# 2009年IMO中国国家队选拔考试

## 第1天

2009年3月31日　8：00-12：30　湖北 武汉

1、设$D$是三角形$ABC$的$BC$边上一点，满足$\angle CAD=\angle CBA$．圆$O$经过$B$，$D$两点，并分别与线段$AB$，$AD$交于$E$，$F$两点，$BF$、$DE$相交于$G$点．$M$是$AG$的中点．求证：$CM\perp AO$．

2、给定整数$n\geq 2$，求具有下述性质的最大常数$\lambda(n)$：若实数序列$a_0,a_1,a_2,...,a_n$满足

$$0=a_0\leq a_1\leq a_2\leq ...\leq a_n,$$

及
$$a_i\geq \frac{1}{2}(a_{i+1}+a_{i-1}),\quad i=1,2,...,n-1,$$

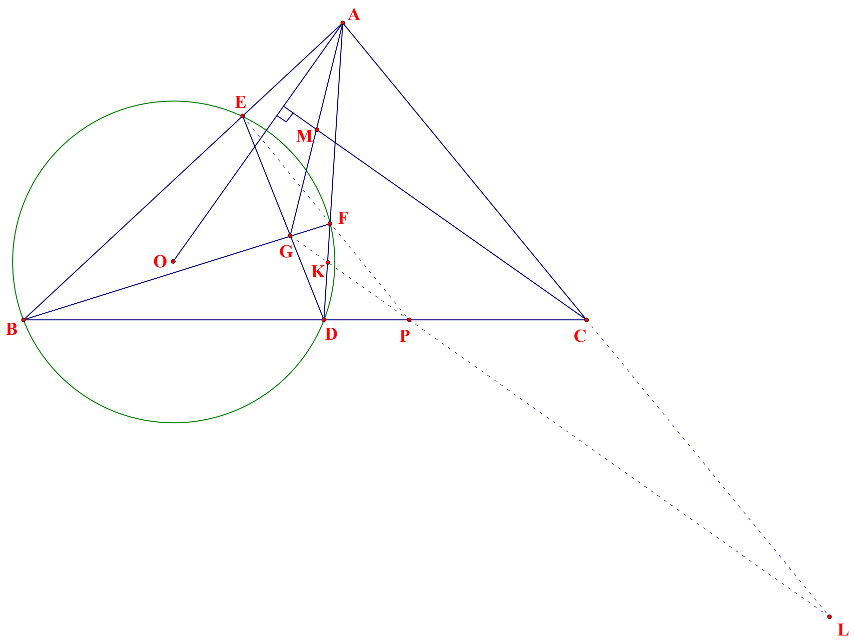
则有

$$(\sum_{i=1}^{n} ia_i)^2\geq \lambda(n)\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

3、求证：对于任意的奇素数$p$，满足$p\mid n!+1$的正整数$n$的个数不超过$cp^{\frac{2}{3}}$，这里$c$是一个与$p$无关的常数.

1、设 $D$ 是三角形 $ABC$ 的 $BC$ 边上一点，满足∠$CAD$=∠$CBA$．圆 $O$ 经过 $B$，$D$ 两点，并分别与线段 $AB$，$AD$ 交于 $E$，$F$ 两点，$BF$、$DE$ 相交于 $G$ 点．$M$ 是 $AG$ 的中点．求证：$CM\perp AO$．

**证明**　如图，连接 $EF$ 并延长交 $BC$ 于 $P$，连接 $GP$ 交 $AD$ 于 $K$，并交 $AC$ 延长线于 $L$．

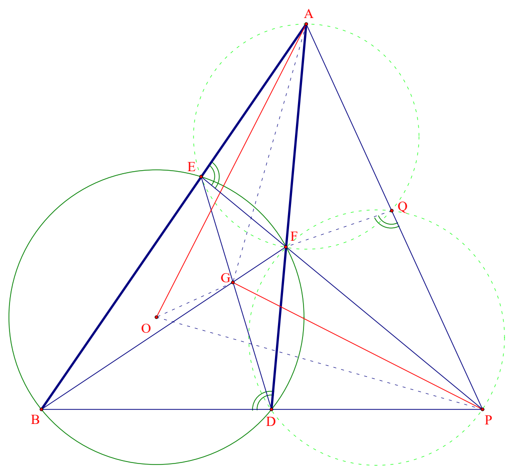



如下图，在 $AP$ 上取一点 $Q$，满足∠$PQF$＝∠$AEF$＝∠$ADB$．

易知 $A$、$E$、$F$、$Q$ 及 $F$、$D$、$P$、$Q$ 分别四点共圆．记⊙$O$ 的半径为 $r$．根据圆幂定理知：

$$AP^2＝AQ\times AP＋PQ\times AP＝AF\times AD＋PF\times PE$$

$$＝（AO^2－r^2）＋（PO^2－r^2）. \qquad ①$$




类似地，可得：　　$AG^2＝（AO^2－r^2）＋（GO^2－r^2）$.　　②

由①，②得 $AP^2－AG^2＝PO^2－GO^2$，于是由平方差原理即知 $PG\perp AO$．

如下图，对△*PFD* 及截线 *AEB* 应用 Menelaus 定理，得

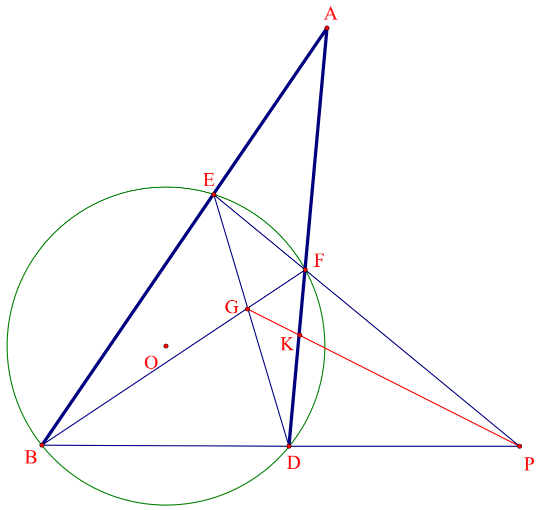
$$\frac{DA}{AF}\times\frac{FE}{EP}\times\frac{PB}{BD}=1. \qquad ③$$

对△*PFD* 及形外一点 *G* 应用 Ceva 定理，得

$$\frac{DK}{KF}\times\frac{FE}{EP}\times\frac{PB}{BD}=1. \qquad ④$$

③÷④即得：

$$\frac{DA}{AF}=\frac{DK}{KF}. \qquad ⑤$$




⑤表明 *A*，*K*；*F*，*D* 构成调和点列，即 *AF*×*KD*＝*AD*×*FK*．

再代入点列的 Euler 公式知：

$$AK\times FD=AF\times KD+AD\times FK=2AF\times KD. \qquad ⑥$$

而由 *B*、*D*、*F*、*E* 四点共圆，得∠*DBA*＝∠*EFA*．而∠*CAD*＝∠*CBA*；故∠*CAF*＝∠*EFA*，这就表明 *AC*∥*EP*．由此，

$$\frac{CP}{PD}=\frac{AF}{FD}. \qquad ⑦$$

在△*ACD* 中，对于截线 *LPK* 应用 Menelaus 定理，得

$$\frac{AL}{LC}\times\frac{CP}{PD}\times\frac{DK}{KA}=1; \qquad ⑧$$

将⑥，⑦代入⑧即得 $\dfrac{AL}{LC}=2$.

最后，在△*AGL* 中，由 *M*、*C* 分别是 *AG*、*AL* 的中点，故 *MC* 是其中位线，得 *MC*∥*GL*．而已证 *GL*⊥*AO*，从而 *MC*⊥*AO*．

2、给定整数 $n\geq 2$，求具有下述性质的最大常数 $\lambda(n)$：若实数序列 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ 满足

$$0=a_0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n,$$

及 $$a_i \ge \frac{1}{2}(a_{i+1}+a_{i-1}),\quad i=1,2,...,n-1,$$

则有

$$(\sum_{i=1}^{n} ia_i)^2 \ge \lambda(n)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 .$$

解：$\lambda(n)$ 的最大值为 $\frac{n(n+1)^2}{4}$.

首先，令 $a_1=a_2=...=a_n=1$，得 $\lambda(n) \le \frac{n(n+1)^2}{4}$.

下面我们证明：对任何满足条件的序列 $a_0,a_1,a_2,...,a_n$，有不等式

$$(\sum_{i=1}^{n} ia_i)^2 \ge \frac{n(n+1)^2}{4}(\sum_{i=1}^{n} a_i^2) \tag{*}$$

首先我们证明 $a_1 \ge \frac{a_2}{2} \ge ... \ge \frac{a_n}{n}$.

事实上，由条件有 $2ia_i \ge i(a_{i+1}+a_{i-1})$ 对任意 $i=1,2,...,n-1$ 成立.

对于给定的正整数 $1 \le l \le n-1$，将此式对 $i=1,2,...,l$ 求和得 $(l+1)a_l \ge la_{l+1}$，即 $\frac{a_l}{l} \ge \frac{a_{l+1}}{l+1}$ 对任意 $l=1,2,...,n-1$ 成立.

下面我们证明，对于 $i,j,k \in \{1,2,...,n\}$，若 $i>j$，则 $\frac{2ik^2}{i+k} > \frac{2jk^2}{j+k}$.

事实上，上式等价于 $2ik^2(j+k) > 2jk^2(i+k)$，即 $(i-j)k^3>0$，显然成立.

现在我们来证明(*). 首先对于 $1 \le i < j \le n$，来估计 $a_i a_j$ 的下界.

由前述，知 $\frac{a_i}{i} \ge \frac{a_j}{j}$，即 $ja_i - ia_j \ge 0$.

又因为 $a_i - a_j \le 0$，故 $(ja_i - ia_j)(a_j - a_i) \ge 0$，即 $a_i a_j \ge \frac{i}{i+j}a_j^2 + \frac{j}{i+j}a_i^2$.

这样，我们有：

$$(\sum_{i=1}^{n} ia_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} ija_i a_j$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(\frac{i^2 j}{i+j}a_j^2 + \frac{ij^2}{i+j}a_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{2ik^2}{i+k}).$$

记 $b_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{2ik^2}{i+k}$，由前面证明可知 $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

又 $a_1^2 \leq a_2^2 \leq \ldots \leq a_n^2$，由切比雪夫不等式，有：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i \geq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i).$$

这样 $(\sum_{i=1}^{n} ia_i)^2 \geq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$.

而

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2ik^2}{i+k} = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(\frac{i^2 j}{i+j} + \frac{ij^2}{i+j}) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} ij = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

因此 $(\sum_{i=1}^{n} ia_i)^2 \geq \frac{n(n+1)^2}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

故(*)获证.

综上所述，可知 $\lambda(n)$ 的最大值为 $\frac{n(n+1)^2}{4}$.

3、求证：对于任意的奇素数 $p$，满足 $p \mid n!+1$ 的正整数 $n$ 的个数不超过 $cp^{\frac{2}{3}}$，这里 $c$ 是一个与 $p$ 无关的常数.

证明　显然，符合要求的 $n$ 应满足 $1 \leq n \leq p-1$. 设这样的 $n$ 的全体是 $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$，

我们只需要证明 $k \leq 12p^{\frac{2}{3}}$，当 $k \leq 12$ 时结论是显然成立的，下设 $k > 12$.

将 $n_{i+1} - n_i$ $(1 \leq i \leq k-1)$ 重排成不减的数列 $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{k-1}$. 则显然有

$$\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i = \sum_{i=1}^{k}(n_{i+1} - n_i) = n_k - n_1 < p. \qquad ①$$

我们首先证明，对 $s \geq 1$，有

$$|\{1 \leq i \leq k-1 : \mu_i = s\}| \leq s, \qquad ②$$

即等于给定的$s$的$\mu_i$至多有$s$个.

事实上，设$n_{i+1}-n_i=s$，则$n_i!+1\equiv n_{i+1}!+1\equiv 0(\bmod p)$，由此可知$(p,n_i!)=1$，故

$$(n_i+s)(n_i+s-1)\ldots(n_i+1)\equiv 1(\bmod p).$$

故$n_i$是$s$次同余方程

$$(x+s)(x+s-1)\ldots(x+1)\equiv 1(\bmod p)$$

的一个解. 由于$p$是素数，由拉格朗日定理知，上述同余方程至多有$s$个解，故满足$n_{i+1}-n_i=s$的$n_i$至多只有$s$个值，从而②得证.

现在我们证明，对任意的正整数$l$，只要$\frac{l(l+1)}{2}+1\leq k-1$，就有$\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}\geq l+1$.

假设结论不成立，即$\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}\leq l$，那么$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$都是 1 到$l$中的正整数. 而由②知，在$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$中，1 至多出现 1 次，2 最多出现 2 次，…，$l$至多出现$l$次，即从 1 到$l$的正整数总共至多出现$1+2+\ldots+l=\frac{l(l+1)}{2}$次，这与$\frac{l(l+1)}{2}+1$个数$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{\frac{l(l+1)}{2}+1}$都是不超过$l$的正整数矛盾！

设$m$是满足$\frac{m(m+1)}{2}+1\leq k-1$的最大正整数，则

$$\frac{m(m+1)}{2}+1\leq k-1<\frac{(m+1)(m+2)}{2}+1 \qquad ③$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i\geq\sum_{i=0}^{m-1}(\mu_{\frac{i(i+1)}{2}+1}+\mu_{\frac{i(i+1)}{2}+2}+\ldots+\mu_{\frac{(i+1)(i+2)}{2}})\geq\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)\mu_{\frac{i(i+1)}{2}+1}\geq\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)^2$$
$$=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}>\frac{m^3}{3}.$$

由于$k>12$，故$m\geq 4$，因此，结合①，③可得

$$k<2+\frac{(m+1)(m+2)}{2}<4m^2<4(3\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i)^{\frac{2}{3}}<4\cdot(3p)^{\frac{2}{3}}.$$

这就证明了结论.

# 2009年IMO中国国家队选拔考试

## 第2天

2009 年 4 月 1 日　8：00-12：30　湖北 武汉

4. 设正实数$a,b$满足$b-a>2$. 求证：对区间$[a,b)$中任意两个不同的整数$m,n$，总存在一个由区间$[ab,(a+1)(b+1))$中某些整数组成的（非空）集合$S$，使得

$$\frac{\prod_{x\in S} x}{mn}$$

是一个有理数的平方.

5. 设$m$是大于1的整数，$n$是一个奇数且$3\le n<2m$. 数$a_{i,j}$ $(i,j\in N,1\le i\le m,1\le j\le n)$满足

(1) 对于任意的$1\le j\le n$，$a_{1,j},a_{2,j},...,a_{m,j}$是$1,2,...,m$的一个排列；

(2) 对于任意的$1\le i\le m,1\le j\le n-1$，有$|a_{i,j}-a_{i,j+1}|\le 1$.

求$M=\max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}$的最小值.

6. 求证：在40个不同的正整数所组成的等差数列中，至少有一项不能表示成$2^k+3^l$的形式，其中$k,l$是非负整数.

4. 设正实数$a,b$满足$b-a>2$. 求证：对区间$[a,b)$中任意两个不同的整数$m,n$，总存在一个由区间$[ab,(a+1)(b+1))$中某些整数组成的（非空）集合$S$，使得

$$\frac{\prod_{x\in S} x}{mn}$$

是一个有理数的平方.

证明 我们需要一个引理.

引理 设整数$u$满足$a\le u<u+1<b$，则区间$[ab,(a+1)(b+1))$中有两个不同整数$x,y$，使得$\frac{xy}{u(u+1)}$是一个整数的平方.

引理的证明 取$v$是大于等于$\frac{ab}{u}$的最小整数，即整数$v$满足

$$\frac{ab}{u}\le v<\frac{ab}{u}+1,$$

故

$$ab\le uv<ab+u(<ab+a+b+1), \qquad ①$$

从而

$$ab<(u+1)v=uv+v<ab+u+\frac{ab}{u}+1<ab+a+b+1 \text{（因 } a\le u<b \text{）}. \qquad ②$$

（这里，我们应用了一个熟知的事实，函数$f(t)=t+\frac{ab}{t}(a\le t\le b)$在$t=a$或$b$时取得最大值.）

由①，②可知，$uv$和$(u+1)v$为区间$I=[ab,(a+1)(b+1))$中的两个不同整数，取$x=uv$，$y=(u+1)v$即知$\frac{xy}{u(u+1)}=v^2$是一个整数的平方.

回到原题，设$m<n$，则$a\le m\le n-1<b$. 由引理可知，对于$k=m,m+1,\cdots\cdots,n-1$，分别有区间$[ab,(a+1)(b+1))$中的两个不同整数$x_k,y_k$，都存在一个整数$A_k$，使得

$$\frac{x_k y_k}{k(k+1)}=A_k^2$$

将所有这些等式相乘，得

$$\frac{\prod_{k=m}^{n-1} x_k y_k}{mn(m+1)^2\ldots(n-1)^2}=\prod_{k=m}^{n-1} A_k^2$$

是一个整数的平方.

令 $S$ 为 $x_i, y_i (m \le i \le n-1)$ 中出现奇数次的数的集合，若 $S$ 非空，则由上式易知

$$\frac{\prod_{x\in S} x}{mn}$$

是一个有理数的平方.

若 $S$ 是空集，则显然 $mn$ 是一个整数的平方.

而由 $a+b>2\sqrt{ab}$ 知 $ab+a+b+1>ab+2\sqrt{ab}+1$，即 $\sqrt{(a+1)(b+1)}>\sqrt{ab}+1$，即区间 $[\sqrt{ab},\sqrt{(a+1)(b+1)})$ 中至少有一个整数，故在区间 $[ab,(a+1)(b+1))$ 中至少有一个完全平方数. 设 $r^2\in[ab,(a+1)(b+1))$ （$r\in Z$），令 $S'=\{r^2\}$，则

$$\frac{\prod_{x\in S'} x}{mn}$$

是一个有理数的平方.

5. 设 $m$ 是大于 1 的整数，$n$ 是一个奇数且 $3\le n<2m$. 数 $a_{i,j}$ $(i,j\in N, 1\le i\le m, 1\le j\le n)$ 满足

(1)对于任意的 $1\le j\le n$，$a_{1,j},a_{2,j},\ldots,a_{m,j}$ 是 $1,2,\ldots,m$ 的一个排列；

(2)对于任意的 $1\le i\le m, 1\le j\le n-1$，有 $|a_{i,j}-a_{i,j+1}|\le 1$.

求 $M=\max\limits_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ 的最小值.

解：

令 $n=2l+1$，由 $3\le n<2m$ 得 $1\le l\le m-1$. 下面先估计 $M$ 的下界.

由(1)知存在唯一的一个 $1\le i_0\le m$，使 $a_{i_0,l+1}=m$. 考虑 $a_{i_0,l}$ 与 $a_{i_0,l+2}$.

情况 1　$a_{i_0,l}$ 与 $a_{i_0,l+2}$ 中至少有一个为 $m$，由对称性不妨设 $a_{i_0,l}=m$. 由(2)我们有

$$a_{i_0,l-1}\ge m-1, a_{i_0,l-2}\ge m-2,\ldots,a_{i_0,1}\ge m-l+1,$$

及

$$a_{i_0,l+2}\ge m-1, a_{i_0,l+3}\ge m-2,\ldots,a_{i_0,2l+1}\ge m-l.$$

故

$$M \ge \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \ge (m-l)+2((m-l+1)+(m-l+2)+...+m)=(2l+1)m-l^{2}.$$

情况 2　$a_{i_0,l}$ 与 $a_{i_0,l+2}$ 都不为 $m$，则由(1)知存在 $1 \le i_1 \le m, i_1 \ne i_0$，使 $a_{i_1,l}=m$. 由(1)，(2)易知 $a_{i_1,l+1}=m-1, a_{i_1,l+2}=m$. 再利用(2)我们有

$$a_{i_1,l-1} \ge m-1, a_{i_1,l-2} \ge m-2, ..., a_{i_1,1} \ge m-l+1,$$

及

$$a_{i_1,l+3} \ge m-1, a_{i_1,l+4} \ge m-2, ..., a_{i_1,2l+1} \ge m-l+1.$$

故

$$M \ge \sum_{j=1}^{n} a_{i_1,j} \ge 2((m-l+1)+(m-l+2)+...+m)+(m-1)=(2l+1)m-(l^{2}-l+1).$$

综合情况 1，2 知 $M \ge (2l+1)m-l^2$.

另一方面，令 $a_{i,j}=f(2i+j)=\begin{cases} 2i+j & (2i+j \le m) \\ (2m+1)-(2i+j) & (m+1 \le 2i+j \le 2m) \\ (2i+j)-2m & (2m+1 \le 2i+j \le 3m) \\ (4m+1)-(2i+j) & (3m+1 \le 2i+j \le 4m) \end{cases}$

则对于任意的 $1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1$，

若 $m \nmid 2i+j$，则 $|a_{i,j}-a_{i,j+1}|=|f(2i+j)-f(2i+j+1)|=1$；

若 $m \mid 2i+j$，则 $|a_{i,j}-a_{i,j+1}|=|f(2i+j)-f(2i+j+1)|=0$.

即(2)成立.

下证(1)成立. 事实上，只须证明对任意的整数 $1 \le j \le n$ 及 $1 \le k \le m$，存在一个整数 $1 \le i \le m$ 使得 $a_{i,j}=k$ 即可.

当 $j \equiv k \pmod 2$ 时，由 $1 \le j \le n$，$1 \le k \le m$ 及 $n<2m$ 知 $-2m<k-j<m$，故 $-m<\frac{k-j}{2}<m$ 且 $\frac{k-j}{2}$ 是一个整数. 因此 $\frac{k-j}{2}$ 和 $\frac{k-j}{2}+m$ 至少有一个在集合

$\{1,2,...,m\}$ 中，取这个数为 $i$ 即可.

当 $j \not\equiv k(\bmod 2)$ 时，由 $1 \le j \le n$，$1 \le k \le m$ 及 $n < 2m$ 知 $-2m < (2m+1)-(j+k) < 2m$，故 $-m < \frac{(2m+1)-(j+k)}{2} < m$ 且 $\frac{(2m+1)-(j+k)}{2}$ 是一个整数. 因此 $\frac{(2m+1)-(j+k)}{2}$ 和 $\frac{(2m+1)-(j+k)}{2}+m$ 至少有一个在集合 $\{1,2,...,m\}$ 中，取这个数为 $i$ 即可.

现在，我们来估计此时的 $M$. 由于(1)成立，故对任意的 $1 \le i_1 < i_2 \le m, 1 \le j \le n-1$，有 $f(2i_1+j) \ne f(2i_2+j)$，即对于奇偶性相同且满足 $3 \le x < y \le 2m+n$ 及 $y-x<2m$ 的整数 $x,y$，有 $f(x) \ne f(y)$. 因此对于给定的 $i$，$a_{i,1},a_{i,3},...,a_{i,2l+1}$ 两两不同，$a_{i,2},a_{i,4},...,a_{i,2l}$ 两两不同.因此我们有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \le (m-l)+2((m-l+1)+(m-l+2)+...+m)=(2l+1)m-l^2.$$

故此时的 $M=\max\limits_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \le (2l+1)m-l^2$.

综上所述，$M$ 的最小值为 $(2l+1)m-l^2 = mn-(\frac{n-1}{2})^2$.

6. 求证：在 40 个不同的正整数所组成的等差数列中，至少有一项不能表示成 $2^k+3^l$ 的形式，其中 $k,l$ 是非负整数.

证明　假设存在一个各项不同，且均能表示成 $2^k+3^l$ 的形式的 40 项等差数列，设这个等差数列为 $a,a+d,a+2d,...,a+39d$，其中 $a,d$ 是正整数.

设 $m=[\log_2(a+39d)], n=[\log_3(a+39d)]$，下面先证明 $a+26d,a+27d,...,a+39d$ 中至多有一个不能表示成 $2^m+3^l$ 或者 $2^k+3^n$ 的形式.（$k,l$ 是非负整数）

若 $a+26d,a+27d,...,a+39d$ 中的某一个 $a+hd$ 不能表示成 $2^m+3^l$ 或者 $2^k+3^n$ 的形式，由假设，一定存在非负整数 $b,c$，使得 $a+hd=2^b+3^c$. 由 $m$ 和 $n$ 的定义知 $b \le m, c \le n$，又因为 $a+hd$ 不能表示成 $2^m+3^l$ 或者 $2^k+3^n$ 的形式，故 $b \le m-1, c \le n-1$.

若$b\le m-2$，则$a+hd\le 2^{m-2}+3^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot 2^m+\frac{1}{3}\cdot 3^n\le\frac{7}{12}\cdot(a+39d)<a+26d$ ，矛盾.

若$c\le n-2$，则$a+hd\le 2^{m-1}+3^{n-2}=\frac{1}{2}\cdot 2^m+\frac{1}{9}\cdot 3^n\le\frac{11}{18}\cdot(a+39d)<a+26d$ ，矛盾.

因此只有$b=m-1,c=n-1$，即$a+26d,a+27d,...,a+39d$ 中至多有一个不能表示成$2^m+3^l$或者$2^k+3^n$的形式.

因此，这 14 个数中至少有 13 个可以写成$2^m+3^l$或者$2^k+3^n$的形式，由抽屉原理，至少有 7 个数可表示为同一种形式. 下面分两种情况.

情况 1 有 7 个数可以表示成$2^m+3^l$的形式，设它们为$2^m+3^{l_1},2^m+3^{l_2},...,2^m+3^{l_7}$，其中$l_1<l_2<...<l_7$. 则$3^{l_1},3^{l_2},...,3^{l_7}$是某个公差为$d$的 14 项等差数列中的七项.

但$13d\ge 3^{l_7}-3^{l_1}\ge(3^5-\frac{1}{3})\cdot 3^{l_2}>13(3^{l_2}-3^{l_1})\ge 13d$ ，矛盾.

情况 2 有 7 个数可以表示成$2^k+3^n$的形式，设它们为$2^{k_1}+3^n,2^{k_2}+3^n,...,2^{k_7}+3^n$，其中$k_1<k_2<...<k_7$. 则$2^{k_1},2^{k_2},...,2^{k_7}$是某个公差为$d$的 14 项等差数列中的七项.

但$13d\ge 2^{k_7}-2^{k_1}\ge(2^5-\frac{1}{2})\cdot 2^{k_2}>13(2^{k_2}-2^{k_1})\ge 13d$ ，矛盾.

综上所述，假设不成立，原题得证.