第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题解

第 48 届 IMO 中国国家集训队教练组编

2007 年 3 月 15 日 -2007 年 4 月 2 日

第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题 (一) 参考答案

1. 当凸多边形的每个内角都相等时，我们称它是等角的．求证： $p>2$ 是素数当且仅当每条边的长度是有理数的等角 p 边形都是正 p 边形.

引理：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正有理数且 ε 是一个 n 次本原单位根， $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. 则一个等角多边形的边长分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ (按逆时针方向) 当且仅当

$$a_1+a_2\varepsilon+\cdots+a_n\varepsilon^{n-1}=0.$$

证明：对 $n=6$ 的情况我们作以下的图 1 (一般的情况也可作). 若把多边形的边看作向量，方向为顺时针方向 (见图 1), 则这些向量之和必等于 0. 现在我们移动所有的向量使得它们的始点相同 (图 2). 考虑它们的终点所对应的复数，并选择 a_1 在正实轴上，则它们分别对应向量 $a_1,a_2\varepsilon,\cdots,a_n\varepsilon^{n-1}$. 因为这些向量之和为 0, 所以 $a_1+a_2\varepsilon+\cdots+a_n\varepsilon^{n-1}=0$. 反过来也是成立的.

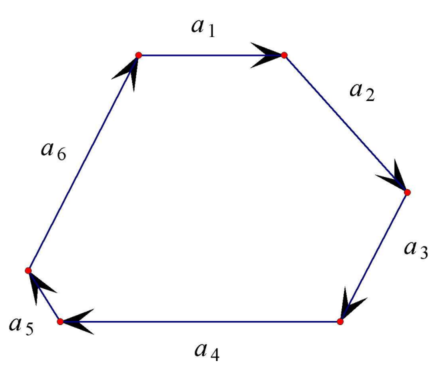

图 1

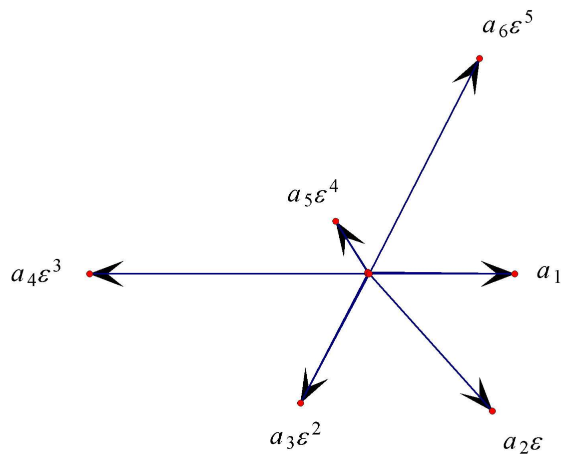

图 2

原题的证明：　我们先证明必要性.

设 p 是一个素数，有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 分别是一个等角 p 边形的边长．由引理我们知道

$$\zeta=\cos\frac{2\pi}{p}+\sin\frac{2\pi}{p}$$

是多项式 $P(X)=a_1+a_2X+\cdots+a_pX^{p-1}$ 的一个根.

另一方面，ζ 是多项式 $Q(X)=1+X+\cdots+X^{p-1}$ 的一个根. 而当两个多项式有共同的根时，它们的最大公因式必是一个非常数的有理系数多项式．因此 $Q(X)$

可以分解成两个非常数的有理系数多项式的乘积，但这是不可能的 (对 $Q(X+1)$ 用爱森斯坦因判别法即可证明).

下面我们证明充分性.

反过来假设 p 不是一个素数，且令 $p = mn$ (m, n 是大于 1 的整数). 由此可得 ζ^n 是一个 m 次单位根，从而

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{(m-1)n} = 0.$$

将上式与

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{p-1} = 0.$$

相加，可知 ζ 是一个 $p-1$ 次多项式的根，这个多项式有些系数为 1, 而另一些系数为 2. 这表明存在一个等角 p 边形，它的一些边长度为 1, 剩下的边长度为 2. 因此这个多边形非正，证毕.

2. 设 I 为 ΔABC 的内心， M,N 分别为 AB,AC 的中点，点 D,E 分别在直线 AB,AC 上，满足 $BD=CE=BC$, 过点 D 且垂直于 IM 的直线与过点 E 且垂直于 IN 的直线交于点 P, 求证： $AP\perp BC$.

证明 (一): 设 O 是 ΔABC 的外心，我们首先证明 $DE\perp OI$.

如图 4, 连接 B,E 两点，并设 CI 交 BE 于点 L, 且交 ΔABC 的外接圆于 H. 由于 CI 是 $\angle A$ 的角平分线，易知 O,M,H 共线. 所以 $CH\perp BE$, $OH\perp AB$. 这说明 H,B,L,M 四点共圆，故 $\angle IHO=\angle EBD$.

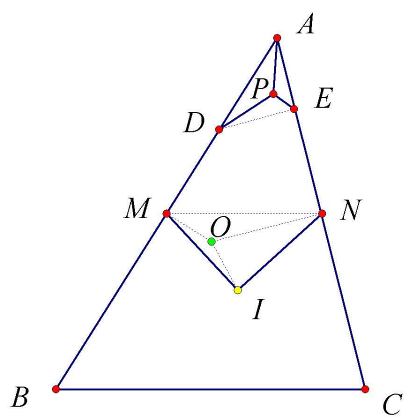

图 3

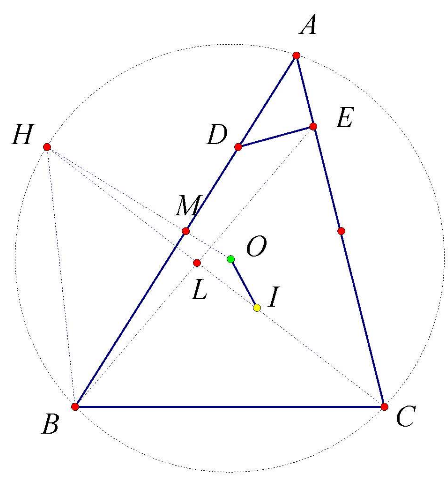

图 4

另一方面，设 ΔABC 的外接圆的半径为 R. 由正弦定理，并注意 L 是 BE 的中点，以及 $BH=IH$, 我们有

$$\frac{OH}{BD}=\frac{R}{BC}=\frac{1}{2\sin\angle A}=\frac{1}{2\sin\angle BHC}=\frac{2HB}{BL}=\frac{HI}{BE}.$$

所以 $\Delta IHO\sim\Delta EBD$. 再由 $IH\perp BE$, $OH\perp BD$ 知 $OI\perp DE$.

下证 $AP\perp BC$.

因为 $OI\perp DE$, $OM\perp AD$, $ON\perp EA$, 并且 $PD\perp MI$, $PE\perp IN$, 所以由正交三角形定理， $PA\perp MN$, 但 $MN\parallel BC$, 故而 $AP\perp BC$.

正交三角形定理：设 ΔPDE 的各顶点到 ΔONM 的对应顶点的对边的三垂线共点，则从 ΔONM 的各顶点到 ΔPDE 的对应顶点的对边的三垂线也共点.

证明 (二)： 设 $BC=a$, $AB=c$, $CA=b$, 则 $BD=CE=a$, $BM=AM=\frac{c}{2}$, $AN=CN=\frac{b}{2}$. 设 ΔABC 的内切圆半径为 r, 且分别切 AB, AC 于点 G, F.

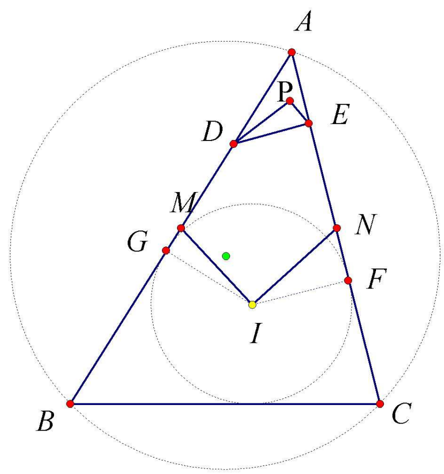

图 5

则

$$BG=\frac{a+c-b}{2},\qquad CF=\frac{a+b-c}{2}.$$

所以

$$DM^2=(a-\frac{c}{2})^2,\qquad EN^2=(a-\frac{b}{2})^2;$$

$$EI^2=r^2+EF^2=r^2+(\frac{a+c-b}{2})^2;$$

$$DI^2=r^2+DG^2=r^2+(\frac{a+b-c}{2})^2.$$

又 $PD\perp IM$, $PE\perp IN$, 所以

$$PI^2-PM^2=DI^2-DM^2;$$

$$PI^2-PN^2=EI^2-EN^2.$$

两式相减得

$$PN^2-PM^2=DI^2-EI^2+EN^2-DM^2=(\frac{b}{2})^2-(\frac{c}{2})^2=AN^2-AM^2.$$

所以 $AP\perp MN$, 即 $AP\perp BC$.

3. 证明：对任意正整数 n, 存在唯一的 n 次多项式 $f(x)$, 满足 $f(0)=1$ 且 $(x+1)(f(x))^2-1$ 是奇函数.

证明：先证存在性.

令 $f(x)=u(x^2)+xv(x^2)$, 则

$$\begin{aligned}
& (x+1)f(x)^2-1 \\
= \quad & (x+1)[u(x^2)^2+x^2v(x^2)^2+2xu(x^2)v(x^2)]-1 \\
= \quad & x\left[u(x^2)^2+x^2v(x^2)+2u(x^2)v(x^2)\right] \\
+ \quad & u(x^2)^2+x^2v(x^2)^2+2x^2u(x^2)v(x^2)-1
\end{aligned}$$

为奇函数

$$\Leftrightarrow u(x^2)^2+x^2v(x^2)^2+2x^2u(x^2)v(x^2)\equiv 1$$

$$\Leftrightarrow u(x)^2+xv(x)^2+2xu(x)v(x)\equiv 1.$$

注意到 $u(0)=f(0)=1$, 由上式解得

$$u(x)=-xv(x)+\sqrt{x^2v^2-xv^2+1}.$$

由于 u 为多项式，故 $x^2v^2-xv^2+1$ 必是一多项式的平方. 令 $d=x^2-x$. 考虑如下 Pell 方程

$$p^2-dq^2=1$$

记 $p_0=1,q_0=0,p_1=-2x+1,q_1=2$, $p_{n+1}=p_1p_n+dq_1q_n,q_{n+1}=p_1q_n+q_1p_n$, 则

$$p_n^2-dq_n^2=1,\quad n\geq 0$$

$$\deg p_n=\deg q_n+1=n,\quad n\geq 1.$$

记 $u_n^+(x)=-xq_n+p_n,v_n^+(x)=q_n$, $u_n^-(x)=xq_n+p_n$, $v_n^-(x)=-q_n$.

当 n 为偶数时,

$$f(x)=u_{\frac{n}{2}}^+(x^2)+xv_{\frac{n}{2}}^+(x^2).$$

当 n 为奇数时,

$$f(x)=u_{\frac{n+1}{2}}^-(x^2)+xv_{\frac{n+1}{2}}^-(x^2)$$

满足 $f(0)=1,\deg f=n$, 且 $(x+1)f^2-1$ 为奇函数.

下证唯一性.

用反证法. 设存在两个 n 次多项式满足条件.

因为存在两个 n 次多项式满足条件，故 Pell 方程

$$p^2 - dq^2 = 1$$

存在两个多项式解 p_m^i, q_m^i, $i = 1, 2$, $\deg p_m = \deg q_m + 1 = m$, 这里若 n 为偶数则 $m = \frac{n}{2}$; 若 n 为奇数则 $m = \frac{n+1}{2}$, 其中 q_m^1 不恒等于 $-q_m^2$.

利用公式

$$(p_{m-1},\quad q_{m-1}) = (p_1 p_m \pm d q_1 q_m,\quad p_1 q_m \pm q_1 p_m),$$

这里 "+" 或 "−" 取决于 p_m 与 q_m 的最高项系数符号是相反还是相同，可知

$$\deg p_{m-1} = \deg q_{m-1} + 1 = m - 1$$

也满足 Pell 方程. 由此可得, 存在两个多项式解 $p_1^i, q_1^i, i = 1, 2, \deg p_1^i = \deg q_1^i + 1 = 1$, $p_1^i(0) = 1$, $q_1^i \neq -q_1^i$.

但直接计算表明， Pell 方程只有唯一解满足上面条件. 矛盾. 证毕.

第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题 (二) 参考答案

1. 设正实数 u,v,w 满足 $u+v+w+\sqrt{uvw}=4$. 求证:

$$\sqrt{\frac{vw}{u}}+\sqrt{\frac{uw}{v}}+\sqrt{\frac{uv}{w}}\geq u+v+w.$$

证明: 设 $u=xy, v=yz, w=xz$, x,y,z 为正实数. 则条件变为

$$xyz+xy+yz+zx=4,$$

结论变为

$$x+y+z\geq xy+yz+zx. \tag{$*$}$$

因 x,y,z 三个数中必有两个在 1 的同侧, 不妨设 y,z 在 1 的同侧, 则

$$(y-1)(z-1)\geq 0. \tag{1}$$

于是

$$x(yz+y+z)=4-yz>0.$$

由此可得

$$x=\frac{4-yz}{yz+y+z}\leq\frac{4-yz}{yz+2\sqrt{yz}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{yz})(2-\sqrt{yz})}{\sqrt{yz}(\sqrt{yz}+2)}=\frac{2-\sqrt{yz}}{\sqrt{yz}}.$$

因此,

$$(x+1)\sqrt{yz}\leq 2. \tag{2}$$

注意到要证的

$$(*)\Leftrightarrow x-xz-xy+xyz\geq yz-y-z+xyz$$

$$\Leftrightarrow x(1-y)(1-z)\geq yz(x+1)-y-z. \tag{$**$}$$

下证 $(**)$: 由 (1), 左边 ≥ 0;
由 (2), 右边 $\leq\sqrt{yz}\cdot 2-y-z=-(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2\leq 0$. 故 $(**)$ 成立.

2. 求出所有正整数 n 使得存在由 $-1,1$ 组成的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i i^2=0$.

解:

$$n=\begin{cases}4k+3, & k\geq 1;\\ n=4k, & k\geq 2.\end{cases}$$

显然，当 $n=4k+1,4k+2$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i i^2$ 为奇数. 不难验算，对于 $n=3,4$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i i^2\neq 0$.

由于 $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=4$, 故若对 n 有解，则 $n+8k$ $(k\geq 0)$ 也有解. 下面只须验算 $n=7,11,12$ 时有解即可.

$n=7:$

$1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2=0.$

$n=11:$

$1^2-2^2+3^2+4^2+5^2-6^2-7^2-8^2+9^2-10^2+11^2=0.$

$n=12:$

$1^2-2^2+3^2+4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2-11^2+12^2=0.$

3. 设平面上有 $n \geq 3$ 个点，求证：其中必存在三个点 A, B, C 满足

$$1 \leq \frac{AB}{AC} < \frac{n+1}{n-1}.$$

证明：设这 n 个点间两两距离最大的两点是 P, Q, 记 $PQ = d$, 将其余 $n-2$ 个点按与 P 或 Q 的距离分类：将与 P 距离较近的点分为一类，与 Q 距离较近的点分为另一类. 若一个点与 P, Q 距离相等，则自由选择该点属于哪一类.

设与 Q 点距离较近的点的个数为 k, 不妨设它是点的个数较多的一类，即 $k \geq \frac{n}{2}$. 我们把这 k 个点按照它们与 P 点的距离的大小 (从小到大) 排序：$R_1, R_2, \cdots, R_k = Q$, 其中 $PR_1 \leq PR_2 \leq \cdots \leq PR_k = d$.

(i) 如果 $PR_1 \leq (1+\frac{1}{n})\frac{d}{2}$, 由三角形不等式，得

$$QR_1 \geq PQ - PR_1 \geq (1-\frac{1}{n})\frac{d}{2}.$$

从而

$$1 \leq \frac{PR_1}{QR_1} \leq \frac{n+1}{n-1},$$

取点 $A = P$, $B = R_1$, $C = Q$ 即可.

(ii) 如果 $PR_1 > (1+\frac{1}{n})\frac{d}{2}$, 我们只须证明存在 i 使得

$$PR_{i+1} < \frac{n+1}{n-1} PR_i, \tag{1}$$

其中 $1 \leq i < k$, 取 $A = R_{i+1}$, $B = P$, $C = R_i$ 即可.

由

$$\frac{PR_2}{PR_1} \cdot \frac{PR_3}{PR_2} \cdot \cdots \cdot \frac{PR_k}{PR_{k-1}} = \frac{PR_k}{PR_1} < \frac{d}{(1+\frac{1}{n})\frac{d}{2}} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

下证

$$\frac{2}{1+\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{k-1}. \tag{3}$$

因为

$$
\begin{aligned}
& (1+\frac{1}{n})\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{k-1} \\
= \ & (1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n-1})^{k-1} \\
= \ & (1+\frac{1}{n})\left[1+C_{k-1}^{1}\frac{2}{n-1}+C_{k-1}^{2}(\frac{2}{n-2})^{2}+\cdots+(\frac{2}{n-1})^{k-1}\right] \\
\geq \ & (1+\frac{1}{n})[1+\frac{2}{n-2}\cdot(k-1)] \\
\geq \ & (1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n-2}\cdot\frac{n-2}{2}) \\
= \ & 2+\frac{n-3}{n(n-1)} \\
\geq \ & 2.
\end{aligned}
$$

所以 (3) 成立，从而 (2) 式左边至少有一个因式小于 $\frac{n+1}{n-1}$. 即 (1) 式成立. 证毕.

第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题 (三) 参考答案

1. 设圆 Ω 过三角形 ABC 的顶点 B, C. 圆 ω 内切 Ω 于点 T, 并分别切边 AB, AC 于点 P, Q. 记 M 为弧 $\widehat{BC}$ (包含 T 点) 的中点. 求证: 直线 PQ, BC, MT 三线共点.

证明: 如图 6, 设 BC 交圆 ω 于 Y, Z 两点, 并设 K 是 MT 与 BC 的交点. 须证 P, Q, K 共线.

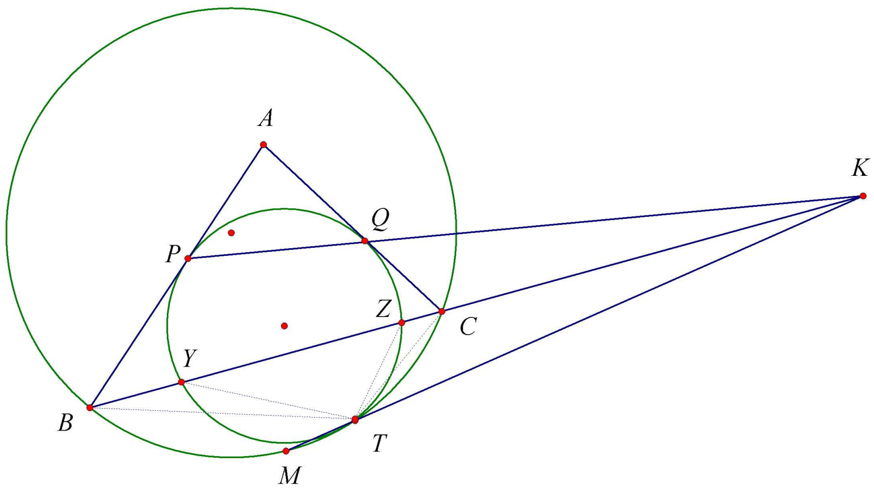

图 6

根据 Menelaus 定理及其逆定理以及 $AP = AQ$ 的事实, P, Q, K 共线

$$\Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{BK}{KC} = \frac{PB}{CQ}. \tag{1}$$

因为 ω, Ω 关于 T 点位似, 所以 $\angle BTY = \angle CTZ$, 由正弦定理 (面积关系) 有

$$\left(\frac{TB}{TC}\right)^2 = \frac{BY \cdot BZ}{CY \cdot CZ}. \tag{2}$$

又因为 MT 是 ΔBCT 的外角平分线, 所以

$$\frac{BK}{CK} = \frac{TB}{TC}. \tag{3}$$

利用 (2), (3) 及割线定理可得

$$\frac{BK}{CK} = \sqrt{\frac{BY \cdot BZ}{CY \cdot CZ}} = \frac{BP}{CQ}.$$

此即 (1). 证毕.

2. 设 $k>1$ 是一个给定的整数. 我们称一个 k 位整数 $a_1a_2\cdots a_k$ 是 p- 单调的，如果对每个满足 $1\le i\le k-1$ 的整数 i, 当 a_i 为奇数时 $a_i>a_{i+1}$; 而当 a_i 为偶数时 $a_i<a_{i+1}$. 求 p- 单调的 k 位整数的个数.

解: 用 m_k 记 p- 单调 k 位整数的个数. 则当 k 为偶数时， $m_k=\frac{5^{k+2}-5^{k+1}-8}{12}$; 而当 k 为奇数时， $m_k=\frac{5^{k+2}-5^{k+1}+8}{12}$.

给定条件下，$a_1a_2\cdots a_k$ 是 p- 单调的当且仅当对每个满足 $1\le i\le k-1$ 的整数 i, a_i 要么是一个大于 a_{i+1} 的奇数, 要么是一个小于 a_{i+1} 的偶数. 不难验证对每个固定的 a_{i+1}, a_i 的位置上可有 5 个数供选择 (例如，若 $a_{i+1}=9$, 则 $a_i\in\{0,2,4,6,8\}$; 若 $a_{i+1}=8$ 或 7, 则 $a_i\in\{0,2,4,6,9\}$, 等等).

另外，若 $a_1=0$, 则 $a_2\ne 0$, 这时可得到一个 $k-1$ 位的 p 单调数 $a_2\cdots a_k$. 用 n_k 表示 a_1 的位置可取 0 的所有 p 单调数的个数，由于 a_k 的位置有 10 种选择，而对 $1\le i\le k-1$ 的每个 a_i 位置，存在 5 种选择，因此

$$n_k=5^{k-1}\times 10=5^k\cdot 2.$$

另一方面，如果 $a_1=0$, 则 $a_2\ne 0$, 我们可得到一个 $k-1$ 位的 p- 单调整数 $a_2\cdots a_k$, 反之亦然.

因此，我们有

$$m_k+m_{k-1}=n_k=5^k\cdot 2, \tag{$*$}$$

对每个大于 1 的整数 k 成立. 此外，可直接算出 $m_2=41$. 现令 $m_1=9$, 则 $(*)$ 对任意正整数 k 成立.

若 k 是一个偶数，我们令 $k=2k_1$. 由 $(*)$ 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2k_1}m_i &= (m_{2k_1}+m_{2k_1-1})+\cdots+(m_2+m_1)\\ &= 2(5^{2k_1}+5^{2k_1-2}+\cdots+5^2)\\ &= \frac{5^{2k_1+2}-5^2}{12}\\ &= \frac{5^{k+2}-25}{12}.\end{aligned}$$

另一方面，我们还有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2k_1} m_i &= m_{2k_1} + (m_{2k_1-1} + m_{2k_1-2}) + \cdots + (m_3 + m_2) + m_1 \\ &= m_{2k_1} + 2(5^{2k_1-1} + 5^{2k_1-3} + \cdots + 5^3) + 9 \\ &= m_{2k_1} + 9 + \frac{5^{2k_1+1} - 5^3}{12} \\ &= m_{2k_1} + 9 + \frac{5^{k+1} - 125}{12}.\end{aligned}$$

合并以上两式可得

$$m_k = m_{2k_1} = \frac{5^{k+2} - 25}{12} - \frac{5^{k+1} - 125}{12} - 9 = \frac{5^{k+2} - 5^{k+1} - 8}{12}.$$

若 k 是一个奇数，则 $k-1$ 是一个偶数. 同样由 $(*)$ 我们有

$$m_k = 2 \cdot 5^k - \frac{5^{k+1} - 5^k - 8}{12} = \frac{5^{k+2} - 5^{k+1} + 8}{12}.$$

3. 是否存在无穷多个正整数 k 使得 $k\cdot 2^n+1$ 对每个正整数 n 是合数？

解 (一): 设 $i>j$, 显然

$$2^{2^j}+1|2^{2^i}-1.$$

所以， $\gcd(2^{2^i}+1,2^{2^j}+1)|2$ 且两数皆是奇数. 因此对于 $i\geq 0$ 费马数 $f_i=2^{2^i}+1$ 两两互素.

令 p_i 是 $2^{2^i}+1$ 的一个素因子，则对每个具有形式 $2^i\cdot q$, q 为奇数的 n, 成立

$$2^n=2^{2^i\cdot q}\equiv -1(\bmod\ \ p_i),$$

进而对 $k\equiv 1(\bmod\ \ p_i)$ 我们有 $p_i|2^n\cdot k+1$;

而对每个具有形式 $2^i\cdot q$, q 为偶数的 n, 成立

$$2^n=2^{2^i\cdot q}\equiv 1(\bmod\ \ p_i),$$

进而对 $k\equiv 1(\bmod\ \ p_i)$ 我们有 $p_i|2^n\cdot k+1$.

对 $i=0,1,2,3,4$, 令 p_i 是 $2^{2^i}+1$ 素因子， p,q 是 $2^{32}+1$ 的两个不同的素因子 (即 641 和 6700417) 满足. 根据中国剩余定理, 我们可选取 k 使得对 $i=0,1,2,3,4$, $k\equiv 1(\bmod\ \ p_i)$, $k\equiv 1(\bmod\ \ p)$ 以及 $k\equiv -1(\bmod\ \ q)$.

令 i 是满足 $2^i|n$ 的最大整数. 则由上可知当 $i=5$ 时 $p|2^n\cdot k+1$; 当 $i<5$ 时 $p_i|2^n\cdot k+1$. 对 $i>5$, 因为 $k\equiv -1(\bmod\ \ q)$, 所以 $q|2^n\cdot k+1$. 因此如果我们选取充分大的 k, 则 $2^n\cdot k+1$ 对所有 $n\geq 0$ 都是合数.

解 (二): 注意到

$$2^2\equiv 1(\bmod\ \ 3), 2^4\equiv 1(\bmod\ \ 5), 2^3\equiv 1(\bmod\ \ 7),$$

$$2^{12}\equiv 1(\bmod\ \ 13), 2^8\equiv 1(\bmod\ \ 17), 2^{24}\equiv 1(\bmod\ \ 241)$$

利用中国剩余定理，我们可选取 k 使得

$$2k\equiv -1(\bmod\ \ 3), 2^4\cdot k\equiv -1(\bmod\ \ 5), 2^2\cdot k\equiv -1(\bmod\ \ 7),$$

$$2^6\cdot k\equiv -1(\bmod\ \ 13), 2^{10}\cdot k\equiv -1(\bmod\ \ 17), 2^{22}\cdot k\equiv -1(\bmod\ \ 241).$$

对这样的正整数 k 我们有以下的表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p	3	7,17	3	5	3,7	13	3	5,7
n	9	10	11	12	13	14	15	16
p	3	17	3,7	5	3	7	3	5
n	17	18	19	20	21	22	23	24
p	3,7	13,17	3	5,7	3	24	3,7	5

(这里 n 的值取为模 24, p 表示相应的数 $2^n \cdot k+1$ 的素因子.)

第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题 (四) 参考答案

1. 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. 求证：

$$(a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1)(\frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1}) \geq \frac{n}{n+1}.$$

证明：首先由 Cauchy 不等式易得下述引理：

引理：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数，则

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

由引理及题设得

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} &= \frac{a_1^2}{a_1a_2} + \frac{a_2^2}{a_2a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_na_1} \\ &\geq \frac{1}{a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1}. \end{aligned}$$

因而只须证明

$$\frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1} \geq \frac{n}{n+1}(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}). \tag{1}$$

由引理得

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1} &= \frac{(\frac{a_1}{a_2})^2}{a_1 + \frac{a_1}{a_2}} + \frac{(\frac{a_2}{a_3})^2}{a_2 + \frac{a_2}{a_3}} + \cdots + \frac{(\frac{a_n}{a_1})^2}{a_n + \frac{a_n}{a_1}} \\ &\geq \frac{(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1})^2}{1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}}. \end{aligned} \tag{2}$$

令 $t = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}$, 则 $t \geq n$. 从而只须证

$$\frac{t^2}{1+t} \geq \frac{nt}{n+1}.$$

而此式等价于 $t \geq n$. 证毕.

2. 多项式 $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\cdots(x^{2007}-1)$ 展开后去掉所有大于 2007 次的项得到的多项式记为 $f(x)$. 求 $f(x)$ 的次数及最高次项系数.

解: 由定义

$$f(x)=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n;k_1+k_2+\cdots+k_n\le 2007}(-1)^{n+1}x^{k_1+k_2+\cdots+k_n}-1$$

记

$A_{n,m}=\{(k_1,k_2,\cdots,k_n)|1\le k_1<k_2<\cdots<k_n,k_1+k_2+\cdots+k_n=m\}$.

则对 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in A_{n,m}$, 令 $n\ge d\ge 1$ 满足

$$k_n=k_{n-1}+1=k_{n-2}+2=\cdots=k_{n-d+1}+d-1>k_{n-d}+d.$$

记

$B_{n,m}=\{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in A_{n,m}|d<n,k_1=d,d+1 \text{ 或 } k_1\ne d,d+1\}$

令 $B_m^+=\cup_{n\ge 1}B_{2n,m}$, $B_m^-=\cup_{n\ge 0}B_{2n+1,m}$, 则 B_m^+ 与 B_m^- 可建立一一对应.

对于 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in B_m^+\cup B_m^-$, 我们如下建立对应:

若 $k_1<d$ 或 $k_1=d<n$, 则

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)\to(k_2,k_3,\cdots,k_{n-k_1+1}+1,\cdots,k_n+1).$$

若 $k_1>d+1$ 或 $k_1=d+1,n>d$, 则

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)\to(d,k_1,\cdots,k_{n-d+1}-1,\cdots,k_n-1).$$

故若 $(k_1,\cdots,k_n)\in B_m^+\cup B_m^-$, 则 $f(x)$ 不含 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 次项.

下设 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)\notin B_m^+\cup B_m^-$, 若 $k_1=d=n$, 则

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k_1+(k_1+1)+\cdots+(2k_1-1)=\frac{3n^2-n}{2};$$

若 $k_1=d+1,n=d$, 则

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n)=\frac{3n^2+n}{2};$$

由此

$$f(x)=-1+\sum_{n=1}^{36}(-1)^{n+1}(x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}})$$

$$\Rightarrow \deg f=\frac{3\cdot 36^2+36}{2}=1962,$$

其系数为 -1.

3. 设 n 是正整数， $A,B\subseteq[0,n]$ 是整数集合，满足 $|A|+|B|\geq n+2$. 求证：存在 $a\in A,b\in B$ 使得 $a+b$ 为 2 的幂.

证明：假设结论不对，下面我们证明 $|A|+|B|\leq n+1$, 从而矛盾.

对 n 归纳， $n=1$ 时易见结论成立. 设 $n\geq 2$, 取整数 r 满足 $2^r\leq n<2^{r+1}$. 注意，由反证法假设知，若 $a\in A$, 则 $2^{r+1}-a\notin B$. 因此

$$|A\cap[2^{r+1}-n,n]|+|B\cap[2^{r+1}-n,n]|\leq 2n+1-2^{r+1}. \tag{1}$$

这里 $[x,y]$ 表示区间. 这是因为设 $|A\cap[2^{r+1}-n,n]|=k$, 则由上面注意知

$$|B\cap[2^{r+1}-n,n]|\leq(n-(2^{r+1}-n)+1)-k=2n+1-2^{r+1}.$$

另一方面，由归纳假设，有

$$|A\cap[0,2^{r+1}-n-1]|+|B\cap[0,2^{r+1}-n-1]|\leq 2^{r+1}-n, \tag{2}$$

除非 $n=2^{r+1}-1$. 但注意当 $n=2^{r+1}-1$ 时，只要 A,B 中至少有一个不含 0, 则 (2) 仍成立.

因此，当 $n\neq 2^{r+1}-1$ 或 $n=2^{r+1}-1$ 但 $0\notin A\cap B$ 时，由 (1), (2) 即得

$$|A|+|B|\leq n+1.$$

当 $n=2^{r+1}-1$ 且 $0\in A\cap B$ 时，我们有 $2^r\notin A$ 且 $2^r\notin B$. 即若 $a=2^r$, 则 $a\notin A$, 且 $2^{r+1}-a\notin B$. 因此 (1) 可加强为

$$|A\cap[1,n]|+|B\cap[1,n]|\leq n-1.$$

(注意 $n=2^{r+1}-1$, 故 $2n+1-2^{r+1}=n$). 又 $0\in A\cap B$, 故 $|A|+|B|\leq n+1$ 也成立.

第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题 (五) 参考答案

1. 凸四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, BA, CD 的延长线相交于点 H, 对角线 AC, BD 相交于点 G, O_1, O_2 分别为 $\triangle AGD, \triangle BGC$ 的外心. 设 O_1O_2 与 OG 交于点 N, 射线 HG 分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于点 P, Q. 设 M 为 PQ 的中点, 求证: $NO = NM$.

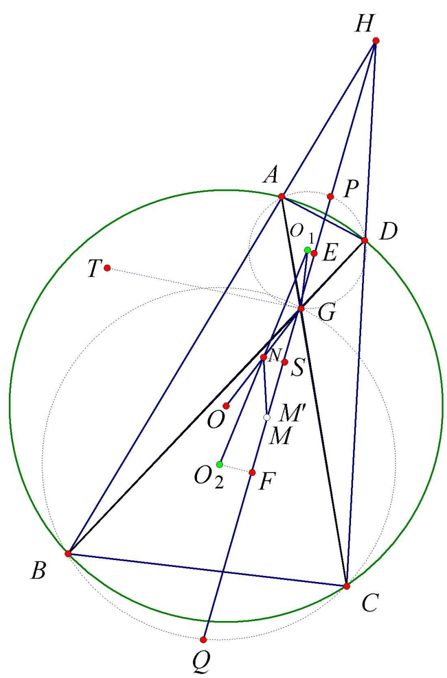

图 7

证明: 如图 7, 过点 G 作 $GT \perp O_1G$, 则 TG 切 $\odot O_1$ 于 G, 于是由 $\angle AGT = \angle ADG = \angle ACB$, 即知 $TG \parallel BC$, 从而 $O_1G \perp BC$. 而 $OO_1 \perp BC$, 于是 $O_1G \perp OO_2$.

同理, $OO_1 \perp GO_2$. 故 O_1OO_2G 为平行四边形. 所以 N 分别为 OG, O_1O_2 的中点. 在射线 HG 上取点 M', 使 $HG \cdot HM' = HA \cdot HB$, 则知 G, A, B, M' 四点共圆.

而 $HD \cdot HC = HA \cdot HB$, 亦知 C, D, G, M' 四点共圆.

过 O_1 作 $O_1E \perp PG$ 于 E, 过 O_2 作 $O_2F \perp GQ$ 于 F, 过 N 作 $NS \perp GM'$ 于 S, 则 E 为 PG 中点, F 为 GQ 中点, S 为 EF 中点. 因为 $\angle BOC = 2\angle BAC = \angle BAC + \angle BDC = \angle BM'Q + \angle QM'C = \angle BM'C$, 所以, B, C, M', O 四点共

圆．于是

$$\angle OM'B = \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BM'C)$$

$$\frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle BM'Q) = 90^\circ - \angle BM'Q,$$

所以， $OM' \perp PQ$, 故 $NO = NM'$. 又由上知 S 为 GM' 的中点，于是

$$PM' = PG + GM' = 2EG + 2GS = 2ES,$$

$$QM' = QG - GM' = 2FG - 2GS = 2FS = 2ES,$$

从而 M' 为 PQ 的中点，即 M' 与 M 重合．故 $NO = NM$.

2. 平面上任给 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, 其中任意三点不共线. 将每个点 P_i $(1 \le i \le n)$ 任染红蓝两色之一. 设 S 是顶点集合为 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ 的三角形的集合, 且具有性质：对任意两条线段 P_iP_j 及 P_uP_v, S 中以 P_iP_j 为边的三角形的个数与以 P_uP_v 为边的三角形的个数相同. 试求最小的 n, 使得在 S 中总有两个三角形, 每一个三角形的顶点有相同的颜色.

解：设 S 中以 P_iP_j 为边的三角形的个数是 k, 则 k 是正整数且与 i, j 无关. 因 P_iP_j 共有 C_n^2 条，故 S 中所有三角形产生 kC_n^2 条边. 又每个三角形有三条边，故 $|S| = \frac{1}{3}kC_n^2$(即共有 $\frac{1}{3}kC_n^2$ 个三角形). 设 S 中有 x 个顶点同色的三角形，则 S 中不同色的三角形的个数是 $\frac{1}{3}kC_n^2 - x$. 同时，每个顶点不同色的三角形产生两条端点异色的线段，故 S 中端点异色的线段共有 $2(\frac{1}{3}kC_n^2 - x)$ 条.

另一方面，设 $P_1, \cdots, P_n$ 中 n_1 个点染红， n_2 个点染蓝， $n_1 + n_2 = n$. 由假设知每条端点异色的线段在 S 的全体三角形中出现 k 次，故这样的线段共有 kn_1n_2 条. 因此

$$2(\frac{1}{3}kC_n^2 - x) = kn_1n_2.$$

可解得

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{6}(2C_n^2 - 3n_1n_2) = \frac{k}{6}(n^2 - n - 3n_1n_2) \\ &\ge \frac{k}{6}(n^2 - n - 3(\frac{n_1+n_2}{2})^2) = \frac{k}{6}n(\frac{n}{4} - 1) \\ &= \frac{k}{24}n(n-4). \end{aligned}$$

故当 $n \ge 8$ 时，

$$x \ge \frac{n}{24}(n-4) \ge \frac{8 \times 4}{24} = \frac{4}{3} > 1$$

(因 $k \ge 1$), 即 $x \ge 2$. 所以 $n \ge 8$.

当 $n = 7$ 时结论不一定对，例如将 $1, 2, 4$ 三点染红， $3, 5, 6, 7$ 染蓝，则三角形集合 $\{\check{1}, \check{2}, \check{4}\}$, $\{\check{2}, 3, 5\}$, $\{3, \check{4}, 6\}$, $\{\check{4}, 5, 7\}$, $\{5, 6, \check{1}\}$, $\{6, 7, \check{2}\}$, $\{7, \check{1}, 3\}$ 符合要求 (每条边 ij 出现在一个三角形中), 但没有两个同色顶点三角形.

3. 设 $a,b,c\in(0,1]$, 且 $a^2+b^2+c^2=2$. 求证:

$$\frac{1-b^2}{a}+\frac{1-c^2}{b}+\frac{1-a^2}{c}\le\frac{5}{4}. \tag{1}$$

证明: 不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$. 由题设知 $a^2\le b^2+c^2$.

则

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow\frac{2-2b^2}{2a}+\frac{2-2c^2}{2b}+\frac{2-2a^2}{2c}\le\frac{5}{4}\\ &\Leftrightarrow\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\le\frac{5}{4}.\end{aligned} \tag{2}$$

而

$$\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}\ge\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}(a+\sqrt{b^2+c^2}),$$

所以只须证

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}+\frac{b^2+c^2-a^2}{c}\le\frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2}). \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{bc(a^2+c^2-b^2)+ca(a^2+b^2-c^2)+ab(b^2+c^2-a^2)}{abc}\le\frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2})$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+\frac{(a+c+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\le\frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2})$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)[abc+(a-b)(b-c)(c-a)]\le 5abc(a+\sqrt{b^2+c^2})$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)+abc(4(b+c)-a-5\sqrt{b^2+c^2})\le 0.$$

记 $f(a)=4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)+abc(4(b+c)-a-5\sqrt{b^2+c^2})$.

(i) 若 $b\le c\le a\le\sqrt{b^2+c^2}$, 当 $b=c$ 时, $a\le\sqrt{2}b$. 此时 $f(a)=ab^2(8b-a-5\sqrt{2}b)=ab^2((7-5\sqrt{2})b+(b-a))<0$.

当 $b<c$ 时, $f(a)$ 为 a 的三次多项式,其首项系数为 $4(c-b)>0$, 故 $\lim\limits_{a\to-\infty}f(a)<0$, $\lim\limits_{a\to+\infty}f(a)>0$, 而 $f(0)=4(b+c)bc(c-b)>0$, $f(c)=bc^2(4(b+c)-c-5\sqrt{b^2+c^2})=bc^2(4b+3c-5\sqrt{b^2+c^2})<0$ ($\Leftrightarrow 4b+3c<5\sqrt{b^2+c^2}\Leftrightarrow 16b^2+9c^2+24bc<25b^2+25c^2\Leftrightarrow 9b^2-24bc+16c^2>0\Leftrightarrow(3b-4c)^2>0$)

故 $f(a)$ 在 $(-\infty,0)$, $(0,c)$, $(c,+\infty)$ 上有三个实根.

考虑 $f(\sqrt{b^2+c^2})$ 的符号, 注意到 $f(a)$ 与 (3) 中左边减去右边的符号相同, 只须考虑

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}+\frac{b^2+c^2-a^2}{c}-\frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2}) \tag{4}$$

当 $a=\sqrt{b^2+c^2}$ 时的符号．这时

$$\begin{aligned}(4) &= \frac{2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{2b^2}{b}-\frac{5}{4}(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}) \\ &= \frac{2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+2b-\frac{5}{2}\sqrt{b^2+c^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b^2+c^2}}(4c^2+4b\sqrt{b^2+c^2}-5(b^2+c^2)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b^2+c^2}}(4b\sqrt{b^2+c^2}-5b^2-c^2)\le 0\end{aligned}$$

$(\Leftrightarrow 4b\sqrt{b^2+c^2}\le 5b^2+c^2 \Leftrightarrow 16b^4+16b^2c^2\le 25b^4+c^4+10b^2c^2 \Leftrightarrow 9b^4+c^4-6b^2c^2\ge 0$
$\Leftrightarrow (3b^2-c^2)^2\ge 0)$

从上可知 $f(\sqrt{b^2+c^2})\le 0$. 这说明：当 $c\le a\le\sqrt{b^2+c^2}$ 时 $f(a)\le 0$.

(ii) 若 $c<b\le a\le\sqrt{b^2+c^2}$. 此时若存在 a_1 使得 $f(a_1)>0$. 令 $b_1=c, c_1=b$, 则 $b_1<c_1\le a_1\le\sqrt{b^2+c^2}$, 由 (i) 知此时 $f(a_1)\le 0$, 即

$$4(a_1+b_1+c_1)(a_1-b_1)(a_1-c_1)(c_1-b_1)+a_1b_1c_1(4(b_1+c_1)-a_1-5\sqrt{b_1^2+c_1^2})\le 0$$

即

$$4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(b-c)+a_1bc(4(b+c)-a_1-5\sqrt{b^2+c^2})\le 0$$

又 $b>c$, 所以

$$4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(b-c)\ge 0\ge 4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(c-b)$$

因此

$$f(a_1)\le 4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(b-c)+a_1bc(4(b+c)-a_1-5\sqrt{b^2+c^2})\le 0.$$

矛盾！

($a=1, b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立.)

第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题 (六) 参考答案

1. 求所有的正整数对 (a,b), 满足： a^2+b+1 是一个素数的幂， a^2+b+1 整除 b^2-a^3-1, 且 a^2+b+1 不整除 $(a+b-1)^2$.

解：由已知， $\frac{(b+1)(a+b-1)}{a^2+b+1}=\frac{b^2-a^3-1}{a^2+b+1}+a$ 也是整数.

设 $p^k=m=a^2+b+1$, k 为正整数，则 $p^k|(b+1)(a+b-1)$.

若 p 不整除 $b+1$, $a+b-1$ 之一, 则 p^k 必整除另一个, 但此时 $p^k=a^2+b+1>\max\{b+1,a+b-1\}$, 矛盾！

故 $b+1\equiv a+b-1\equiv 0(\mod\ p)$, $a^2=p^k-(b+1)\equiv 0(\mod\ p)$.

由于 p 为素数，有 $a\equiv 0(\mod\ p)$,

$$0\equiv(b+1)-(a+b-1)+a\equiv 2(\mod\ p)\Rightarrow p=2.$$

设

$$\begin{cases} a^2+b+1=2^k, \\ b+1=2^{k_1}t_1, \\ a+b-1=2^{k_2}t_2, \\ k_1+k_2\geq k, \\ k>2k_2, \end{cases}$$

其中， t_1,t_2 为奇数， k_1,k_2 为正整数，最后一式由 $m\nmid(a+b-1)^2$ 可知.

由于 $2^k=a^2+b+1>b+1=2^{k_1}t_1$, 故还可得到 $k>k_1$.

(i)$k_1\geq 3$.

$a^2=2^k-2^{k_1}t_1\equiv 0(\mod\ 2^3)$, 故 $a\equiv 0(\mod\ 4)$, $a+b-1\equiv 0-1-1\equiv 2(\mod\ 4)$, 由此必有 $k_2=1$.

由 $k_1+k_2\geq k>k_1$ 知， $k=k_1+1$.

此时 $2^{k_1}t_1=b+1<a^2+b+1=2^k=2^{k_1+1}$, 故 $t_1=1$.

于是

$$\begin{cases} b+1=2^{k_1}, \\ a^2+b+1=2^{k_1+1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2^x, \\ b=2^{2x}-1, \end{cases}$$

这里仅当 k_1 为偶数时才对应解 (因出现了 a^2), 故设 $k_1=2x$, 则 $(a,b)=(2^x,2^{2x}-1)$ 为一组通解. 检验知，当 $x=1$ 时， $(a,b)=(2,3)$, 但 $\frac{(a+b-1)^2}{a^2+b+1}=2$ 为整数，故舍

去;

对 $x \geq 2$, 数组均满足所有条件.

(ii)$k_1 = 2$.

由 $k > k_1$ 知, $k \geq 3$.

由 $k_1 + k_2 \geq k$ 及 $k > 2k_2$ 知, $2k_2 < k \leq k_2 + 2 \Rightarrow k_2 < 2$, 继而有 $k \leq 3$, 故 $k = 3$. 但

$$\begin{cases} b+1 = 2^2 t_1, \\ a^2 + b + 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ a = 2, \\ b = 3, \end{cases}$$

舍去.

(iii) $k_1 = 1$. 则 $2k_2 < k \leq k_2 + 1 \Rightarrow k_2 < 1$, 矛盾！

综上，所求数组 (a, b) 为 $(2^x, 2^{2x} - 1)$, $(x = 2, 3, 4, \cdots)$.

2. 凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ, 与边 BC 相交的一个圆与圆 Γ 内切, 且分别与 BD, AC 相切于点 P, Q, 求证: $\triangle ABC$ 的内心与 $\triangle DBC$ 的内心皆在直线 PQ 上.

证明: 设圆 Γ 的外心为 O, 与 BC 相交且与 Γ 相内切的圆的圆心为 O_1, 切点为 T. 则 O, O_1, T 共线. 设 DB 交 CA 于 H, PQ 交 CD 于 R, TR 交 $\odot O$ 于 F, CT 交 $\odot O_1$ 于 M, TD 交 $\odot O_1$ 于 N, TP 交 $\odot O$ 于 E.

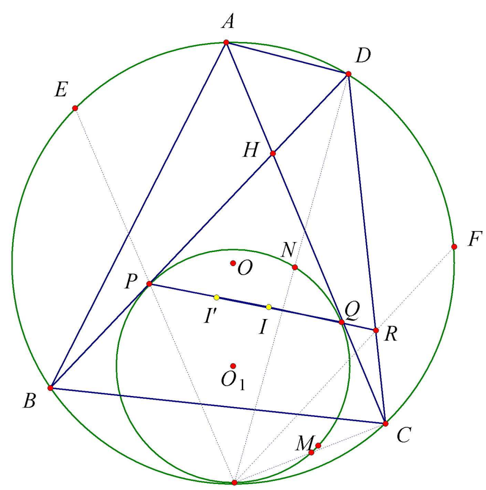

图 8

则存在一个以点 T 为位似中心的位似变换使得 $\odot O_1$ 变为 $\odot O$. 因此 $M \to C$, $N \to D$, $P \to E$. 直线 BD 变为过点 E 且平行于 BD 的 $\odot O$ 的切线. 所以 E 是 $\widehat{BD}$ 的中点. 因为

$$\frac{TM}{TN} = \frac{TC}{TD},$$

所以

$$\frac{DP^2}{CQ^2} = \frac{DN \cdot DT}{CM \cdot CT} = \frac{DT^2}{CT^2}.$$

此即

$$\frac{DP}{CQ} = \frac{DT}{CT}. \tag{1}$$

又直线 RQP 截 ΔCDH, 由 Menelaus 定理

$$\frac{CR}{RD} \cdot \frac{DP}{PH} \cdot \frac{HQ}{QC} = 1.$$

所以

$$\frac{CR}{RD} = \frac{CQ}{DP}. \tag{2}$$

又

$$\frac{CR}{RD}=\frac{S_{\Delta CFT}}{S_{\Delta DFT}}=\frac{CF\cdot CT}{DF\cdot DT}. \tag{3}$$

由 (1), (2), (3) 知

$$\frac{CF}{DF}=1.$$

也就是说， F 是弧 $\widehat{CD}$ 的中点.

另外，易知 ΔBCD 的内心 I 为 CE 与 BF 的交点. 对于圆内接六边形 $ETFBDC$, 由帕斯卡定理知 I, P, R 共线. 所以 ΔBDC 的内心在 PQ 上.

同理， ΔABC 的内心 I' 也在 PQ 上.

3. 考虑一个 7×7 的数表 $a_{ij}=(i^2+j)(i+j^2)$, $1\le i,j\le 7$. 我们称将任意一个由 7 个整数组成的等差数列的每一项分别依次加到某一行 (或列) 对应的项上为一次操作. 问：是否可能经过有限步上述操作得到一个数表使其每一行的 7 个数都构成等差数列？

解：先假设可由有限步操作来实现.

我们考虑 6×6 的子数表 $(a_{ij})_{1\le i,j\le 6}$. 则由给定的操作可知这个 6×6 的子数表中的元素之和模 6 的余数是不变的. 其最初的余数是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i^2+j)(i+j^2) &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}i^3+\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}j^3+\sum_{i=1}^{6}i\sum_{j=1}^{6}j+\sum_{i=1}^{6}i^2\sum_{j=1}^{6}j^2\\ &\equiv \left(\frac{6\cdot 7}{2}\right)^2+\left(\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}\right)^2\\ &\equiv (3\cdot 7)^2+(7\cdot 13)^2\\ &\equiv 4 (\mathrm{mod}\ \ 6).\end{aligned}$$

另一方面，如果经过有限步操作得到的 7×7 数表 $(b_{ij})_{1\le i,j\le 7}$ 具有形式 $b_{ij}=c_i+(j-1)d_i$, $1\le i,j\le 7$, 其中 $c_i,d_i,i=1,\cdots,7$ 是整数，则再考虑其 6×6 的子数表我们有

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}b_{ij}=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(c_i+(j-1)d_i)\equiv\sum_{i=1}^{6}\frac{5\cdot 6}{2}d_i\equiv 3\sum_{i=1}^{6}d_i (\mathrm{mod}\ \ 6).$$

这说明 $\sum\limits_{i=1}^{6}\sum\limits_{j=1}^{6}b_{ij}$ 在模 6 时要么与 0 同余，要么与 3 同余，且不与 4 模 6 同余. 矛盾！所以不能由有限步操作来得到一个数表使其每一行的 7 个数都构成等差数列.

第 48 届 IMO 中国国家队选拔考试题解

第 48 届 IMO 中国国家集训队教练组编

2007 年 3 月 15 日 -2007 年 4 月 2 日

第 48 届国际数学奥林匹克中国国家队选拔考试

第一天

2007 年 3 月 31 日上午 8:00–12:30　广东 深圳

1. 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦，M 是弧 $\widehat{AB}$ 的中点，C 是 $\odot O$ 外任一点，过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CS, CT, 连接 MS, MT, 分别交 AB 于点 E, F. 过点 E, F 作 AB 的垂线，分别交 OS, OT 于点 X, Y. 再过点 C 任作 $\odot O$ 的割线，交 $\odot O$ 于点 P, Q, 连接 MP 交 AB 于点 R, 设 Z 是 ΔPQR 的外心，求证：X, Y, Z 三点共线. (熊斌供题)

证明： 如图，先连接 OM, 由垂径定理，易说明 ΔXES 与 ΔOMS 位似，于是 ΔXES 是等腰三角形；故可以 X 为圆心，XE 和 XS 为半径作圆，该圆同时与弦 AB 及直线 CS 相切.

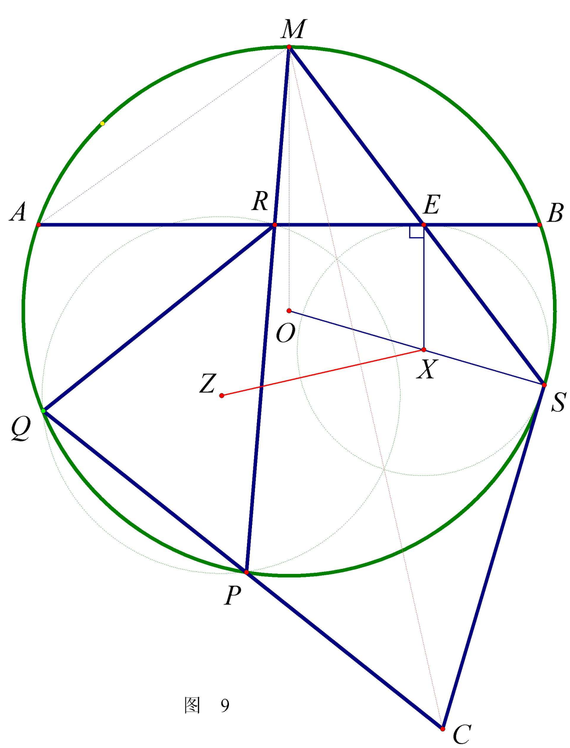

图 9

再作 ΔPQR 的外接圆，并连接 MA, MC.

易证明

$$MR \cdot MP = MA^2 = ME \cdot MS; \tag{1}$$

又由切割线定理

$$CQ \cdot CP = CS^2. \tag{2}$$

(1), (2) 表明 M 点和 C 点关于 $\odot Z$ 和 $\odot X$ 的幂都相等，于是 MC 就是上述两圆的根轴，因此

$$ZX \perp MC. \tag{3}$$

同理可证

$$ZY \perp MC. \tag{4}$$

由 (3), (4) 即知 X, Y, Z 三点共线. 证毕.

2. 称满足如下条件的有理数为“好的”： $x = \frac{p}{q} > 1$, 其中 p, q 是互质的正整数，且存在常数 α, N, 使得对任意正整数 $n \geq N$, 都有

$$|\{x^n\} - \alpha| \leq \frac{1}{2(p+q)},$$

其中 $\{a\}$ 表示 a 的小数部分．求出所有“好的”有理数．（李伟固供题）

解：显然每个大于 1 的整数是好的．下证每个好的有理数也必是大于 1 的整数．

设 $m_n = [x^{n+1}] - [x^n]$. 当 $n \geq N$ 时

$$|(x-1)x^n - m_n| = |\{x^{n+1}\} - \{x^n\}| \leq |\{x^{n+1}\} - \alpha| + |\{x^n\} - \alpha| \leq \frac{1}{p+q}.$$

注意到 $(x-1)x^n - m_n$ 是一个分母为 q^{n+1} 的最简分数，我们得到

$$|(x-1)x^n - m_n| < \frac{1}{p+q}, \quad n \geq N.$$

由此得

$$|qm_{n+1} - pm_n| = |q((x-1)x^{n+1} - m_{n+1}) - p((x-1)x^n - m_n)|$$
$$< \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} = 1.$$

故

$$m_{n+1} = \frac{p}{q} m_n, \quad n \geq N.$$

由此

$$m_{n+k} = \frac{p^k}{q^k} m_n, \quad \forall k.$$

又当 n 充分大时

$$m_n > (x-1)x^n - 1 > 0,$$

我们得到 $q = 1$, 即 $x > 1$ 为整数．

3. 在半径为 10 的圆周 C 上任给 63 个点，设以这些点为顶点且三边长都大于 9 的三角形的个数为 S, 求 S 的最大值. (冷岗松供题)

解: 设圆周 C 的中心为 O, 内接正 n 边形的边长为 a_n, 则 $a_6 = 10 > 9$, 且 $a_7 < 10 \times \frac{2\pi}{7} < 10 \times \frac{2\times 3.15}{7} = 9$.

(i) 作圆 C 的内接正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, 则 $A_iA_{i+1} = a+6 > 9$. 故可在 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 内取一点 B_i 使 $B_iA_{i+1} > 9$, 于是 $\angle B_iOA_{i+1} > \frac{2\pi}{7}$. 从而

$$\angle A_iOB_i = \angle A_iOA_{i+1} - \angle B_iOA_{i+1} < \frac{2\pi}{6} - \frac{2\pi}{7} < \frac{2\pi}{7},$$

所以

$$A_iB_i < 9, \quad (i = 1, 2, \cdots, 6, A_7 = A_1).$$

故 $\widehat{A_iB_i}$ 上任意两点的距离小于 9.

因 $63 = 6\times 10 + 3$, 在 $\widehat{A_1B_1}$, $\widehat{A_2B_2}$, $\widehat{A_3B_3}$ 每段弧内任取 11 个点，而在 $\widehat{A_4B_4}$, $\widehat{A_5B_5}$, $\widehat{A_6B_6}$ 每段弧内任取 10 个点，则共取出了 63 个点，组成集 M. 于是 M 内位于 6 条弧 $\widehat{A_iB_i}(i = 1, 2, \cdots, 6)$ 中同一条弧上任意两点的距离小于 9, 而位于不同弧上任意两点的距离大于 9, 故以 M 中的点为顶点且三边长都大于 9 的三角形个数为

$$S_0 = C_3^3 \times 11^3 + C_3^2C_3^1 \times 11^2 \times 10 + C_3^1C_3^2 \times 11 \times 10^2 + C_3^3 \times 10^3 = 23121.$$

于是所求 S 的最大值 $\geq S_0$.

(ii) 我们证明所求的最大值 $= S_0$.

为此我们需要下面三个引理.

引理 1 在圆周 C 上任给 n 个点，以 C 上一点 P 为中心，长度等于圆周长的 $\frac{2}{7}$ 的弧 $\widehat{BPC}$ (含 B, C 两点) 称为 P 点的 $\frac{2}{7}$ 圆弧. 则给定的 n 个点中必存在一点 P, 它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧至少覆盖给定点中的 $[\frac{n+5}{6}]$ 个点.

引理 1 的证明: 取一个给定点 A, 它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧为 $\widehat{A_1AA_6}$. 以 A_1, A_6 为端点不含 A 的另一段弧记为 $\widehat{A_1BA_6}$, 并将 $\widehat{A_1BA_6}$ 五等分，分点依次为 A_2, A_3, A_4, A_5 (图 10), 于是 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 恰是整个圆周 C 的 $\frac{1}{7}$ $(i = 1, 2, \cdots, 5)$. 因为 $\widehat{A_1AA_6}$ 上的给定点都被 A 点的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖，若 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 上有给定点 P_i, 则 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 上的所有给定点被点 P_i 的 $\frac{2}{7}$ 圆弧覆盖 $(i = 1, 2, \cdots, 5)$. 故所有 n 个给定点至多被其中 6 个给定点的 $\frac{2}{7}$

圆弧覆盖．由抽屉原理，其中必有一个给定点的 $\frac{2}{7}$ 圆弧至少覆盖 $[\frac{n-1}{6}]+1=[\frac{n+5}{6}]$ 个给定点．引理 1 得证.

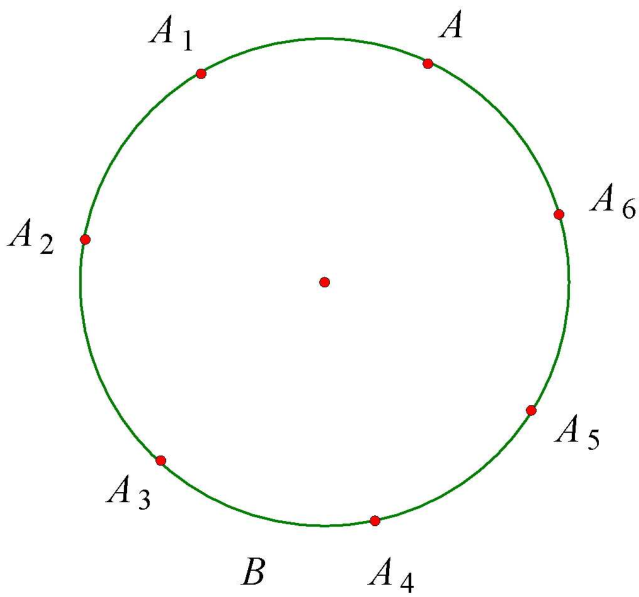

图 10

引理 2 在半径为 10 的圆周 C 上任取一条长度等于圆周长的 $\frac{5}{7}$ 的弧 $\widehat{A_1BA_6}$. 在 $\widehat{A_1BA_6}$ 上任给 $5m+r(m,r$ 为非负整数且 $0\leq r<5)$ 个点，则以给定点为端点，长度大于 9 的线段数至多为 $10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1)$.

引理 2 的证明: 将 $\widehat{A_1BA_6}$ 五等分,分点依次为 A_2,A_3,A_4,A_5(图 10),则 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 恰为整个圆周长的 $\frac{1}{7}(i=1,2,3,4,5)$. 于是同一弧 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 上任意两点的距离不超过 $a_7<9$. 设 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 上有 m_i 个已知点，则以已知点为端点且距离大于 9 的线段至多为

$$l=\sum_{1\leq i<j\leq 5}m_im_j, \tag{1}$$

其中

$$m_1+m_2+\cdots+m_5=5m+r. \tag{2}$$

因满足 (1) 的非负整数组 $(m_1,m_2,\cdots,m_5)$ 的个数有限，故 l 的最大值必存在．下面证明当 l 取最大值时必有

$$|m_i-m_j|\leq 1 \quad (1\leq i<j\leq 5).$$

事实上，若 l 取最大值时存在 $i,j(1\le i<j\le 5)$ 使得 $|m_i-m_j|\ge 2$, 不妨设 $m_1-m_2\ge 2$, 令 $m_1'=m_1-1$, $m_2'=m_2+1$, $m'=m$ $(3\le i\le 5)$, 并令对应的整数为 l', 则 $m_1'+m_2'=m_1+m_2$, 且 $m_1'+m_2'+\cdots+m_5'=m_1+m_2+\cdots+m_5$,

$$l'-l=(m_1'm_2'-m_1m_2)+[(m_1'+m_2')-(m_1+m_2)](m_3+m_4+m_5)=m_1-m_2-1\ge 1,$$

这与 l 为最大矛盾.

故当 l 取最大值时 $m_1,m_2,\cdots,m_5$ 中有 r 个 $m+1$, 有 $5-r$ 个 m. 所以以给定点为端点且长度大于 9 的线段数不超过

$$C_r^2(m+1)^2+C_r^1C_{5-r}^1(m+1)m+C_{5-r}^2m^2=10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1).$$

引理 3 在半径为 10 的圆周 C 上任给 n 个点组成点集 M, 且 $n=6m+r$ $(m,r$ 为非负整数， $0\le r<6)$, 设以 M 中的点为顶点，三边长都大于 9 的三角形个数为 S_n, 则

$$S_n\le 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

引理 3 的证明: 对 n 用归纳法.

$n=1$ 或 2 时， $S_n=0$, 结论显然成立.

设 $n=k(k\ge 2)$ 时结论成立，并设 $k=6m+r(m,r$ 为非负整数且 $0\le r<6)$, 则

$$S_k\le 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

则当 $n=k+1$ 时，由引理 1 知给定的 $k+1$ 个点中必存在一点 P, 它的 $\frac{2}{7}$ 圆弧 $\widehat{A_1PA_6}$ 至少覆盖给定点中的 $[\frac{k+1+5}{6}]=m+1$ 个点，这些点中每点到 P 的距离 $\le PA_1=PA_6=a_7<9$. 故给定点中至多有 $(k+1)-(m+1)=5m+r$ 个点到 P 的距离大于 9, 且这些点全在以 A_1,A_6 为端点但不含 P 的另一段弧 $\widehat{A_1BA_6}$ 上，而这段弧的长度为整个圆周长的 $\frac{5}{7}$. 由引理 2 知以这些点为端点长度大于 9 的线段至多为

$$10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1),$$

(当 $r=5$ 时，由引理 2 知，至多有 $10(m+1)^2$, 结论也成立.) 即以给定点为顶点的三角形中其三边长都大于 9 且有一个顶点为 P 的三角形个数不多于

$$S_P=10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1).$$

去掉点 P, 还剩 $k=6m+r$ 个点．设以这 k 个点为顶点且三边长都大于 9 的三角形个数为 S_k, 则由归纳假设有

$$S_k \leq 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2).$$

于是

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k+S_P \\
&\leq 20m^3+10rm^2+2r(r-1)m+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2)+10m^2+4rm+\frac{1}{2}r(r-1) \\
&= 20m^3+10(r+1)m^2+2(r+1)rm+\frac{1}{6}r(r+1)(r-1).
\end{aligned}$$

这说明 $n=k+1=6m+(r+1)$ 时结论成立.

此外，当 $r=5$ 时， $m=k+1=6(m+1)$, 上式化为 $S_{k+1}=20(m+1)^3$, 结论也成立.

引理 3 得证.

回到原题：当 $n=63=6\times 10+3$ 时，由引理 3 得

$$S \leq 20\times 10^3+10\times 10^2+2\times 3\times 2\times 10+\frac{1}{6}\times 3\times 2\times 1=23121.$$

故 $S_{\max}=23121$.

第 48 届国际数学奥林匹克中国国家队选拔考试

第二天

2007 年 4 月 1 日上午 8:00–12:30　广东 深圳

4. 求所有的函数 $f: Q^+ \to Q^+$, 使得

$$f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)}, \tag{1}$$

其中 Q^+ 表示正有理数集合. (李胜宏供题)

解：(i) 先证明 $f(1)=1$.

在 (1) 中，令 $y=1$, 记 $f(1)=a$, 则 $f(x)+a+2xf(x)=f(x)/f(x+1)$. 即

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+a}. \tag{2}$$

于是,

$$f(2)=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4},\quad f(3)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}+a}=\frac{1}{5+4a},\quad f(4)=\frac{1}{7+5a+4a^2}.$$

另一方面，在 (1) 中取 $x=y=2$, 则

$$2f(2)+8f(4)=\frac{f(4)}{f(4)}=1.$$

从而

$$\frac{1}{2}+\frac{8}{7+5a+4a^2}=1.$$

解得 $a=1$, 即 $f(1)=1$.

(ii) 用归纳法证明：

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{(n^2+2nx)f(x)+1},\quad n=1,2,\cdots \tag{3}$$

由 (2) 式,

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+1}.$$

假设

$$f(x+k)=\frac{f(x)}{(k^2+2kx)f(x)+1},$$

那么

$$f(x+k+1)=\frac{f(x+k)}{(1+2(x+k))f(x+k)+1}=\frac{f(x)}{[(k+1)^2+2(k+1)x]f(x)+1}.$$

在 (3) 中令 $x=1$, 由 $f(1)=1$, 有

$$f(1+n)=\frac{1}{n^2+2n+1}=\frac{1}{(n+1)^2},$$

即

$$f(n)=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

(iii) 再证：

$$f(\frac{1}{n})=n^2=\frac{1}{(\frac{1}{n^2})^2},\quad n=1,2,\cdots. \tag{4}$$

事实上，在 (3) 中取 $x=\frac{1}{n}$, 有

$$f(n+\frac{1}{n})=\frac{f(\frac{1}{n})}{(n^2+2)f(\frac{1}{n})+1}.$$

另一方面，在 (1) 中取 $y=\frac{1}{x}$, 有

$$f(x)+f(\frac{1}{x})+2=\frac{1}{f(x+\frac{1}{x})}.$$

从而

$$f(n)+f(\frac{1}{n})+2=\frac{1}{f(n+\frac{1}{n})}=n^2+2+\frac{1}{f(\frac{1}{n})}.$$

即

$$\frac{1}{n^2}+f(\frac{1}{n})=n^2+\frac{1}{f(\frac{1}{n})}.$$

即

$$(f(\frac{1}{n}))^2+(\frac{1}{n^2}-n^2)f(\frac{1}{n})-1=0.$$

即

$$(f(\frac{1}{n})-n^2)(f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n^2})=0.$$

所以

$$f(\frac{1}{n})=n^2=\frac{1}{(\frac{1}{n})^2}.$$

(iv) 最后证明：若 $q=\frac{n}{m}$, $(n,m)=1$, 则 $f(q)=\frac{1}{q^2}$.

对正整数 m,n, $(n,m)=1$. 在 (1) 中取 $x=n$, $y=\frac{1}{m}$, 有

$$f(\frac{1}{m})+f(n)+\frac{2n}{m}f(\frac{n}{m})=\frac{f(\frac{n}{m})}{f(n+\frac{1}{m})}.$$

在 (3) 中取 $x=\frac{1}{m}$, 有

$$f(n+\frac{1}{m})=\frac{f(\frac{1}{m})}{(n^2+\frac{2n}{m})f(\frac{1}{m})+1}=\frac{1}{n^2+2\frac{n}{m}+\frac{1}{m^2}}.$$

因此

$$\frac{1}{n^2}+m^2+\frac{2n}{m}f(\frac{n}{m})=(n+\frac{1}{m})^2 f(\frac{n}{m}).$$

即

$$\frac{1}{n^2}+m^2=(n^2+\frac{1}{m^2})f(\frac{n}{m}).$$

所以

$$f(q)=f(\frac{n}{m})=\frac{\frac{1}{n^2}+m^2}{n^2+\frac{1}{m^2}}=(\frac{m}{n})^2=\frac{1}{q^2}.$$

于是 $f(x)=\frac{1}{x^2}$. 经验证， $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 满足原方程.

故 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为原问题的解.

5. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个实数 $(n \geq 2)$ 满足

$$A = |\sum_{i=1}^{n} x_i| \neq 0,$$

$$B = \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| \neq 0.$$

求证：对平面上的任意 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 存在 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i} \alpha_i| \geq \frac{AB}{2A+B} \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|.$$

(朱华伟供题)

证明：设 $|\alpha_k| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$, $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 我们只须证明

$$\max_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n} |\sum_{i=1}^{n} x_{k_i} \alpha_i| \geq \frac{AB}{2A+B} \cdot |\alpha_k|,$$

其中 S_n 为 $1, 2, \cdots, n$ 的排列的集合.

不妨设

$$|x_n - x_1| = \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| = B,$$

$$|\alpha_n - \alpha_1| = \max_{1 \leq i < j \leq n} |\alpha_j - \alpha_i|.$$

考虑两个向量

$$\beta_1 = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_{n-1} \alpha_{n-1} + x_n \alpha_n,$$

$$\beta_2 = x_n \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_{n-1} \alpha_{n-1} + x_1 \alpha_n,$$

则

$$\begin{aligned} &\max_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n} |\sum_{i=1}^{n} x_{k_i} \alpha_i| \geq \max\{|\beta_1|, |\beta_2|\} \\ &\geq \tfrac{1}{2}(|\beta_1| + |\beta_2|) \geq \tfrac{1}{2}|\beta_2 - \beta_1| \\ &= \tfrac{1}{2}|x_1 \alpha_n + x_n \alpha_1 - x_1 \alpha_1 - x_n \alpha_n| \\ &= \tfrac{1}{2}|x_n - x_1| \cdot |\alpha_n - \alpha_1| \\ &= \tfrac{1}{2} B |\alpha_n - \alpha_1|. \end{aligned} \tag{1}$$

设 $|\alpha_n - \alpha_1| = x|\alpha_k|$, 由三角不等式易知 $0 \leq x \leq 2$, 因此 (1) 中的不等式可写为

$$\max_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n} |\sum_{i=1}^{n} x_{k_i} \alpha_i| \geq \frac{1}{2} B x |\alpha_k|. \tag{2}$$

另一方面，考虑 n 个向量

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_{n-1} + x_n\alpha_n \\
\gamma_2 &= x_2\alpha_1 + x_3\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_{n-1} + x_1\alpha_n \\
\gamma_3 &= x_3\alpha_1 + x_4\alpha_2 + \cdots + x_1\alpha_{n-1} + x_2\alpha_n \\
&\cdots\cdots \\
\gamma_n &= x_n\alpha_1 + x_1\alpha_2 + \cdots + x_{n-2}\alpha_{n-1} + x_{n-1}\alpha_n
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n} |\sum_{i=1}^n x_{k_i}\alpha_i| \geq \max_{1\leq i\leq n} |\gamma_i| \geq \tfrac{1}{n}(|\gamma_1| + |\gamma_2| + \cdots + |\gamma_n|) \\
&\geq \tfrac{1}{n}|\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n| = \tfrac{A}{n}|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \\
&= \tfrac{A}{n}|n\alpha_k - \sum_{j\neq k}(\alpha_k - \alpha_j)| \geq \tfrac{A}{n}\{n|\alpha_k| - \sum_{j\neq k}|\alpha_k - \alpha_j|\} \qquad (3) \\
&\geq \tfrac{A}{n}\{n|\alpha_k| - (n-1)|\alpha_n - \alpha_1|\} = \tfrac{A}{n}\{n|\alpha_k| - (n-1)x|\alpha_k|\} \\
&= A(1 - \tfrac{n-1}{n}x)|\alpha_k|.
\end{aligned}$$

结合 (2), (3), 可得

$$\begin{aligned}
\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n} |\sum_{i=1}^n x_{k_i}\alpha_i| &\geq \max\{\frac{Bx}{2}, A(1 - \frac{n-1}{n}x)\}|\alpha_k| \\
&\geq \frac{\frac{Bx}{2}\cdot A\cdot\frac{n-1}{n} + A(1-\frac{n-1}{n}x)\cdot\frac{B}{2}}{A\frac{n-1}{n} + \frac{B}{2}}|\alpha_k| \\
&= \frac{AB}{2A + B - \frac{2A}{n}}|\alpha_k| \geq \frac{AB}{2A+B}|\alpha_k|.
\end{aligned}$$

6. 设 n 为正整数， $A\subseteq\{1,2,3,\cdots,n\}$, A 中任两个数的最小公倍数都不超过 n. 求证：

$$|A|\le 1.9\sqrt{n}+5.$$

(陈永高供题)

证明：对于 $a\in(\sqrt{n},\sqrt{2n}]$, 有 $[a,a+1]=a(a+1)>n$. 因此

$$|A\cap(\sqrt{n},\sqrt{2n}]|\le\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}+1.$$

对于 $a\in(\sqrt{2n},\sqrt{3n}]$, 有

$$[a,a+1]=a(a+1)>n,\ \ [a+1,a+2]=(a+1)(a+2)>n,\ \ [a,a+2]\ge\frac{1}{2}a(a+2)>n.$$

因此

$$|A\cap(\sqrt{2n},\sqrt{3n}]|\le\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{n}+1.$$

同理

$$|A\cap(\sqrt{3n},2\sqrt{n}]|\le\frac{1}{4}(\sqrt{4}-\sqrt{3})\sqrt{n}+1.$$

所以

$$\begin{aligned}|A\cap[1,2\sqrt{n}]|&\le\sqrt{n}+\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}+\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{n}+\frac{1}{4}(\sqrt{4}-\sqrt{3})\sqrt{n}+3\\&=(1+\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{12}\sqrt{3})\sqrt{n}+3.\end{aligned}$$

对于正整数 k, 设 $a,b\in(\frac{n}{k+1},\frac{n}{k}]$, $a>b$, 并令 $[a,b]=as=bt$, 则

$$\frac{a}{(a,b)}s=\frac{b}{(a,b)}t.$$

由 $\frac{a}{(a,b)}$ 与 $\frac{b}{(a,b)}$ 互素知 s 为 $\frac{b}{(a,b)}$ 的倍数. 从而

$$\begin{aligned}[a,b]=as\ge\frac{ab}{(a,b)}&\ge\frac{ab}{a-b}=b+\frac{b^2}{a-b}\\&>\frac{n}{k+1}+\frac{(\frac{n}{k+1})^2}{\frac{n}{k}-\frac{n}{k+1}}=n.\end{aligned}$$

由此知

$$|A\cap(\frac{n}{k+1},\frac{n}{k}]|\le 1.$$

取正整数 T, 使 $\frac{n}{T+1}\le 2\sqrt{n}<\frac{n}{T}$, 则

$$|A\cap(2\sqrt{n},n]\le\sum_{k=1}^{T}|A\cap(\frac{n}{k+1},\frac{n}{k}]|\le T<\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

综上，有

$$|A| \leq (\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{12}\sqrt{3})\sqrt{n} + 3 < 1.9\sqrt{n} + 5.$$