{3}{7}k$.

记 $t=\left[\frac{3}{7}k\right]$. 则 $x+y+z \leqslant t$.

由式①,知 $A_1, A_2, \cdots, A_{x+y+z}, \cdots, A_t$ 的并集为 X.

3. 首先注意到,集合 S 中每个元素总能表示成 S 中若干个不可约元素的乘积,且表示方法不一定唯一.

此外,若 $x \in S$ 可表示为 S 中 $m(m \geqslant 2)$ 个元素之积,将这一表示等式模 b,得

$a^m \equiv a(\bmod b)$.

因此,若不存在 $m \geqslant 2$,使得

$a^m \equiv a(\bmod b)$,

则集合 S 中的每个元素均是不可约的,结论显然成立.

现假设存在 $m \geqslant 2$,使得

$a^m \equiv a(\bmod b)$,

并设 m_0 为满足该条件的最小正整数.

接下来证明:

$a^n \equiv a(\bmod b) \Leftrightarrow n \equiv 1(\bmod m_0-1)$. ①

事实上,若 $a^n \equiv a(\bmod b)$,设

$n-1=(m_0-1)q+r(0 \leqslant r<m_0-1)$.

当 $q>0$ 时,由

$n=(m_0-1)(q-1)+r+m_0$,

知 $a \equiv a^n \equiv a^{(m_0-1)(q-1)+r+1}$

$=a^{(m_0-1)(q-2)+r+m_0}$

$\equiv a^{(m_0-1)(q-2)+r+1} \equiv \cdots$

$\equiv a^{r+1}(\bmod b)$;

当 $q=0$ 时,仍有

$a^{r+1} \equiv a(\bmod b)$. ②

假如 $r>0$,则 $r+1 \geqslant 2$.

又 $r+1<m_0$,结合式②,知这与 m_0 的最小性矛盾.

因此,$r=0$.

故 $n \equiv 1(\bmod m_0-1)$.

反过来,若 $n \equiv 1(\bmod m_0-1)$,同上可证

$a^n \equiv a(\bmod b)$.

因此,结论①成立.

由结论①,知若 $x \in S$ 可写成集合 S 中至少两个元素之积,则 x 必能写成 S 中 m_0 个元素之积.

事实上,设

$x=x_1x_2\cdots x_l(x_1, x_2, \cdots, x_l \in S, l>1)$.

则 $a^l \equiv a(\bmod b)$

$\Rightarrow l \equiv 1(\bmod m_0-1)$

$\Rightarrow l-m_0+1 \equiv 1(\bmod m_0-1)$.

考虑 $x'=x_{m_0}\cdots x_l$.

则 $x' \equiv a^{l-m_0+1} \equiv a(\bmod b)$.

故 $x' \in S$.

因而,x 可表示为集合 S 中 m_0 个元素 $x_1, \cdots, x_{m_0-1}, x'$ 的乘积.

设 $(a, b)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 (a, b) 的标准分解.

由条件知 $k \geqslant 2$.

以下用 $v_p(n)$ 表示正整数 n 中素因子 p 的幂次.

对 $i=1,2, \cdots, k$,由 $p_i^{\alpha_i} \| (a, b)$ 及

$a^{m_0} \equiv a(\bmod b)(m_0 \geqslant 2)$,

知 $v_{p_i}(b)=\alpha_i$.

设 $b=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}c((c, p_1p_2\cdots p_k)=1)$.

对 $i=1,2, \cdots, k$,令 $\delta_i=\delta_c(p_i)$ 为 p_i 模 c 的阶.

下面证明:集合 S 中每个元素 x 均可表示为 S 中不超过

$$t=m_0+\left[\frac{\delta_1-1}{\alpha_1}\right]+(m_0-1)\left[\frac{\delta_2-1}{\alpha_2}\right]$$

个不可约元素的乘积.

注意到,

正整数 $x\in S\Leftrightarrow x\equiv a(\bmod b)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv a\equiv 0(\bmod p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}),\\ x\equiv a(\bmod c)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v_{p_i}(x)\geqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k),\\ x\equiv a(\bmod c).\end{cases}$$

结合 $p_i^{\delta_i}\equiv 1(\bmod c)$,知

若 $x\in S$,则 $p_i^{\delta_i}x\in S$;

若 $x\in S$,且 $v_{p_i}(x)\geqslant\alpha_i+\delta_i$,则 $p_i^{-\delta_i}x\in S$.

对任意 $x\in S$,若 x 是可约的,由前知 x 可表示为集合 S 中 m_0 个元素之积.

设 $x=y_1y_2\cdots y_{m_0}(y_1,y_2,\cdots,y_{m_0}\in S)$.

不妨设 $v_{p_1}(y_1)\in[\alpha_1,\alpha_1+\delta_1)$.

否则,若 $v_{p_1}(y_1)\geqslant\alpha_1+\delta_1$,则可取正整数 u,使得

$v_{p_1}(y_1)-u\delta_1\in[\alpha_1,\alpha_1+\delta_1)$.

于是,$p_1^{-\delta_1u}y_1$、$p_1^{\delta_1u}y_2\in S$.

故分别用 $p_1^{-\delta_1u}y_1$、$p_1^{\delta_1u}y_2$ 代替 y_1、y_2 即可.

类似地,对每个 $i(2\leqslant i\leqslant m_0)$,可不妨设 $v_{p_2}(y_i)\in[\alpha_2,\alpha_2+\delta_2)$,否则,若有 $v_{p_2}(y_i)\geqslant\alpha_2+\delta_2$,则取正整数 u',使得

$v_{p_2}(y_i)-u'\delta_2\in[\alpha_2,\alpha_2+\delta_2)$,

分别用 $p_2^{-\delta_2u'}y_i$、$p_2^{\delta_2u'}y_1$ 代替 y_i、y_1 即可.

由于集合 S 的每个元素所含的 p_1 的幂次至少为 α_1,而 $v_{p_1}(y_1)<\alpha_1+\delta_1$,因此,$y_1$ 可分解为集合 S 中不超过 $\left[\frac{\alpha_1+\delta_1-1}{\alpha_1}\right]$ 个不可约元素之积.

类似地,考虑素因子 p_2 的幂次,知每个 $y_i(2\leqslant i\leqslant m_0)$ 可分解为集合 S 中不超过 $\left[\frac{\alpha_2+\delta_2-1}{\alpha_2}\right]$ 个不可约元素之积.

因此,$x=y_1y_2\cdots y_{m_0}$ 可表示为集合 S 中不超过

$$\left[\frac{\alpha_1+\delta_1-1}{\alpha_1}\right]+(m_0-1)\left[\frac{\alpha_2+\delta_2-1}{\alpha_2}\right]$$

$$=m_0+\left[\frac{\delta_1-1}{\alpha_1}\right]+(m_0-1)\left[\frac{\delta_2-1}{\alpha_2}\right]$$

个不可约元素的乘积.

4. 由条件知 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,及

$$x_1\geqslant\frac{x_2}{2}\geqslant\cdots\geqslant\frac{x_n}{n}\Rightarrow\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{2}{x_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{n}{x_n}.$$

由切比雪夫不等式得

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{x_i}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{i}{x_i}=\frac{n+1}{2}.\qquad①$$

又由均值不等式得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{x_i}\geqslant\sqrt[n]{\frac{n!}{x_1x_2\cdots x_n}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{G_n}.\qquad②$$

结合式①、②即得 $\frac{A_n}{G_n}\leqslant\frac{n+1}{2\sqrt[n]{n!}}$.

5. 任取一点 $v\in V$.

一方面,若 $V\setminus\{v\}$ 中有 120 个顶点 u_i $(1\leqslant i\leqslant 120)$,使得 vu_i 为蓝边,则对任意 i $(1\leqslant i\leqslant 120)$,由定义知 $u_i\in L(v,u_i)$.

另一方面,由于对任意 i、$j(1\leqslant i<j\leqslant 120)$,$v$、$u_i$、$u_j$ 之间已连有 vu_i、vu_j 两条蓝边,故 $u_i\notin L(v,u_j)$.

结合 $u_i\in L(v,u_i)$,知

$L(v,u_i)\neq L(v,u_j)$.

因此,$L(v,u_i)(1\leqslant i\leqslant 120)$ 为 120 个互不相同的集合,结论成立.

若 $V\setminus\{v\}$ 中至多有 119 个顶点 u,使得 vu 为蓝边,设 W 为 $V\setminus\{v\}$ 中满足 vw 为红边的所有顶点 w 的集合,则

$|W|\geqslant|V|-1-119$

$=2\,015-120=1\,895$.

考虑所有的 $L(v,w)(w\in W)$.

若其中至少有 120 个不同的集合,则结

论成立.

以下设上述不同的 $L(v,w)$ 不超过 119 个,记 $\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数.

由抽屉原理,知集合 W 中必存在

$$l\geqslant\left\lceil\frac{|W|}{119}\right\rceil\geqslant\left\lceil\frac{1\,895}{119}\right\rceil=16$$

个互不相同的点 $w_1,w_2,\cdots,w_l$,使得

$$L(v,w_1)=L(v,w_2)=\cdots=L(v,w_l).$$

注意到,对任意 i、$j(1\leqslant i<j\leqslant 16)$,有

$$w_i\in L(v,w_i)=L(v,w_j).$$

又由集合 W 的定义知 vw_i、vw_j 为红边,故由 $L(v,w_j)$ 的定义知 w_iw_j 为蓝边.

故对任意点 w_i、w_j、$w_k(1\leqslant i<j<k\leqslant 16)$,$w_iw_j$、$w_jw_k$、$w_kw_i$ 均为蓝边.

于是,$w_k\notin L(w_i,w_j)$.

由此,对 i、$j(1\leqslant i<j\leqslant 16)$,$L(w_i,w_j)$ 是互不相同的,这共有 $C_{16}^2=120$ 个.

从而,不同的 $L(u,v)$ 至少有 120 个.

综上,命题获证.

6. 先证明四个引理.

引理 1　对整数 $n>1$,有

$$\tau((n-1)!)<\tau(n!).$$

引理 1 的证明　由 $(n-1)!\mid n!$,知 $(n-1)!$ 的正约数均为 $n!$ 的约数.

又 $n!>(n-1)!$,则 $n!$ 至少有一个正约数不为 $(n-1)!$ 的约数(如 $n!$).

因此,$\tau((n-1)!)<\tau(n!)$.

引理 2　对奇素数 p,有

$$f(p)>f(m)\ (m=1,2,\cdots,p-1).$$

引理 2 的证明　由 τ 为可乘函数知

$$\tau(p!)=\tau(p)\tau((p-1)!)$$
$$=2\,\tau((p-1)!).$$

故 $f(p)=\tau(p!)-\tau((p-1)!)$

$$=2\,\tau((p-1)!)-\tau((p-1)!)$$
$$=\tau((p-1)!).$$

对任意正整数 $m<p$,结合引理 1 得

$$f(m)=\tau(m!)-\tau((m-1)!)$$
$$<\tau(m!)\leqslant\tau((p-1)!)=f(p).$$

引理 3　对奇素数 p、$q(p\leqslant q<2p)$,有 $f(2p)>f(q)$.

引理 3 的证明　设

$$(2p-1)!=2^{\alpha}pA,\ (A,2p)=1.$$

于是,$(2p)!=2^{\alpha+1}p^2A$.

利用 τ 的可乘性知

$$\frac{\tau((2p)!)}{\tau((2p-1)!)}=\frac{3(\alpha+2)}{2(\alpha+1)}>\frac{3}{2}.$$

故 $f(2p)$

$$=\tau((2p)!)-\tau((2p-1)!)$$
$$>\frac{3}{2}\tau((2p-1)!)-\tau((2p-1)!)$$
$$=\frac{1}{2}\tau((2p-1)!).$$

而 $f(q)=\tau(q!)-\tau((q-1)!)$

$$=\frac{1}{2}\tau(q!),$$

再结合引理 1 即得

$$f(q)<f(2p).$$

引理 4　对任意奇素数 p,存在整数 $n\in[p,2p]$,符合题意.

引理 4 的证明　设 n 满足

$$f(n)=\max\{f(p),f(p+1),\cdots,f(2p)\},$$

若有多个 n 满足条件,取其中最小的一个.

由引理 3 知 n 为合数.

由 n 的取法,知对 $p\leqslant m<n$,有

$$f(m)<f(n).$$

特别地,$f(p)<f(n)$.

对 $m<p$,由引理 1 知

$$f(m)<f(p)<f(n).$$

从而,对所有正整数 $m<n$,有

$$f(m)<f(n).$$

故 n 符合要求.

回到原题.

由引理 4 并注意到素数有无限多个,从而,满足要求的 n 也有无限多个.

(熊　斌　提供)