1994 年国家数学集训队测验试题及解答（中）

黄宣国　　　　姚健钢

（复旦大学数学研究所）（北京市人大附中）

本文讲授 1994 年国家数学集训队测验试题中的几何部分. 几何题一共有 9 题，据作者所知，其中 7 题是新的，2 题是成题.

10.（第 5 次测验第 1 题，黄宣国供题）

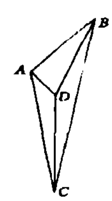
在一个光滑的桌面上，放有半径分别为 1，2，4 的三个木球，每个木球均与桌面相切，并且与其余两个木球外切. 另外，在桌面上还有一个半径小于 1 的小木球，与桌面相切，并且与三个木球都外切. 求这个小木球的半径.

解　易知，半径分别为 r_1, r_2 的两个与桌面相切且互相外切的球与桌面的两切点间的距离为 $2\sqrt{r_1r_2}$. 设小木球半径为 x，半径分别为 1，2，4，x 的木球与桌面的切点分别为 A, B, C, D. 于是，

$$AB=2\sqrt{2}, AC=4, BC=4\sqrt{2},$$

$$AD=2\sqrt{x}, CD=4\sqrt{x}, BD=2\sqrt{2x}. \quad (1)$$

记 $\angle ADB=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，则 $\angle CDA=2\pi-(\alpha+\beta)$.



在 $\triangle ADB$ 中，由余弦定理，有 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\alpha$.

那么，

$$\cos\alpha=\frac{3x-2}{2\sqrt{2}x}. \quad (2)$$

类似地，分别利用 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CDA$ 中余弦定理，有

$$\cos\beta=\frac{3x-4}{2\sqrt{2}x}, \quad (3)$$

$$\cos[2\pi-(\alpha+\beta)]=\frac{5x-4}{4x}. \quad (4)$$

易得

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{12x-4-x^2}}{2\sqrt{2}x},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{24x-16-x^2}}{2\sqrt{2}x}. \quad (5)$$

利用 (2)，(3)，(4) 和 (5)，有

$$\frac{5x-4}{4x}=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1}{8x^2}[(3x-2)(3x-4)-\sqrt{(12x-4-x^2)(24x-16-x^2)}]. \quad (6)$$

从 (6)，有

$$\sqrt{(12x-4-x^2)(24x-16-x^2)}$$

$$=(3x-2)(3x-4)-2x(5x-4)$$

$$=8-10x-x^2. \quad (7)$$

(7) 两边平方有

$$(12x-4-x^2)(24x-16-x^2)$$

$$=(8-10x-x^2)^2. \quad (8)$$

(8) 式展开后，化简，有

$$7x^2-28x+16=0. \quad (9)$$

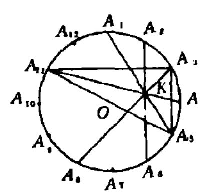
解 (9)，由于 $0<x<1$，可得

$$x=2-\frac{2}{7}\sqrt{21}.$$

11.（第 7 次测验第 1 题，李成章供题）

过正十二边形内部的一个非中心点，最多能作几条不同的对角线？

解　设正十二边形为 $A_1A_2\cdots A_{12}$.



首先证明 4 条对角线 A_1A_5，A_2A_6，A_3A_8，A_4A_{11} 相交于正十二边形内部的一个非中心点.

因为 $\overset{\frown}{A_5A_8}=\overset{\frown}{A_8A_{11}}$，$\overset{\frown}{A_{11}A_1}=\overset{\frown}{A_1A_3}$，$\overset{\frown}{A_3A_4}=\overset{\frown}{A_4A_5}$，所以，直线 A_3A_8，A_5A_1，$A_{11}A_4$ 分别是 $\triangle A_3A_5A_{11}$ 的三条内角平分线. 于是，A_1A_5 经过对角线 A_3A_8 与 A_4A_{11} 的交点 K. 同理，直线 A_2A_6，A_4A_{11}，A_8A_3 分别是 $\triangle A_2A_4A_8$ 的三条内角平分线，所以，对角线 A_2A_6 也经过点 K. 于是，这 4 条对角线相交于点 K. 这点 K 在弦 A_1A_5 上，K 不同于中心 O.

下面，证明在正十二边形中不存在 5 条对角线相交于其内部的一个非中心点.

用反证法. 假设这样的 5 条对角线存在，那么，这 5 条对角线的 10 个端点互不相同，并且其中任意一条对角线将正十二边形的外接圆分成的两段弧上分别有其余 4 条对角线的 4 个端点. 由此可知，如果

这10个端点给出，那么这5条对角线也就确定了.

由正十二边形顶点的对称性，不妨设这12个顶点中除去A_1，及A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7中某一点，为上述10个端点. 现在，对这某一点分情况讨论.

(1)若这点为A_2，由于$\overset{\frown}{A_4A_7}=\overset{\frown}{A_9A_{12}}$，从而这5条对角线中的$A_4A_9$，$A_7A_{12}$的交点$M$与中心$O$，及点$A_8$在一条直线上，只要注意到$\triangle MA_4A_7$全等于$\triangle MA_{12}A_9$，以及$\triangle OMA_9$全等于$\triangle OMA_7$，就能知道这一性质. 于是，交点$M$不在这5条对角线中的另一条$A_3A_6$上，矛盾.

(2)若这点为A_3，由于$\overset{\frown}{A_4A_5}=\overset{\frown}{A_9A_{10}}$，从而5条对角线中的$A_4A_9$，$A_5A_{10}$的交点$M$，中心$O$和点$A_7$在同一条直线上，点$M$不在5条对角线中的另一条$A_2A_6$上，也矛盾.

(3)若这点为A_4,A_5,A_6,A_7中的某点，此时，5条对角线中的A_2A_8，A_3A_9都是直径，必相交于中心O，矛盾.

综上所述，本题的答案为4.

12.（第7次测验第3题，李成章供题）

已知空间中9点，其中任4点不共面. 在这9点间连接若干条线段，使图中不存在四面体. 问图中最多有多少个三角形？

解 先证明下述结论：

在一个n个点的空间图中不存在三角形，则其边数不超过$[\frac{n^2}{4}]$. （*）

设这n个点为$A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中从A_1引出的边数最多，不妨设共有k条边$A_1A_n,A_1A_{n-1},\cdots,A_1A_{n-k+1}$. 依条件，不存在三角形，那么点$A_{n-k+1},\cdots,A_n$之间没有边相连. 从而空间图中每条边均至少有一个端点为$A_1,A_2,\cdots,A_{n-k}$中的点，而每个A_i $(1\leqslant i\leqslant n-k)$至多引出$k$条边，则总边数$\leqslant k(n-k)\leqslant[\frac{n^2}{4}]$.

下面证明空间中9点，其中任4点不共面，在这9点间连接若干条线段，如果图内已有（至少）28个三角形，则至少有一个四面体.

用反证法，假设不存在一个四面体，设这9个点为$A_1,A_2,\cdots,A_9$. 由抽屉原理，其中必有一点为至少$\lceil\frac{28\times3}{9}\rceil=10$个三角形的顶点，这里$\lceil\frac{28\times3}{9}\rceil$表示不小于$\frac{28\times3}{9}$的最小整数. 从而，从这个点至少引出5条边，设这点为A_1.

(1)若从A_1引出5条边$A_1A_2,\cdots,A_1A_6$，则依题意，由于没有四面体，那么，由$A_2,A_3,\cdots,A_6$这5个点组成的子图中没有三角形. 由结论(*)，这子图中至多有$[\frac{5^2}{4}]=6$条边，那么，以A_1为顶点的三角形至多有6个，矛盾.

(2)若从点A_1引出6条边$A_1A_2,A_1A_3,\cdots,A_1A_7$，则类似(1)，至多有$[\frac{6^2}{4}]=9$个三角形以$A_1$为顶点，矛盾.

(3)若从点A_1引出7条边$A_1A_2,\cdots,A_1A_8$，由于没有四面体，可知$A_2,\cdots,A_8$这7个点构成的子图中没有三角形，再利用结论(*)，这子图至多有$[\frac{7^2}{4}]=12$条边. 从而，以A_1为顶点的三角形至多有12个，不以A_1为顶点的三角形必以点A_9为一个顶点，类似地也至多有12个三角形. 那么，三角形总数$\leqslant12\times2=24<28$，矛盾.

(4)若从点A_1引出8条边$A_1A_2,\cdots,A_1A_9$，则此时$A_2,\cdots,A_9$这8个点构成的子图中没有三角形，由结论(*)，至多有$[\frac{8^2}{4}]=16$条边，从而原图中至多有16个三角形，矛盾.

于是，满足题目条件的三角形至多27个.

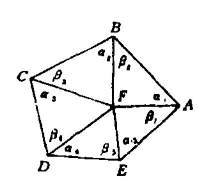
将9个点$A_1,A_2,\cdots,A_9$分成3组$\{A_1,A_2,A_3\}$，$\{A_4,A_5,A_6\}$，$\{A_7,A_8,A_9\}$，同组中两点不连线，而不同组的两点间均连线. 这样，有$C_3^1C_3^1C_3^1=27$个三角形. 当然，无一个四面体.

13.（第8次测验第3题，夏兴国供题）

设$P(z)$表示复平面上复数z对应的点，复数$\alpha=p+iq$(p,q为实数). 已知点$P(z_1),P(z_2),P(z_3),P(z_4),P(z_5)$是凸五边形$Q$的顶点，并且原点及点$P(\alpha z_1),P(\alpha z_2),P(\alpha z_3),P(\alpha z_4),P(\alpha z_5)$均在$Q$的内部. 求证：

$$p+q\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\leqslant1.$$

证明 已知凸五边形$ABCDE$及内部一点F（见图），则在角$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$中必有一个不超过$\frac{3\pi}{10}$. （*）



结论(*)的证明：假设

角 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均大于 $\frac{3\pi}{10}$,则 $A=\sum\limits_{j=1}^{5}\alpha_j>\frac{3}{2}\pi$.

由三角形的正弦定理,有

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_3}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_4}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\beta_5}\cdot\frac{\sin\alpha_5}{\sin\beta_1}=\frac{FB}{FA}\cdot\frac{FC}{FB}\cdot\frac{FD}{FC}\cdot\frac{FE}{FD}\cdot\frac{FA}{FE}=1. \quad (1)$$

于是,有

$$\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4\sin\alpha_5=\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4\sin\beta_5. \quad (2)$$

又 $\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4\sin\beta_5$

$$\leqslant[\frac{1}{5}(\sin\beta_1+\sin\beta_2+\sin\beta_3+\sin\beta_4+\sin\beta_5)]$$

$$\leqslant(\sin\frac{1}{5}(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5))^5$$

$$=\sin^5(\frac{3\pi-A}{5}). \quad (3)$$

从(2)、(3)可知,在 $\sin\alpha_i(1\leqslant i\leqslant5)$ 中必有一个不超过 $\sin\frac{3\pi-A}{5}$,即有角 α_i 满足 $\alpha_i<\frac{3\pi-A}{5}$ 或 $\pi-\alpha_i<\frac{3\pi-A}{5}$. 又 $A>\frac{3}{2}\pi$,则 $\frac{3\pi-A}{5}<\frac{3\pi}{10}$. 因此,只可能有 $\pi-\alpha_i<\frac{3\pi-A}{5}$,即 $\alpha_i>\frac{2\pi+A}{5}$. 为书写方便,不妨记此角 α_i 为 α_1. 下面对 A 分情况讨论.

①$A\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$,则此时

$$A=\alpha_1+\sum_{j=2}^{5}\alpha_j>\frac{2\pi+A}{5}+\frac{3\pi}{10}\times4=A+\frac{4}{5}(2\pi-A)>A,$$ 矛盾.

记 $\theta=\sum\limits_{j=2}^{5}(\alpha_j-\frac{3\pi}{10})$,

则 $\theta=A-\alpha_1-\frac{6\pi}{5}\leqslant\frac{4}{5}(A-2\pi)$.

②$A\in[2\pi,\frac{5\pi}{2}]$,此时 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{5}$.

注意到如果 $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$,有

$$\sin(\frac{3\pi}{10}+\alpha)\sin(\frac{3\pi}{10}+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\frac{3\pi}{5}+\alpha+\beta)]$$

$$\geqslant\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\frac{3\pi}{5}+\alpha+\beta)]$$

$$=\sin\frac{3\pi}{10}\sin(\frac{3\pi}{10}+\alpha+\beta). \quad (4)$$

从而,有

$$\prod_{j=2}^{5}\sin\alpha_j=\prod_{j=2}^{5}\sin[\frac{3\pi}{10}+(\alpha_j-\frac{3\pi}{10})]$$

$$\geqslant\sin^3\frac{3\pi}{10}\sin(\frac{3\pi}{10}+\theta)\geqslant\sin^4\frac{3\pi}{10}. \quad (5)$$

又 $\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5=3\pi-A-\beta_1<\pi$,那么,

$\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4\sin\beta_5$

$$\leqslant[\frac{1}{4}(\sin\beta_2+\sin\beta_3+\sin\beta_4+\sin\beta_5)]^4$$

$$\leqslant(\sin\frac{1}{4}(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5))^4\leqslant\sin^4\frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

但是 $\alpha_1>\frac{\pi}{2}$, $\alpha_1+\beta_1<\pi$. 那么, $\sin\alpha_1>\sin(\pi-\beta_1)=\sin\beta_1$. 再兼顾(5)、(6),有

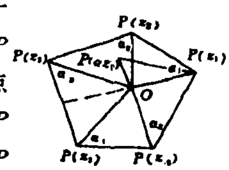
$$\prod_{j=1}^{5}\sin\alpha_j>\prod_{j=1}^{5}\sin\beta_j. \quad (7)$$

与(2)矛盾.

③$A\in(\frac{5\pi}{2},3\pi)$,则此时有 $\frac{2\pi}{5}<\theta<\frac{4\pi}{5}$. 从而,在角 $\alpha_i(2\leqslant i\leqslant5)$ 中至多有一角大于等于 $\frac{7\pi}{10}$. 又角 $\alpha_1>\frac{9\pi}{10}$. 不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_j$ 这 j 个角($j=1$ 或 2)大于 $\frac{7\pi}{10}$. 因为 $\alpha_k>\frac{\pi}{2}(1\leqslant k\leqslant j)$, $\alpha_k+\beta_k<\pi$, 则 $\sin\alpha_k>\sin\beta_k$. 那么, $\sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_j>\sin\beta_1\cdots\sin\beta_j$. 又 $\sin\alpha_{j+1}\cdots\sin\alpha_5>\sin^{5-j}\frac{3\pi}{10}>\sin^{5-j}\frac{\frac{\pi}{2}}{5-j}>\sin\beta_{j+1}\cdots\sin\beta_5$. 这里应用 $\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5<3\pi-A=\frac{\pi}{2}$. 那么,仍然有(7). 矛盾.

综上所述,结论(*)成立.

下面来解本题.



设距原点 O 最远的一个凸五边形 Q 的顶点为 $P(z_i)$,则 Q 的内部任意一点到 O 的距离均不会超过 $OP(z_i)$. 于是,从 $OP(\alpha z_i)<OP(z_i)$,可以知道 $|\alpha|\leqslant1$. 当 $q\leqslant0$ 时,有 $p+q\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\leqslant|\alpha|\leqslant1$. 下面考虑 $q>0$ 的情况.

由结论(*),不妨设 $\alpha_1\leqslant\frac{3\pi}{10}$. 因为 $q>0$,从而点 $P(\alpha z_1)$ 在 $\angle OP(z_1)P(z_2)$ 内. 于是,有

$$\angle P(\alpha z_1)P(z_1)O\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{3\pi}{10}.$$

而向量 $\overrightarrow{P(z_1)O}$ 与 $\overrightarrow{P(z_1)P(\alpha z_1)}$ 代表的复数分别为 $-z_1,(\alpha-1)z_1$,于是,复数 $\frac{-z_1}{(\alpha-1)z_1}$ 的辐角小于等于 $\frac{3\pi}{10}$,即 $\frac{1}{1-\alpha}$ 的辐角小于等于 $\frac{3\pi}{10}$. 而

$$\frac{1}{1-\alpha}=\frac{(1-p)+iq}{(1-p)^2+q^2}. \quad (9)$$

那么，有 $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}\geqslant\frac{q}{1-p}$.　　(10)

于是，$p+q\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\leqslant 1$.　　(11)

14.（第 9 次测验第 1 题，过伯祥供题）

已知$\triangle DEF$为$\triangle ABC$的内接相似三角形，其中D,E,F分别在BC,CA,AB边上，且$\angle D=\angle B,\angle E=\angle C$.

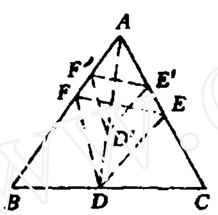
(1)作出$\triangle ABC$的一个内接相似$\triangle DEF$.

(2)求证这个构图中存在这样一点O，绕着点O把$\triangle DEF$旋转一个适当角度到$\triangle D'E'F'$，这时点F',D',E'便分别在射线OA,OB,OC上，且$F'D'\parallel AB,D'E'\parallel BC,E'F'\parallel CA$.

(1)**解**　在AB,AC上取点F',E'，再取点D'，使得$\angle D'F'E'=\angle A,\angle D'E'F'=\angle C$.

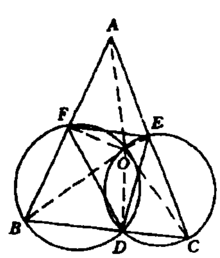
连接AD'，并延长交BC于D，过点D分别作$D'F',D'E'$的平行线，交AB,AC于F,E. 于是，

$$\frac{AF'}{AF}=\frac{AD'}{AD}=\frac{AE'}{AE}.$$



从而，$EF\parallel E'F'$. 故$\triangle DEF\backsim\triangle D'E'F'$. 而$\triangle D'E'F'$显然相似于$\triangle ABC$，则$\triangle DEF$是$\triangle ABC$的一个内接相似三角形.

(2)**证明**　从(1)可知，$\angle EDF=\angle B<\angle B+\angle C$. 那么，$\triangle BDF$与$\triangle CDE$的外接圆不相切于点$D$，即这两圆还有异于$D$的一个交点. 下面证明这交点就是题目中要求的点$O$.



见图，因为$\angle FAE+\angle FOE=\angle BAC+360^\circ-\angle FOD-\angle EOD=\angle BAC+(180^\circ-\angle FOD)+(180^\circ-\angle EOD)=\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，从而，点$O$也在$\triangle AEF$的外接圆上.

由于O,E,A,F四点共圆，所以，$\angle OFE=\angle OAE$.

同理，$\angle OED=\angle OCD,\angle ODF=\angle OBF$.

又$\angle DFE=\angle BAC,\angle DEF=\angle ACB,\angle EDF=\angle ABC$，

从而，$\angle OFD=\angle OAB,\angle OEF=\angle OCA,\angle ODE=\angle OBC$.

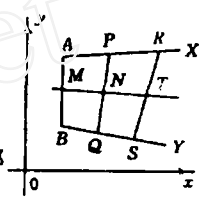
这导致$\triangle OFE\backsim\triangle OAC,\triangle OED\backsim\triangle OCB,\triangle ODF\backsim\triangle OBA$，记$\alpha=\angle FOA$.

将$\triangle DEF$绕点O顺时针旋转角α到$\triangle D'E'F'$，则点F'在射线OA上，点E',D'分别在射线OC,OB上，并且有$F'E'\parallel AC,E'D'\parallel CB,D'F'\parallel BA$.

15.（第 9 次测验第 2 题，过伯祥供题）

已知P,R为射线AX上两点，Q,S为射线BY上两点，并满足$\frac{AP}{BQ}=\frac{AR}{BS}=\lambda$. M,N,T分别在线段AB,PQ,RS上，并且满足$\frac{AM}{MB}=\frac{PN}{NQ}=\frac{RT}{TS}=k$. 问$M,N,T$三点的位置关系如何？

解　如图，建立直角坐标系，用x_D,y_D分别表示点D的横坐标与纵坐标.



依题目条件，可设

$$\frac{AR}{AP}=\frac{BS}{BQ}=u,$$

再设$x_P=x_A+a_1$，$y_P=y_A+b_1$，$x_Q=x_B+a_2,y_Q=y_B+b_2$. 那么，

$$x_R=x_A+ua_1,y_R=y_A+ub_1,x_S=x_B+ua_2,y_S=y_B+ub_2.$$

再利用k的定义，有

$$x_M=\frac{x_A+kx_B}{1+k},\ y_M=\frac{y_A+ky_B}{1+k},$$

$$x_N=\frac{x_P+kx_Q}{1+k},y_N=\frac{y_P+ky_Q}{1+k},$$

$$x_T=\frac{x_R+kx_S}{1+k},y_T=\frac{y_R+ky_S}{1+k}.$$

那么，

$$\frac{y_T-y_M}{y_N-y_M}=u=\frac{x_T-x_M}{x_N-x_M}.$$

从而，M,N,T三点共线.

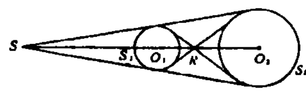
16.（第 9 次测验第 3 题，过伯祥供题）

已知半径不等的相离两圆S_1,S_2. R为S_1,S_2的内公切线的交点，S为S_1,S_2的外公切线的交点. 在线段RS上取一点C，使得C在小圆S_1的外部. 过C引S_1的两条切线与以RS为直径的圆交于四点，其中P_1,P_2为在直线RS同侧的两点. 求证：直线P_1P_2为大圆S_2的切线.

证明　设圆S_1,S_2的圆心分别为O_1,O_2，半径分别为r_1,r_2.

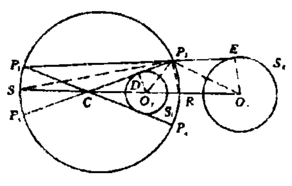
如图甲，容易看到R,S都在两圆连心线O_1O_2上，而且$\frac{RO_1}{RO_2}=\frac{SO_1}{SO_2}=\frac{r_1}{r_2}$. 从而，在平面上满足$\frac{PO_1}{PO_2}=$

$\frac{r_1}{r_2}(r_1\neq r_2)$的点 P 的轨迹为以 RS 为直径的圆(阿波罗尼圆).



图甲

如图乙,连接 P_1P_2,并且过 P_2 作圆 S_2 的切线 P_2E. 因为 $\frac{P_2O_1}{P_2O_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{O_1D}{O_2E}$,从而,直角$\triangle O_1P_2D$相似于直角$\triangle O_2P_2E$. 所以,$\angle O_1P_2D=\angle O_2P_2E$. 因为 $\frac{P_2O_1}{P_2O_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{RO_1}{RO_2}$, 所以,



图乙

$\angle O_1P_2R=\angle O_2P_2R$. 又利用对称性,可知$\overset{\frown}{P_1S}=\overset{\frown}{P_3S}$, 那么,$\angle P_3P_2S=\angle P_1P_2S$. 从而,

$$\begin{aligned}&\angle P_1P_2S+\angle P_3P_2S+\angle O_1P_2D+\angle O_1P_2R\\&+\angle O_2P_2R+\angle O_2P_2E\\&=2(\angle P_3P_2S+\angle O_1P_2D+\angle O_1P_2R)\\&=2\angle RP_2S=180^\circ.\end{aligned}$$

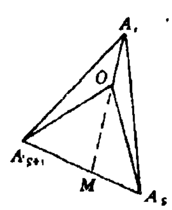
于是,P_1,P_2,E三点共线.

17.(第1次测验第1题,《美国数学月刊》1947年第117页)

已知 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$是平面上一个正 $2n+1$ 边形 $(n\in N)$. O 是这正 $2n+1$ 边形内部任意一点. 求证:一定存在一个$\angle A_iOA_j$,满足 $\pi(1-\frac{1}{2n+1})\leqslant A_iOA_j\leqslant\pi$.

证明　事实上,此命题对于任意正 k 边形都成立,这里正整数 $k\geqslant3$. 下面对于正 k 边形给出证明. 其顶点依次为 $A_1,A_2,\cdots A_k$.

设 A_i 是距点 O 最近的正 k 边形的一个顶点. 连 A_iO,并延长交正多边形于一点 M.



如果 M 为某个顶点 A_j,则 $\angle A_iOA_j=\pi$. 命题成立.

如果 M 在某条边 A_sA_{s+1}的内部,则$\angle A_iOA_s<\pi$,$\angle A_iOA_{s+1}<\pi$.

因为 $A_iO\leqslant A_sO,A_iO\leqslant A_{s+1}O$,

所以 $\angle A_iA_sO\leqslant\angle A_sA_iO$,

$\angle A_iA_{s+1}O\leqslant\angle A_{s+1}A_iO$.

从而,$\angle A_iOA_s+\angle A_iOA_{s+1}$

$$\begin{aligned}&=(\pi-\angle A_sA_iO-\angle A_iA_sO)+(\pi-\angle A_{s+1}A_iO\\&\quad-\angle A_iA_{s+1}O)\\&\geqslant2\pi-2\angle A_sA_iO-2\angle A_{s+1}A_iO\\&=2\pi-2\angle A_sA_iA_{s+1}=2\pi(1-\frac{1}{k}).\end{aligned}$$

上式表明,$\angle A_iOA_s$,$\angle A_iOA_{s+1}$中有一个角不小于 $\pi(1-\frac{1}{k})$.

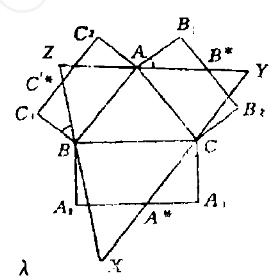
于是,命题得证.

18.(第5次测验第3题,《美国数学月刊》1941年第276页至第277页)

已知$\triangle ABC$,在$\triangle ABC$的形外作三个相似矩形 BCA_1A_2,CAB_1B_2,ABC_1C_2,满足条件$\frac{CA_1}{BC}=\frac{AB_1}{CA}=\frac{BC_1}{AB}=k$. 点 A^*,B^*,C^* 分别在线段 A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 上,并且有$\frac{A_1A^*}{A_1A_2}=\frac{B_1B^*}{B_1B_2}=\frac{C_1C^*}{C_1C_2}=\lambda$. 直线 AB^*,BC^*,CA^* 相交成一个$\triangle XYZ$. 求证:

$$\frac{S_{\triangle XYZ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{[\lambda+k(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)]^2}{\lambda^2+k^2}.$$

证明　如图,依照题目条件,在直角三角形 AB_1B^*, CA_1A^*, BC_1C^* 中有 $\frac{B_1B^*}{AB_1}=\frac{A_1A^*}{CA_1}=\frac{C_1C^*}{BC_1}=\frac{\lambda}{k}$. 从而, $\angle B_1AB^*=\angle A_1CA^*=\angle C_1BC^*$,



将它们记为 θ. 那么, $\operatorname{tg}\theta=\frac{\lambda}{k}$.

$$\begin{aligned}&\angle ZYX=\pi-\angle ACY-\angle CAY\\&=\pi-\angle ACY-\angle BCX=\angle ACB.\end{aligned}$$

同理,$\angle ZXY=\angle CBA$. 那么,$\triangle XYZ\backsim\triangle BCA$.

在$\triangle ACY$和$\triangle BCX$中,由正弦定理,有

$$\frac{CY}{AC}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin C},\frac{XC}{BC}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta-B)}{\sin B}.$$

从而,

$$\begin{aligned}\frac{XY}{BC}&=\frac{CY}{AC}\cdot\frac{AC}{BX}+\frac{CX}{BC}\\&=\frac{\cos\theta}{\sin C}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\cos(B-\theta)}{\sin B}\\&=\cos\theta\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}+\operatorname{ctg}B\cos\theta+\sin\theta\\&=\sin\theta+\cos\theta\cdot(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)\\&=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+k^2}}+\frac{k}{\sqrt{\lambda^2+k^2}}(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C).\end{aligned}$$

于是,有

$$\frac{S_{\triangle XYZ}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{XY}{BC})^2=\frac{[\lambda+k(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)]^2}{\lambda^2+k^2}.$$