2008中国国家集训队选拔考试

第一天

一、在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，它的内切圆切边BC于点E，联结AE交内切圆于点D（不同于点E）．在线段AE上取异于点E的一点F，使得$CE=CF$，联结CF并延长交BD于点G．求证：$CF=FG$．（熊　斌　提供）

二、数列$\{x_n\}$定义为

$x_1=2, x_2=12,$

$x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n(n=1,2,\cdots)$．

设p是一个奇质数，q是x_p的一个质因子．证明：若$q\neq 2,3$，则$q\geqslant 2p-1$．

（余红兵　提供）

三、将每个正整数任意染红、蓝两色之一．证明：总存在一个无穷的正整数序列$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$，使得无穷序列

$$a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, a_2, \frac{a_2+a_3}{2}, a_3, \frac{a_3+a_4}{2}, \cdots$$

是一个同色的正整数序列．（冷岗松　提供）

第二天

四、证明：对任意正整数$n(n\geqslant 4)$，可以将集合$G_n=\{1,2,\cdots,n\}$的元素个数不小于2的子集排成一列$P_1, P_2, \cdots, P_{2^n-n-1}$，使得

$$|P_i\cap P_{i+1}|=2(i=1,2,\cdots,2^n-n-2).$$

（刘诗雄　提供）

五、设m、n都是大于1的给定整数，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$是不全为0的$mn$个非负实数．求

$$f=\frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2+m\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^2+mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2}$$

的最大值和最小值．（朱华伟　提供）

六、求最大的常数$M(M>0)$，使得对任意正整数n，存在正实数数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$及$b_1, b_2, \cdots, b_n$满足

(1) $\sum_{k=1}^{n}b_k=1$，

$2b_k\geqslant b_{k-1}+b_{k+1}(k=2,3,\cdots,n-1)$；

(2) $a_k^2\leqslant 1+\sum_{i=1}^{k}a_ib_i(k=1,2,\cdots,n, a_n=M)$．

（李伟固　提供）

参考答案

第一天

一、如图1，过点D作内切圆的切线MNK，分别交AB、AC、BC于点M、N、K．

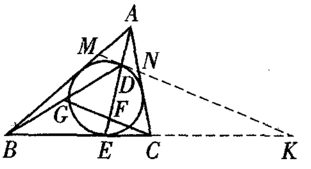

图1

由$\angle KDE=\angle AEK=\angle EFC$，知$MK/\!/CG$．

由牛顿定理知BN、CM、DE三线共点．

由塞瓦定理有

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}=1. \quad ①$$

由梅涅劳斯定理有

$$\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}=1. \quad ②$$

①÷②得$BE\cdot KC=EC\cdot BK$．③

由梅涅劳斯定理和式③有

$$1=\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FG}\cdot\frac{GD}{DB}=\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FG}\cdot\frac{KC}{BK}=\frac{CF}{FG}.$$

所以，$CF=FG$．

二、易知

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n](n\geqslant 1).$$

设 $a_n、b_n\in\mathbf{N}_+$.

定义 $(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.则

$(3-2\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$.

易知 $x_n=b_n,a_n^2-2b_n^2=1(n\geqslant 1)$.

设 $q\neq 2,3$.

下面证明：$q\geqslant 2p-1$.

由于 $q\mid x_p$，即 $q\mid b_p$，从而，数列 $\{b_n\}$ 中有被 q 整除的项.设 d 为最小的正整数，使得 $q\mid b_d$.有下面的引理.

引理　对正整数 n，当且仅当 $d\mid n$ 时，有 $q\mid b_n$.

引理的证明：对整数 $a、b、c、d$，用记号

$$a+b\sqrt{2}\equiv c+d\sqrt{2}(\bmod q)$$

表示 $a\equiv c(\bmod q),b\equiv d(\bmod q)$.

若 $d\mid n$，设 $n=du$.则

$a_n+b_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{du}\equiv a_d^u(\bmod q)$.

故 $b_n\equiv 0(\bmod q)$.

反之，若 $q\mid b_n$，设 $n=du+r(0\leqslant r<d)$.

若 $r\geqslant 1$，则由

$$\begin{aligned}a_n&\equiv(3+2\sqrt{2})^n\\&=(3+2\sqrt{2})^{du}(3+2\sqrt{2})^r\\&\equiv a_d^u(a_r+b_r\sqrt{2})(\bmod q),\end{aligned}$$

可知 $a_d^u b_r\equiv 0(\bmod q)$. ①

但 $a_d^2-2b_d^2=1$，而 $q\mid b_d$，故 $q\nmid a_d^2$.

因为 q 是质数，所以，$q\nmid a_d$.

进而，$(q,a_d^u)=1$.

故由式①知 $q\mid b_r$，与 d 的定义相违.

因此，$r=0$，即 $d\mid n$.引理得证.

回到原题.

因为 q 是质数，所以，$\mathrm{C}_q^i(1\leqslant i\leqslant q-1)$ 都是 q 的倍数.

又 $q\neq 2,3$，由费马小定理知

$3^q\equiv 3(\bmod q),2^q\equiv 2(\bmod q)$.

进而，$2^{\frac{q-1}{2}}\equiv\pm 1(\bmod q)$.

由二项式定理得

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^q&=\sum_{i=0}^{q}\mathrm{C}_q^i\cdot 3^{q-i}(2\sqrt{2})^i\\&\equiv 3^q+(2\sqrt{2})^q=3^q+2^q\cdot 2^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{2}\\&\equiv 3\pm 2\sqrt{2}(\bmod q).\end{aligned}\quad ②$$

因而，类似于式②的处理可得

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^{q^2}&\equiv(3\pm 2\sqrt{2})^q\\&\equiv 3+2\sqrt{2}(\bmod q).\end{aligned}\quad ③$$

由式③得

$$(a_{q^2-1}+b_{q^2-1}\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\equiv 3+2\sqrt{2}(\bmod q).$$

所以，$\begin{cases}3a_{q^2-1}+4b_{q^2-1}\equiv 3(\bmod q),\\2a_{q^2-1}+3b_{q^2-1}\equiv 2(\bmod q).\end{cases}$

进而，$q\mid b_{q^2-1}$.

又 $q\mid b_p$，故由引理得 $d\mid p$.

因为 q 是质数，所以，$d=1$ 或 p.

若 $d=1$，则 $q\mid b_1=2$，这与假设不符.故 $d=p$.但 $q\mid b_{q^2-1}$，故由引理知 $d\mid(q^2-1)$，即 $p\mid(q^2-1)$.从而，$p\mid(q-1)$或 $p\mid(q+1)$.

注意到 $q-1$ 和 $q+1$ 都是偶数，于是，

$q\geqslant 2p-1$.

三、引理1　若正整数集 $\mathbf{N}_+$ 中存在一个无穷的等差数列，则结论成立.

事实上，设无穷序列 $c_1<c_2<\cdots<c_n<\cdots$ 是一个 $\mathbf{N}_+$ 中的红色的等差数列.则取 $a_i=c_{2i-1}(i\in\mathbf{N}_+)$，便得到一个满足要求的无穷的红色正整数序列

$$a_1<\frac{a_1+a_2}{2}<a_2<\frac{a_2+a_3}{2}<a_3<\cdots.$$

引理2　若对任意 $i\in\mathbf{N}_+$，存在 $j\in\mathbf{N}_+$ $(j>i)$，使得 $i、\frac{i+j}{2}、j$ 同色，则结论成立.

事实上，取 $a_1=1$，并设 a_1 为红色.

由于存在 $k\in\mathbf{N}_+$，使得 $a_1、\frac{a_1+k}{2}、k$ 同

色,因此,可取 $a_2=k$;再由存在 $l\in\mathbf{N}_+$,使得 a_2、$\frac{a_2+l}{2}$、l 同色,因此,可取 $a_3=l$;如此下去,便得到一个满足要求的无穷的红色正整数序列

$$a_1<\frac{a_1+a_2}{2}<a_2<\frac{a_2+a_3}{2}<a_3<\cdots.$$

引理3 若 $\mathbf{N}_+$ 中不存在无穷项的同色的等差数列,且存在 $i_0\in\mathbf{N}_+$,使得对任意 $j\in\mathbf{N}_+(j>i_0)$,得 i_0、$\frac{i_0+j}{2}$、j 不同色(即引理1,2的条件不成立),则存在一个同色的奇数的无穷正整数序列满足要求.

事实上,不妨设 $i_0=1$.否则,考虑

$$\{i\cdot i_0\mid i=1,2,\cdots\}$$

而不改变问题的性质.

设1为红色.则对任意 $j\in\mathbf{N}_+(j\geqslant2)$,都有

$$j、2j-1\text{ 不同为红色.} \qquad ①$$

由于不存在无穷项的同色的等差数列,则 $\mathbf{N}_+$ 中存在无穷多个蓝色的奇数.任取其中一个记为 a_1.

下面证明:存在以 a_1 为首项的无穷奇数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$,使得无穷序列

$$a_1<\frac{a_1+a_2}{2}<a_2<\frac{a_2+a_3}{2}<a_3<\cdots$$

的所有项都为蓝色.

对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,a_1 的存在性已证.

假设蓝色的奇数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 存在.接下来证明满足要求的 a_{n+1} 一定存在.

(1) 先考虑对任意 $i\in\mathbf{N}_+$,a_n+i、a_n+2i 不同色的情况.

假设此时没有满足要求的 a_{n+1},即不存在 $a_{n+1}>a_n$,使得

$$a_n、\frac{a_n+a_{n+1}}{2}、a_{n+1}\text{ 同为蓝色.} \qquad ②$$

由于不存在无穷项的同色的等差数列,则 $\mathbf{N}_+$ 中红蓝两色的数均有无穷多个.故存在某个 i,使得 a_n+i 为红色,此时,a_n+2i 为蓝色.记 $a_n=2k+1$.则现有 $2k+1$ 为蓝色,$2k+i+1$ 为红色,$2k+2i+1$ 为蓝色.由①知

$$2(2k+i+1)-1=4k+2i+1$$

为蓝色.再由②知

$$\frac{(2k+1)+(4k+2i+1)}{2}=3k+i+1$$

为红色.再由①知

$$2(3k+i+1)-1=6k+2i+1$$

为蓝色.如此递归下去,便得到一个蓝色的无穷序列 $\{2nk+2i+1\}_{n=1}^{\infty}$,它们的所有项都是蓝色,但注意到它是一个等差数列,矛盾.这说明满足要求的 a_{n+1} 一定存在.

(2)再考虑存在 $i\in\mathbf{N}_+$,使得 a_n+i、a_n+2i 同色的情况.

设 $a_n=2k+1$.

(i)若 a_n+i、a_n+2i 同为蓝色,则取 $a_{n+1}=a_n+2i$ 即可.

(ii)若 a_n+i、a_n+2i 同为红色,由①知

$$2(2k+i+1)-1=4k+2i+1$$

及 $$2(2k+2i+1)-1=4k+4i+1$$

均为蓝色.

因此,若

$$\frac{(2k+1)+(4k+4i+1)}{2}=3k+2i+1$$

为蓝色,取 $a_{n+1}=4k+4i+1$ 即可;若

$$\frac{(2k+1)+(4k+4i+1)}{2}=3k+2i+1$$

为红色,再由①知

$$2(3k+2i+1)-1=6k+4i+1$$

为蓝色.此时,

$$\frac{(2k+1)+(6k+4i+1)}{2}=4k+2i+1$$

为蓝色,取 $a_{n+1}=6k+4i+1$ 即可.

至此引理3证完.

综上三个引理便知结论成立.

第 二 天

四、首先，当 $n\geqslant 3$ 时，对 n 用数学归纳法证明下述命题：

对任意的正整数 $n(n\geqslant 3)$，可以将集合 $G_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部非空子集排成一个序列 $P_1,P_2,\cdots,P_{2^n-1}$，使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,2^n-2\}$，总有

$|P_i\cap P_{i+1}|=1$，且 $P_1=\{1\}$，$P_{2^n-1}=G_n$.

当 $n=3$ 时，序列 $\{1\},\{1,2\},\{2\},\{2,3\},\{1,3\},\{3\},\{1,2,3\}$ 满足要求.

假设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时，存在 G_k 的非空子集的序列 $P'_1,P'_2,\cdots,P'_{2^k-1}$ 满足要求，其中，$P'_1=\{1\}$，$P'_{2^k-1}=G_k$.

对于 $n=k+1$，构造如下序列：

$$\begin{aligned}&P'_1,P'_{2^k-1},P'_{2^k-2}\cup\{k+1\},P'_{2^k-3},\\&P'_{2^k-4}\cup\{k+1\},P'_{2^k-5},\cdots,P'_3,\\&P'_2\cup\{k+1\},\{k+1\},P'_1\cup\{k+1\},P'_2,\\&P'_3\cup\{k+1\},P'_4,\cdots,P'_{2^k-2},P'_{2^k-1}\cup\\&\{k+1\}.\end{aligned}\qquad①$$

显然，$P_1=P'_1=\{1\}$，

$P_{2^{k+1}-1}=P'_{2^k-1}\cup\{k+1\}=G_{k+1}$.

因为 $P'_1\cap P'_{2^k-1}=P'_1$，

$$\begin{aligned}&P'_{r+1}\cap(P'_r\cup\{k+1\})=P'_{r+1}\cap P'_r,\\&(P'_2\cup\{k+1\})\cap\{k+1\}=\{k+1\}\\&=\{k+1\}\cap(P'_1\cup\{k+1\}),\\&P'_r\cap(P'_{r+1}\cup\{k+1\})=P'_r\cap P'_{r+1},r\leqslant 2^k-2.\end{aligned}$$

所以，由归纳假设，序列①满足要求.

由数学归纳法，命题得证.

回到原题.

仍用数学归纳法证明下述加强命题：

对任意的正整数 $n(n\geqslant 4)$，可以将集合 $G_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部元素个数不小于 2 的子集排成一序列 $P_1,P_2,\cdots,P_{2^n-n-1}$，使得

$|P_i\cap P_{i+1}|=2(i=1,2,\cdots,2^n-n-2)$，

且 $P_{2^n-n-1}=\{1,n\}$.

当 $n=4$ 时，序列

$$\begin{aligned}&\{1,3\},\{1,2,3\},\{2,3\},\{1,2,3,4\},\\&\{1,2\},\{1,2,4\},\{2,4\},\{2,3,4\},\{3,4\},\\&\{1,3,4\},\{1,4\}\end{aligned}$$

满足要求.

假设 $n=k(k\geqslant 4)$ 时，存在序列 $P_1,P_2,\cdots,P_{2^k-k-1}$ 满足要求，且 $P_{2^k-k-1}=\{1,k\}$.

对于 $n=k+1$，知道 $G_{k+1}=G_k\cup\{k+1\}$ 的全部子集可以分为两类：一类都不含元素 $k+1$，而另一类都含元素 $k+1$. 由前述命题，存在 G_k 的全部非空子集排成一个序列 $q_1,q_2,\cdots,q_{2^k-1}$，使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,2^k-2\}$，总有

$|q_i\cap q_{i+1}|=1$，且 $q_1=G_k$，$q_{2^k-1}=\{1\}$.

于是，有序列

$$\begin{aligned}&P_1,P_2,\cdots,P_{2^k-k-1},q_1\cup\{k+1\},\\&q_2\cup\{k+1\},\cdots,q_{2^k-1}\cup\{k+1\}.\end{aligned}$$

由归纳假设及命题知，上述序列满足要求，且

$$\begin{aligned}P_{2^{k+1}-(k+1)-1}&=q_{2^k-1}\cup\{k+1\}\\&=\{1,k+1\}.\end{aligned}$$

由数学归纳法，原命题得证.

五、f 的最大值为 1.

先证明 $f\leqslant 1$.

这等价于

$$\begin{aligned}&n\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)^2+m\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Big)^2\\&\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)^2+mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2.\end{aligned}\qquad①$$

记 $$\begin{aligned}G=&\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)^2+mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2-\\&n\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)^2-m\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Big)^2.\end{aligned}$$

只需证明 $G\geqslant 0$.

现将所有的 a_{ij} 排成一个 n 行 m 列的数表，使 a_{ij} 位于第 i 行第 j 列. 考虑数表中位置构成矩形的 4 个数 a_{pq}、a_{pr}、a_{sq}、a_{sr}，并把它们叫做一个矩形数组，记作 $[psqr]$，其中，$1\leqslant p<s\leqslant n$，$1\leqslant q<r\leqslant m$.

记 $G^* = \sum_{[psqr]}(a_{pq}+a_{sr}-a_{pr}-a_{sq})^2$，其中，求和跑遍所有的矩形数组 $[psqr]$.

下面证明：$G=G^*$. ②

首先，比较形如 a_{ij}^2 项的系数. 对确定的 i、j，易见 G 中 a_{ij}^2 项的系数为 $mn+1-m-n$. 而在 G^* 中，因为以 a_{ij} 为一个顶点的矩形数组恰有 $(m-1)(n-1)$ 个，所以，G^* 中 a_{ij}^2 项的系数为

$$(m-1)(n-1)=mn+1-m-n.$$

这说明 G 和 G^* 中 a_{ij}^2 项的系数相等.

其次，比较形如 $a_{ij}a_{ik}(j\neq k)$ 项的系数. G 中的系数为 $-2(n-1)$，而 G^* 中这种项对应的矩形数组 $[psqr]$ 中还有一个行标 s 有 $n-1$ 种选择，因此，它在 G^* 中的系数也为 $-2(n-1)$. 这表明 G 和 G^* 中形如 $a_{ij}a_{ik}$ $(j\neq k)$ 项的系数相等.

再次，与上述类似，G 和 G^* 中形如 $a_{ik}a_{jk}$ $(i\neq j)$ 项的系数都为 $-2(m-1)$.

最后，G 和 G^* 中形如 $a_{pq}a_{st}(p\neq s, q\neq t)$ 项的系数都为 2.

综上所述，式②成立.

从而，$G\geqslant 0$，亦即式①得证.

当所有 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$ 均为 1 时，$f=1$，故 f 的最大值为 1.

f 的最小值为 $\frac{m+n}{mn+\min\{m,n\}}$.

先证明：$f\geqslant \frac{m+n}{mn+\min\{m,n\}}$.

不妨设 $n\leqslant m$. 此时，只需证明

$$f\geqslant \frac{m+n}{mn+n}. \quad ③$$

记
$$S=\frac{n^2(m+1)}{m+n}\sum_{i=1}^{n}r_i^2+\frac{mn(m+1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}c_j^2-\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)^2-mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2,$$

其中，$r_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$，$c_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$ $(j=1,2,\cdots,m)$. 欲证式③，只需证明

$$S\geqslant 0. \quad ④$$

在拉格朗日恒等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^2=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Big)-\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(a_kb_l-a_lb_k)^2$$

中，令 $a_i=r_i$，$b_i=1(i=1,2,\cdots,n)$ 得

$$-\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)^2=-n\sum_{i=1}^{n}r_i^2+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(r_k-r_l)^2.$$

将上式代入 S 的表达式可得

$$S=\frac{mn(n-1)}{m+n}\sum_{i=1}^{n}r_i^2+\frac{mn(m+1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}c_j^2-mn\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(r_k-r_l)^2.$$

因为 $mn=\frac{mn(n-1)}{m+n}+\frac{mn(m+1)}{m+n}$，所以，上面的 S 可重写为

$$S=\frac{mn(n-1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(r_i-a_{ij})+\frac{mn(m+1)}{m+n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(c_j-a_{ij})+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(r_k-r_l)^2. \quad ⑤$$

因为所有的 $a_{ij}\geqslant 0$，且 $r_i-a_{ij}\geqslant 0$，$c_j-a_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$，故由式⑤便知 $S\geqslant 0$，即式④成立.

当 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，其他元素都取 0 时，$f=\frac{m+n}{mn+n}$，所以，$f$ 的最小值为 $\frac{m+n}{mn+m}$.

同理，当 $n\geqslant m$ 时，f 的最小值为 $\frac{m+n}{mn+m}$.

因此，f 的最小值为 $\frac{m+n}{mn+\min\{m,n\}}$.

六、引理 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}<2$,

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{b_k\}<\frac{2}{n-1}$.

引理的证明：令 $L=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$. 由(2)得 $L^2\leqslant 1+L$，所以，$L<2$.

令 $b_m=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{b_k\}$. 由(1)得

$$b_k \geqslant \begin{cases} \dfrac{(k-1)b_m+(m-k)b_1}{m-1} \geqslant \dfrac{k-1}{m-1}b_m, & 1 \leqslant k \leqslant m; \\ \dfrac{(k-m)b_n+(n-k)b_m}{n-m} > \dfrac{n-k}{n-m}b_m, & m < k \leqslant n. \end{cases}$$

故 $1=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k=\sum\limits_{k=1}^{m} b_k+\sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k$

$>\dfrac{m}{2}b_m+\dfrac{n-m-1}{2}b_m=\dfrac{n-1}{2}b_m$.

此即 $b_m<\dfrac{2}{n-1}$.引理得证.

回到原题.

令 $f_0=1$,

$f_k=1+\sum\limits_{i=1}^{k} a_ib_i\ (k=1,2,\cdots,n)$.

则 $f_k-f_{k-1}=a_kb_k \leqslant b_k\sqrt{f_k}$.

由此可得

$$\sqrt{f_k}-\sqrt{f_{k-1}} \leqslant b_k \cdot \frac{\sqrt{f_k}}{\sqrt{f_k}+\sqrt{f_{k-1}}}$$

$$=b_k\left[\frac{1}{2}+\frac{f_k-f_{k-1}}{2(\sqrt{f_k}+\sqrt{f_{k-1}})^2}\right]$$

$$<b_k\left[\frac{1}{2}+\frac{2b_k}{2(\sqrt{f_k}+\sqrt{f_{k-1}})^2}\right]$$

$$<b_k\left[\frac{1}{2}+\frac{b_k}{4}\right]$$

$$<b_k\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n-1)}\right].$$

对 k 从 1 到 n 求和得

$$M=a_n \leqslant \sqrt{f_n}$$

$$<\sqrt{f_0}+\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n-1)}\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2(n-1)}.$$

由 n 的任意性得 $M_{\max} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

$M=\dfrac{3}{2}$是能够达到的.例子如下:

$$a_k=1+\frac{k}{2n},\ b_k=\frac{1}{n}\ (k=1,2,\cdots,n),$$

则 $a_k^2=\left(1+\dfrac{k}{2n}\right)^2 \leqslant 1+\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{i}{2n}\right)$

成立.

综上所述,M 的最大值为$\dfrac{3}{2}$.

(熊 斌 提供)

征 稿 启 事

本刊是以报道中学数学课外活动和数学竞赛为中心内容的专业刊物。欢迎作者为**数学活动课程讲座**、**命题与解题**、**我为数学竞赛命题**、**巧思妙解**、**赛题新解**、**课外训练**、**数学奥林匹克问题**、**数海拾贝**、**缤纷广角镜**等栏目撰稿,欢迎更多的作者撰写适合初中生阅读的、内容充实的专题讲座和解题指导性文章。来稿时请注意以下各项:

1. 稿件的内容要新颖,形式要活泼,提倡短小精悍,讲清一、两个问题,不要"大而全"。来稿一般不超过 3 000 字,长文不超过 4 000 字。

2. 讲座稿应附有相应的练习题(5~7 个),并随练习题给出答案或提示。

3. 文中例题最好选用国内外的竞赛试题,并请注意标出竞赛名称(全称)、届次和时间。

4. 凡为本刊**课外训练**和**数学奥林匹克问题**栏目提供的稿件,请注意:试题内容范围以中国数学会普及工作委员会制定的《数学竞赛大纲》为准;题目要有新意(不能用成题),需注明是自编或改编,改编题需注明原题出处。为**数学奥林匹克问题**栏目投稿时,题目要一式两份。

5. 来稿请用 16 开稿纸誊写,字迹清晰,书写格式规范,插图力求准确并随文绘出;电脑打印稿以小四号字为宜(要留有适当的行距),要求排版规范,外文字母的正斜体、大小写、上下角标清楚、准确。

6. 参考文献请用顺序编码制,在正文引用处注明。

7. 本刊已加入多个数据库并在网上发行,如作者不同意所著文章被数据库收录,请在来稿时声明。来稿三个月未收到录用通知的,可自行处理,恕不退稿。为联系方便,请注明联系电话。

本刊编辑部