第三届(1988年)数学奥林匹克国家集训队选拔试题解答

1. 设实数A，B，C使得下面的不等式（＊）对任何实数x，y，z都成立．问A，B，C应满足怎样的条件？（要求写出充分必要条件，并限定用只涉及A，B，C的等式或不等式来表示这条件）

$$A(x-y)(x-z)+B(y-z)(y-x)+C(z-x)(z-y)\geqslant 0. \qquad (*)$$

解　在（＊）式中令$x=y$，得

$$C(z-x)^2\geqslant 0.$$

由x，z的任意性得$C\geqslant 0$．再由对称性可得

$$A\geqslant 0,\ B\geqslant 0,\ C\geqslant 0. \qquad (1)$$

令　$x-y=s$，$y-z=t$，则$x-z=s+t$，（＊）式等价于

$$As(s+t)+Bt(-s)+C(-s-t)(-t)\geqslant 0,$$

或　$As^2+(A-B+C)st+Ct^2\geqslant 0$．（2）

显然，（＊）式对任意的x，y，z都成立，等价于（2）式对任意的s，t都成立．又由条件（1），（2）对任意的s，t都成立的充要条件是

$$\Delta=(A-B+C)^2-4AC\leqslant 0,$$

即　$A^2+B^2+C^2\leqslant 2(AB+BC+CA)$．（3）

综上所述，A，B，C所应满足的条件是（1）和（3）．

2. 设Q是有理数集，C是复数集．考虑定义在Q上取值在C中的函数f：$Q\to C$．若这函数满足条件：

（1）对任何1988个有理数x_1，x_2，…，x_{1988}都有

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_{1988})=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\cdots\cdot f(x_{1988}); \qquad ①$$

（2）对任何有理数x都有

$$\overline{f(1988)}f(x)=f(1988)\overline{f(x)}. \qquad ②$$

试求出一切这样的函数．

解　显然，$f\equiv 0$是一个解．以下设$f\not\equiv 0$，则存在有理数x_0，使$f(x_0)\neq 0$．在①中令$x_1=x_0$，$x_2=x_3=\cdots=x_{1988}=0$，得

$$f(x_0)=f(x_0)\cdot(f(0))^{1987}.$$

由于$f(x_0)\neq 0$，所以

$$(f(0))^{1987}=1.$$

令$\omega=f(0)$，则$\omega^{1987}=1$．

令$g(x)=f(x)/\omega$，则$g(0)=1$，条件（1）化为

$$g(x_1+x_2+\cdots+x_{1988})=g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_{1988}); \qquad ③$$

条件（2）化为

$$\overline{g(1988)}\cdot g(x)=g(1988)\cdot\overline{g(x)}. \qquad ④$$

在③中令　$x_3=x_4=\cdots=x_{1988}=0$，利用$g(0)=1$，得

$$g(x_1+x_2)=g(x_1)\cdot g(x_2). \qquad ⑤$$

若有x'使$g(x')=0$，则对任意$x\in Q$，由⑤得

$$g(x)=g(x')\cdot g(x-x')=0,$$

特别有$g(0)=0$．与前面假设矛盾．故对任意有理数x，$g(x)\neq 0$．

在④中令$x=0$，由$g(0)=1$得

$$\overline{g(1988)}=g(1988).$$

从而，④进一步化简为

$$g(x)=\overline{g(x)},$$

即$g(x)$是实函数．

在⑤中令　$x_1=x_2=x$，得

$$g(x)=\left[g\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0. \qquad ⑥$$

令$a=g(1)>0$．又利用⑤，用归纳法易证对任何正有理数$\frac{m}{n}$，有

$$g\left(\frac{m}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=g\left(\frac{1}{n}\right)\cdot g\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{m}. \qquad ⑦$$

特别，令$m=n$得

$$\left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n}=g(1)=a.$$

结合⑥可得

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}}.$$

再由⑦得

$$g\left(\frac{m}{n}\right)=\left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{m}=a^{\frac{m}{n}}. \qquad ⑧$$

最后，在⑤中令$x_1=-x_2=x$，得

$$g(x)\cdot g(-x)=g(0)=1,$$

于是，$g(-x)=\dfrac{1}{g(x)}$. ⑨

从而由⑧，⑨得

$$g\left(-\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{g\left(\frac{m}{n}\right)}=a^{-\frac{m}{n}}. \qquad ⑩$$

至此证明了对任何有理数x，有

$$g(x)=a^{x},$$

所以，$f(x)=\omega\cdot g(x)=\omega\cdot a^{x}$.

这里$\omega^{1987}=1$，$a>0$.

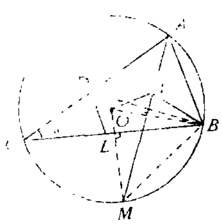
综上所述，所有这样的函数是

$$f(x)=\omega\cdot a^{x},$$

其中复数ω满足$\omega^{1988}=\omega$，实数$a>0$.

3．在$\triangle ABC$中，$\angle C=30°$，O是外心，I是内心，边AC上的点D与边BC上的点E使得$AD=BE=AB$.

求证：$OI\perp DE$且$OI=DE$.



证明一　如图，延长AI交$\triangle ABC$的外接圆于M，连BD，OM，OB，BM.

$\because I$为内心，

$\therefore M$平分$\overset{\frown}{BMC}$. 于是，$OM\perp BC$，且

$$\angle MOB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BMC}=\angle BAC.$$

由正弦定理得

$$AB=2R\sin C=2R\sin 30°$$
$$=R=OB=OM.$$

所以，$AD=BE=AB=OB=OM$，

从而，$\triangle DAB\cong\triangle MOB$，

故　$MB=BD$.

再由I是内心，容易算得下列角的度数：

$$\angle MBI=\angle MBC+\angle CBI$$
$$=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$$
$$=\frac{1}{2}(180°-\angle C)$$
$$=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°,$$
$$\angle BMI=\angle BMA=\angle C=30°,$$
$$\angle MIB=180°-(\angle BMI+\angle MBI)$$
$$=75°,$$

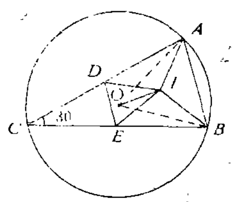
所以，$\angle MIB=\angle MBI$，$MB=MI$.

又AI平分$\angle BAC$，$AD=AB$，故$BD\perp IM$.

从而有$BD\perp IM$且$BD=MB=IM$.

又$OM\perp BE$，且$OM=BE$，故$\angle OMI$和$\angle EBD$的两对边分别垂直且相等．又显然它们都是锐角，从而$\triangle OMI\cong\triangle EBD$，且通过旋转$90°$和平移可使两三角形重合，故有

$$OI\perp DE,\ 且$$
$$OI=DE.$$



证明二　连接IA，IB，ID，IE，OA，OB. 由正弦定理可得

$$AB=2R\sin C=2R\sin 30°$$
$$=R=OA=OB,$$

即$\triangle OAB$为正三角形.

又I为内心，且$AD=AB=BE$，

所以，$\triangle DAI\cong\triangle BAI\cong\triangle BEI$。

从而，$\angle EIB=\angle DIA=\angle AIB$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ+\angle C)=105^\circ,$$

$$ID=IB,\quad IE=IA.$$

以I为复平面的复点建立复坐标系。设A，B点的复数坐标分别为z_1，z_2。不妨设A，B，C三点按顺时针方向绕行，如图。则$\overrightarrow{ID}$是由$\overrightarrow{IB}$按逆时针方向旋转210°得到的，$\overrightarrow{IE}$是由$\overrightarrow{IA}$按顺时针方向旋转210°得到的，

即 $\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}=z_2\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}$，

$\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IA}\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}=z_1\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}$，

所以，$\overrightarrow{DE}=z_1\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}-z_2\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}$。

又$\triangle OAB$为负向正三角形，$\overrightarrow{BO}$是由$\overrightarrow{BA}$按逆时针旋转60°得到的，所以，

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=(z_1-z_2)\cdot e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BO}=z_2+(z_1-z_2)\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$=z_1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}+z_2\cdot(1-e^{i\frac{\pi}{3}}).$$

于是，$i\cdot\overrightarrow{IO}=z_1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot i$

$$+z_2\cdot(1-e^{i\frac{\pi}{3}})\cdot i$$

$$=z_1\cdot e^{-i\frac{7\pi}{6}}-z_2\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

从而，$\overrightarrow{DE}=i\cdot\overrightarrow{IO}$，

即 $DE\perp OI$ 且 $DE=OI$。

4．设k是自然数，记$S_k=\{(a,b)\mid a,b=1,2,\cdots,k\}$。对于$S_k$中的两个元$(a,b)$，$(c,d)$，如果

$a-c\equiv0$或$\pm1\pmod k$并且$b-d\equiv0$或$\pm1\pmod k$，就称(a,b)与(c,d)在S_k中是不可分辨的（例如，(1，1)与(2，5)在S_5中是不可分辨的）。否则就称为可分辨的

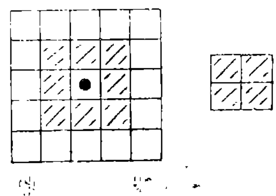
考虑S_k的具有下列性质的子集A：A中元在S_k中是两两可分的。这种子集的元素个数的最大值记为r_k。

（1）求r_5并说明理由；

（2）求r_7并说明理由；

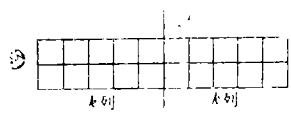
（3）对一般的k，r_k是什么（不要求说明理由）。

解　我们来使问题直观化。以$k\times k$个方格代表S_k中的k^2个元素，自然以第i行第j列的方格代表(i,j)。则S_k中两元(a,b)与(c,d)不可分辨等价于它们对应的两方格相邻（包括邻边相邻和对角相邻，即有公共点），这里的相邻是广义相邻，第一行（列）与第k行（列）相邻。显然每一方格恰好和8个方格相邻（$k\geqslant3$）。



对于任何2×2方格，其四个方格中任两个都是相邻的，从而它们对应的S_k中4个元在S_k中是两两不可分辨的，所以任何2×2方格中至多包含A中的一个元素。

考虑任何相邻的两行。我们在$2\times k$个方格旁再添上一个$2\times k$个方格（经平移得到），这样得到$2\times2k$个方格，从而有k个2×2方格。由已证结论，任何2×2方格中至多有一个在A中，所以$2\times2k$个方格中至多有k个在A中（注意广义相邻）。但对原来的$2\times k$个方格，每一方格在$2\times2k$个方格中都恰好计算了两次，从而$2\times k$个方格中至多有$\left[\frac{k}{2}\right]$个在A中，即任相邻两行中至多有$\left[\frac{k}{2}\right]$个方格在A中。

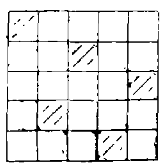


利用同样的技巧，我们可以证明在k行

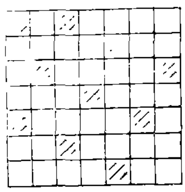
中至多有$\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right]$个方格在$A$中，即在$k\times k$个方格中至多有$\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right]$个方格在$A$中，所以

$$r_k\leqslant\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right].$$

下面我们说明上式中等号成立，即$r_k=\left[\frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}\right]\right]$。由题目要求，我们只证明$k=5$和$k=7$时的情形。为此，我们只须给出一个互不相邻的方格集，其恰有r_k个方格。$k=5$和$k=7$时，我们有如下的例子：



$r_5=5$



$r_7=10$

对于一般的k，我们也可以构造出r_k个互不相邻的方格，这里从略。

5．设$f(x)=3x+2$。证明：存在正整数m，使得$f^{(100)}(m)$能被1988整除。

$$(f^{(k)}(x)\text{表示}\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{个}}(x)\cdots)))$$

证明 由$f(x)=3x+2$，得

$$(f(x)+1)=3(x+1).$$

从而，对任意给定的x，有

$$(f^{(n+1)}(x)+1)=3(f^{(n)}(x)+1),$$

$n=0,1,2,\cdots$，即$\{f^{(n)}(x)+1\}$是以3为公比的等比数列，所以

$f^{(n)}(x)+1=3^n\cdot(x+1)$，$n=0,1,2,\cdots$。要证存在正整数$m$使得$f^{(100)}(m)$能被1988整除，等价于要证

$$3^{100}\cdot(x+1)-1988\cdot y=1 \qquad (*)$$

有整数解，且x为正整数。

因为$(3^{100},1988)=1$，所以由一次不定方程理论可知$(*)$式有整数解。设(x_0,y_0)是$(*)$的一组特解，则$(*)$的所有解为

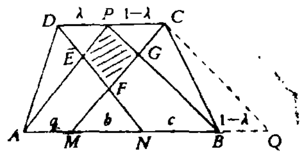
$$\begin{cases}x=x_0+1988\\ y=y_0+3^{100}\cdot t\end{cases}$$

其中，t为任意整数。

取足够大的t，使由上式给出的x，y均为正整数。此时令$m=x$，则$f^{(100)}(m)$能被1988整除。

6．在梯形$ABCD$的下底AB上有二定点M，N，上底CD上有一动点P。记$E=DN\cap AP$，$F=DN\cap MC$，$G=MC\cap PB$，$DP=\lambda DC$。问当λ为何值时，四边形$PEFG$的面积最大？

解 取DC为单位长度，即$DC=1$，则$DP=\lambda$，$PC=1-\lambda$。设$AM=a$，$MN=b$，$NB=c$，梯形高为h。



过C作PB的平行线交AB的延长线于Q，如图。则$PCQB$为平行四边形，于是$BQ=PC=1-\lambda$。从而，

$$S_{\triangle MGB}/S_{\triangle MCQ}=(MB/MQ)^2$$
$$=(b+c)^2/(b+c+1-\lambda)^2.$$

又 $S_{\triangle MCQ}=\frac{1}{2}(b+c+1-\lambda)\cdot h$，

从而，$S_{\triangle MGB}=\frac{(b+c)^2\cdot h}{2(b+c+1-\lambda)}$。

类似可得

$$S_{\triangle AEN}=(a+b)^2\cdot h/2(a+b+\lambda).$$

又显然$S_{\triangle APB}$和$S_{\triangle FMN}$是定值，从而由

$$S_{PEFG}=S_{\triangle APB}-(S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN})+S_{\triangle FMN}$$

知，当$S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}$取最小值时，$S_{PEFG}$取最大值。而

$$S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}$$
$$=\frac{h}{2}\cdot\left[\frac{(a+b)^2}{a+b+\lambda}+\frac{(b+c)^2}{b+c+1-\lambda}\right]. \qquad ①$$

由柯西不等式得

$$\left[\frac{(a+b)^2}{a+b+\lambda}+\frac{(b+c)^2}{b+c+1-\lambda}\right]$$
$$\cdot[(a+b+\lambda)+(b+c+1-\lambda)]$$

$$\geqslant[(a+b)^2+(b+c)^2]$$

$$=(a+2b+c)^2, \qquad ②$$

其中等号当且仅当

$$\frac{(a+b)^2}{(a+b+\lambda)^2}=\frac{(b+c)^2}{(b+c+1-\lambda)^2},$$

即

$$\lambda=\frac{a+b}{a+2b+c}=\frac{AN}{AN+MB}$$

时成立。从而，由①，②得

$$S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}\geqslant\frac{h}{2}\cdot\frac{(a+2b+c)^2}{a+2b+c+1},$$

且当且仅当$\lambda=AN/(AN+MB)$时$S_{\triangle MGB}+S_{\triangle AEN}$取到最小值，此时$S_{PEFG}$取到最大值，

综上，当且仅当$\lambda=AN/(AN+MB)$时，四边形$PEFG$的面积最大。

7．设OXY坐标平面上有一多边形Π，Π的面积$>n$。求证在Π中必定存在$n+1$个点P_1，P_2，…，P_{n+1}，使得其中任何两点$P_i(x_i, y_i)$与$P_j(x_j, y_j)$的对应坐标之差都是整数，即x_i-x_j，y_i-y_j都是整数。

证明　将平面用单位正方形隔开，并给Π染上红色。将所有被染上红色的单位正方形移到某一个正方形中，下面我们证明此正方形堆中必有一点在竖直方向上至少有$n+1$层上被染上了红色。反设每一点至多在n层上被染上红色，则红色区域至多不过充满n个单位正方形，面积不超过n，这与Π的面积$>n$相矛盾。现在我们找到某点P，使其在竖直方向中至少有$n+1$个点被染为红色，用一根针穿透这个正方形层刺到P点上，然后将正方形平移还原，则Π上至少有$n+1$个针孔。从中任选$n+1$个，则易知这些点满足要求。

8．有一台损坏了的计算器，只保留了c，1和-1三个原始数据。每次操作只能从u和v计算$uv+v$，并将结果显示出来。第一次操作时，u和v只能取原始数据c,1或-1。以后的各次操作，u和v只能取c，1，-1或者是上一次计算的结果。请说明：对于任何给定的整系数多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

仍能利用这台计算器计算$P_n(c)$（即经过有限次操作之后，在显示器上显示出$P_n(c)$的值）。

证明　首先我们证明：若a能计算，则$a\pm1$也能计算。事实上，令$u=a$，$v=1$，则我们可计算$a+1$。令$u=a$，$v=-1$，则可计算$-a-1$，于是可计算$-a$，再令$u=-a$，$v=-1$，则可计算$a-1$。

我们用归纳法证明原题。显然，令$u=v=1$，可知1可计算，从而由已证结果可证对任何整数a_0,a也可计算，即$n=0$时结论成立。假设$n=k$时结论成立。$n=k+1$时，给定任一$k+1$次整系数多项式

$$P_{k+1}(x)=a_0x^{k+1}+a_1x^k+\cdots+a_kx+a_{k+1}.$$

令

$$Q_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k-1.$$

由假设知$Q_k(c)$可计算。令$u=Q_k(c)$，$v=c$，得

$$Q_k(c)\cdot c+c=a_0\cdot c^{k+1}+a_1\cdot c^k+\cdots+a_k\cdot c$$

可计算，由已证结果可得

$$P_{k+1}(c)=[Q_k(c)\cdot c+c]+a_{k+1}$$

也可计算。这就证明了$n=k+1$时结论也成立。从而对任一n次整系数多项式$P_n(x)$，$P_n(c)$可计算。

（南开大学数学奥林匹克研究小组供解）