第4届(1989)数学奥林匹克国家集训队选拔试题解答

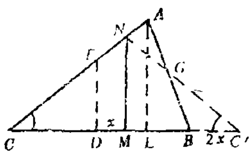
1. 边长为$\frac{3}{2}$，$\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\sqrt{2}$的三角形纸片沿垂直于长度为$\frac{3}{2}$的边的方向折叠. 问重叠部分面积的最大值是多少？

解一 不妨设$\triangle ABC$中$a=\frac{3}{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 如图，设BC中点为D，$AE\perp BC$，且沿MN折叠时重叠部分面积取到最大值. 则易知，M在D和E之间. 设C关于MN的对称点为C'，$C'N\cap AB=G$. 令$DM=x$，则$BC'=2x$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos B=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$



于是，$\angle C=45°$，

$$\sin B=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

在$\triangle BC'G$中，

$$\begin{aligned}\sin G&=\sin(\angle ABC-\angle C')\\&=\sin(\angle ABC-\angle ACB)=\sin(B-C)\\&=\sin B\cos C-\cos B\sin C\\&=\frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

由正弦定理得

$$C'G=\frac{BC'\cdot\sin B}{\sin G}=4\sqrt{2}x.$$

于是，$S_{\triangle BC'G}=\frac{1}{2}\cdot BC'\cdot C'G\cdot\sin C'=4x^2$.

而 $S_{\triangle C'MN}=S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2$，

所以，重叠部分$MBGN$的面积为

$$\begin{aligned}S_{MBGN}&=S_{\triangle C'MN}-S_{\triangle BC'G}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-4x^2\\&=-\frac{7}{2}\left(x-\frac{a}{14}\right)^2+\frac{a^2}{4}\leqslant\frac{a^2}{7}.\end{aligned}$$

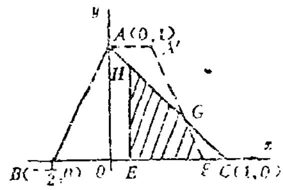
因此，当$x=\frac{a}{14}=\frac{3}{28}$时，$S_{MBGN}$取值$\frac{a^2}{7}=\frac{9}{28}$. 下面验证当$x=\frac{3}{28}$时，$M$在$D$，$E$之间. 事实上，

$$AE=AC\cdot\sin C=1.$$

故$DE=CE-CD=AE-CD=\frac{1}{4}$.

又$\frac{3}{28}<\frac{1}{4}$，所以M在D，E之间，故当$DM=\frac{3}{28}$时，重叠部分取到最大值$\frac{9}{28}$.

解二 提示：折叠线l在高AO与BC的垂直平分线之间时，面积S才可能达到最大. 如图，建立坐标系. 易知A，B，C三点的坐标. 设折叠线l交OC于E，交AC于H，重叠部分为图中四边形$EFGH$.



2. 已知$v_0=0$，$v_1=1$，

$$v_{n+1}=8v_n-v_{n-1},$$

$n=1,2,\cdots$.

求证：在数列$\{v_n\}$中没有形如$3^\alpha\cdot5^\beta$（α，β为正整数）的项.

证明 直接计算得v_n的前几项为：

0，1，8，63，496，3905，30744，…. 注意到$v_3=63$，$v_6=30744$都是3和7的倍数，且其余的项v_1，v_2，v_4，v_5都不是3或7的倍数，我们猜测

$$3|v_n\Leftrightarrow7|v_n. \tag{1}$$

下面来证明这一点. 先考虑mod3.

$\{v_n\pmod3\}$的前几项是：0，1，-1，0，1，-1，….

由于$v_{n+1}=8v_n-v_{n-1}$，所以由$v_3\equiv v_0\pmod3$，$v_4\equiv v_1\pmod3$，利用归纳法易证

$$v_{n+3}\equiv v_n\pmod3,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

即$\{v_n\pmod3\}$是以3为周期的周期数列，而它的前3项是0，1，-1. 所以，

$$3|v_n\Leftrightarrow3|n. \tag{2}$$

再考虑mod7. $\{v_n\pmod7\}$的前几项是：

0，1，1，0，-1，-1，0，1，….

仿上可证$\{v_n\pmod7\}$是以6为周期的周期数列，

它的前六项为0，1，1，0，-1，-1．所以，

$$7\mid v_n \Leftrightarrow 3\mid n. \qquad (3)$$

由（2），（3）即得（1）．这就证明了（1）的正确性．由（1）显然可知 $\{v_n\}$ 中没有形如 $3^\alpha\cdot5^\beta$（α，β 是正整数）的项．

3．求最大整数 n，使方程

$$(z+1)^n=z^n+1 \qquad (1)$$

的所有非零解都在单位圆上．

解　设 $n\geqslant5$ 使（1）的所有非零解都在单位圆上．显然，（1）可化为

$$(C_n^1\cdot z^{n-2}+C_n^2\cdot z^{n-3}+\cdots+C_n^{n-2}\cdot z+C_n^{n-1})\cdot z=0. \qquad (2)$$

所以，（2）有 $n-2$ 个非零解，设为 z_1，z_2，…，z_{n-2}．令

$$S_k=\sum_{i=1}^{n-2}z_i^k,\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$a_1=\sum_i z_i,\quad a_2=\sum_{i<j}z_iz_j,\quad a_3=\sum_{i<j<k}z_iz_jz_k.$$

则有关系式

$$S_3=a_1^3-3a_1a_2+3a_3. \qquad (3)$$

又由韦达定理可知

$$a_1=-\frac{C_n^2}{C_n^1}=-\frac{n-1}{2},$$

$$a_2=\frac{C_n^3}{C_n^1}=\frac{(n-1)(n-2)}{6},$$

$$a_3=-\frac{C_n^4}{C_n^1}=-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

将以上三式代入（3），经计算得

$$S_3=\frac{(n-1)(n-3)}{8}.$$

又由于 $|z_i|=1$，$i=1,2,\cdots,n-2$，所以 $|S_3|\leqslant n-2$．

从而，$\dfrac{(n-1)(n-3)}{8}\leqslant n-2$．

解得　$n\leqslant10$．

注意到，当 $n\geqslant5$ 为奇数时，若 z 是（1）的根，则 $-(z+1)$ 也是（1）的根，当 $z\neq0$，-1 时，$-(z+1)\neq0$，-1，由 $|-(z+1)|=|z|=1$，得在复平面上，0，z，-1 三点构成一正三角形，从而 $z=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$．由虚根成对定理（或实系数多项式的因子分解定理）得

$$(z+1)^n-z^n-1=n\cdot z\cdot(z+1)^\alpha\cdot(z^2+z+1)^\beta. \qquad (5)$$

其中，α，β 是非负整数．易验证，当 $n=7$ 时有

$$(z+1)^7-z^7-1=7z(z+1)(z^2+z+1)^2.$$

当 $n=9$ 时，（5）无解．这说明 $n\neq9$，n 可以等于7．

以下证明 $n\neq8$，10．对（1）两边求导得

$$n(z+1)^{n-1}=nz^{n-1}. \qquad (6)$$

若 z 是（1）是重根，则 z 同时是（1）和（6）的根．从而，

$$(z+1)^{n-1}=z^{n-1}=1. \qquad (7)$$

故0，1，$z+1$ 三点构成一正三角形．因此，

$$z=e^{\pm\frac{2\pi}{3}}.$$

在 $n=8$ 或10时，$z=e^{\pm\frac{2\pi}{3}}$ 不满足（7），故 $n=8$ 或10时，（1）无重根．设

$$z=\cos2\theta+i\sin2\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

则（1）化为

$$2^n\cos^n\theta=2\cos n\theta. \qquad (8)$$

由前面讨论可知，（8）有 $n-2$ 个不同根（在 $-\dfrac{\pi}{2}$ 与 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间）．由对称性，在0到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间，（8）有 $\dfrac{n-2}{2}$ 个不同的根．

若 $n=10$，则当 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$ 时，

$$2^n\cos^n\theta\geqslant2^n\cos^n\frac{\pi}{4}=(\sqrt{2})^n=2^5>2.$$

故此时（8）不成立；当 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{10}$ 时，$2\pi+\dfrac{\pi}{2}<10\theta<3\pi+\dfrac{\pi}{2}$，从而，$\cos10\theta<0$．此时（8）也不成立；当 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{10}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{5}$ 时，$\cos10\theta$ 非负上凸，$\cos^{10}\theta$ 单减下凸，故此时（8）至多有两个解；当 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{5}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\cos10\theta<0$，此时（8）不成立．综上可知，$n=10$ 时（8）在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 之间至多有2个不同解．这与前面结论矛盾，故 $n\neq10$．

若 $n=8$，当 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{16}$ 时，

$$2^n\cos^n\theta\geqslant2^n\cos^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}\right)$$

$$>\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{16}\right)^n>\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}\right)^n$$

$$=\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{8}=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{8}>2.$$

故此时（8）不成立；当$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}<\theta<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$时，$\cos 8\theta<0$，此时（8）也不成立；当$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\cos 8\theta$单增，$\cos^8\theta$单减，故（8）至多有一解．综上可知，(8) 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 之间至多有1解，与前面结论矛盾，故$n\neq 8$.

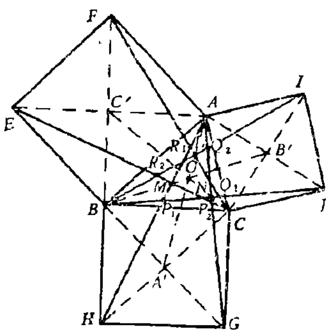
综上所述，使（1）的所有非零根都在单位圆上的最大整数n是7.

4. 已知$\triangle ABC$，在边AB，BC和CA上分别向三角形外作正方形$ABEF$，$BCGH$和$CAIJ$．设

$AH\cap BJ=P_1$，$BJ\cap CF=Q_1$，$CF\cap AH=R_1$；$AG\cap CE=P_2$，$BI\cap AG=Q_2$，$CE\cap BI=R_2$.

求证：$\triangle P_1Q_1R_1\cong\triangle P_2Q_2R_2$.

证明 设$BI\cap CF=L$，$CE\cap AH=M$，$AG\cap BJ=N$，A'，B'，C'分别为正方形$BCGH$，$CAIJ$，$ABEF$的中心，如图.



显然，将$\triangle ABI$绕A点顺时针旋转90°，恰与$\triangle AFC$重合，从而$BI\perp CF$，$\angle BLC=90°$．又A'为正方形$BCGH$的中心，故$\angle BA'C=90°$．因此，A'，B，L，C四点共圆，又$A'B=A'C$，从而它们所对圆周角相等，即$\angle BLA'=\angle CLA'=45°$.

又$\angle FLB=\angle FAB=90°$，于是，$A$，$L$，$B$，$F$四点共圆，从而，$\angle FLA=\angle FBA=45°$．所以，$\angle FLA=\angle CLA'=45°$，$A$，$L$，$A'$三点共线．即$AL$过正方形$BCGH$的中心$A'$.

同理可证，BM过正方形$CAIJ$的中心B'，CN过正方形$ABEF$的中心C'．且$\angle CMB'=\angle AMB'=45°$，$\angle ANC'=\angle BNC'=45°$.

我们可以证明AA'，BB'，CC'三线共点，设其公共点为O，其证明放在最后，我们先承认这一结论.

注意到$\angle AMB'=45°$，$\angle AME=90°$，有$\angle R_2MO=135°$．又$\angle R_2LO=\angle BLA'=45°$，有$\angle R_2MO+\angle R_2LO=180°$，于是，$L$，$R_2$，$M$，$O$四点共圆．显然，$\angle R_1LR_2=\angle R_2MR_1=90°$，因而，$L$，$R_1$，$R_2$，$M$四点共圆，从而$L$，$R_1$，$R_2$，$M$，$O$五点共圆．故$\angle R_1R_2O=\angle R_1MO=45°$，$\angle R_2R_1O=\angle R_2LO=45°$，因而，$\triangle OR_1R_2$为等腰直角三角形，$OR_1=OR_2$．同理可证：$Q_1$，$Q_2$，$L$，$O$，$N$五点共圆，$\triangle OQ_1Q_2$为等腰直角三角形，$OQ_1=OQ_2$．从而，$\triangle R_1OQ_1\cong\triangle R_2OQ_2$，故$R_1Q_1=R_2Q_2$.

同理，$P_1Q_1=P_2Q_2$，$R_1P_1=R_2P_2$，从而，$\triangle P_1Q_1R_1\cong P_2Q_2R_2$.

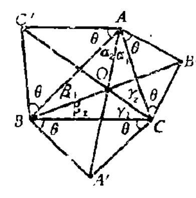
最后证明AA'，BB'，CC'三线共点．事实上，可以证明更一般的结论：

在$\triangle ABC$外作三个有相同底角的等腰三角形BCA'，CAB'，ABC'，则AA'，BB'，CC'三线共点.

下面来证明上述结论．设三等腰三角形的底角为θ，$\angle CAA'=\alpha_1$，$\angle BAA'=\alpha_2$，$\angle ABB'=\beta_1$，$\angle CBB'=\beta_2$，$\angle BCC'=\gamma_1$，$\angle ACC'=\gamma_2$，如图2所示．由正弦定理得

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\beta_1+\beta_2+\theta)}=\frac{BA'}{AA'},$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\gamma_1+\gamma_2+\theta)}=\frac{CA'}{AA'}.$$



由于$BA'=CA'$，所以，

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\sin(\gamma_1+\gamma_2+\theta)}{\sin(\beta_1+\beta_2+\theta)}.$$

同理可证

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\theta)}{\sin(\gamma_1+\gamma_1+\theta)},$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{\sin(\beta_1+\beta_2+\theta)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\theta)}.$$

三式相乘，得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1. \qquad (1)$$

设 $BB'\cap CC'=O$，$\angle BAO=\alpha_2'$，$\angle CAO=\alpha_1'$．我们要证 O 在 AA' 上，即要证 $\alpha_1=\alpha_1'$，$\alpha_2=\alpha_2'$．

由正弦定理可得

$$\frac{\sin\alpha_1'}{\sin\gamma_2}=\frac{OC}{OA},\ \frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_2}=\frac{OB}{OC},\ \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_2'}=\frac{OA}{OB}.$$

于是，$\dfrac{\sin\alpha_1'}{\sin\gamma_2}\cdot\dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_2}\cdot\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_2'}=1$，

$$\frac{\sin\alpha_1'}{\sin\alpha_2'}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1. \qquad (2)$$

由 (1)，(2) 得

$$\frac{\sin\alpha_1'}{\sin\alpha_2'}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.$$

从而，$\dfrac{\sin\alpha_1'+\sin\alpha_2'}{\sin\alpha_1'-\sin\alpha_2'}=\dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1-\sin\alpha_2}$，

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1'+\alpha_2'}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha'_1-\alpha'_2}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}. \qquad (3)$$

又显然有

$$0<\alpha_1'+\alpha_2'=\alpha_1+\alpha_2<\pi. \qquad (4)$$

所以，由 (3) 得

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1'-\alpha_2'}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}.$$

由于

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha_1'-\alpha_2'}{2}<\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以，$\alpha_1'-\alpha_2'=\alpha_1-\alpha_2$. (5)

由 (4)，(5) 即得

$$\alpha_1'=\alpha_1,\ \alpha_2'=\alpha_2.$$

这就证明了 AA'，BB'，CC' 三线共点．

5．设 $N=\{1,2,3,4,\cdots\}$．试问：是否存在函数 f：$N\to N$，使得对每一个 $n\in N$，都有

$f^{(1988)}(n)=2n$ ？并证实你的回答．

(其中 $f^{(k)}(n)=f(f^{(k-1)}(n))$，$f^{(1)}(n)=f(n)$)

解 这样的函数是存在的．我们用任意的自然数 m 来代替1988，证明满足

$$f^{(m)}(n)=2n \qquad (1)$$

的函数 f：$N\to N$ 是存在的．

首先对 (1) 进行一些讨论．由 (1) 得

$$f(2n)=f(f^{(m)}(n))=f^{(m+1)}(n)=f^{(m)}(f(n))=2f(n).$$

即 $f(2n)=2f(n)$. (2)

由 (2) 知函数 f 仅依赖于其自变量取值奇数时的函数值．至此，我们容易具体给出一个满足 (1) 式的函数 f，例如

$$f(2km+2j-1)=2km+2j+1,\ 1\leqslant j\leqslant m-1,$$
$$f(2km+2m-1)=2(2km+1),$$
$$f(2n)=2f(n),\ n=1,2,\cdots.$$

其中 k 是任意非负整数．

容易看出，对所有奇数 n，(1) 式都成立．再由 $f(2n)=2f(n)$ 可知对所有偶数 n，(1) 式也成立．从而上述定义的 f 满足 (1) 式，这就证明了 f 的存在性（显然 f 有无穷多个解)．

6．已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，$BC+AD-AB-AC=0$．求 $x=\angle BAC$ 的取值范围．

解 显然，$AD\leqslant AB$，$AD\leqslant AC$．故由 $BC+AD-AB-AC=0$，得 $BC\geqslant AC$，$BC\geqslant AB$．从而，$\angle B$，$\angle C$ 都是锐角．

若 A 为直角，则 $AB\cdot AC=AD\cdot BC$．从而，$AB+AC<BC+AD$，矛盾．若 $\angle A$ 为钝角，作 $\angle BAC'=90°$，C' 在线段 DC 上，则

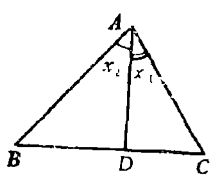
$$BC+AD=BC'+AD+C'C>AB+AC'+C'C>AB+AC.$$

矛盾．故 $\angle A$ 必为锐角．

设 $\angle BAD=x_2$，$\angle DAC=x_1$，不妨设 $x_2\geqslant x_1$．则 $x=x_1+x_2$．由 $BC+AD-AB-AC=0$ 得

$$\operatorname{tg}x_1+\operatorname{tg}x_2+1=\frac{1}{\cos x_1}+\frac{1}{\cos x_2}.$$

化简得



$$\sin x+\frac{1}{2}\cos x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

其中 $\alpha=x_2-x_1\in[0,x)$．

(1)式右边是 $\cos\dfrac{x}{2}$ 的二次函数，在 $\alpha=0$时，取最小值$2\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$；在 $\alpha=x$ 时取最大值$\dfrac{1}{2}+$

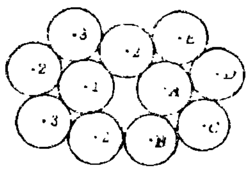
$\cos^2\frac{x}{2}$. 因此，

$$2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\leqslant\sin x+\frac{1}{2}\cos x<\frac{1}{2}+\cos^2\frac{x}{2}. \quad (2)$$

(2) 左边的不等式导出 $x\geqslant 2\arcsin\frac{3}{5}$，右边的不等式恒成立. 而对于 $\left(2\arcsin\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中的每一个 x，由于 (2) 成立，因而必有 $a\in[0, x)$ 使 (1) 成立，所以本题解为 $\left(2\arcsin\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7. 桌上互不重叠地放有1989个大小相等的圆形纸片. 问最少要使用几种不同颜色，才能保证无论这些纸片位置如何，总能给它们染色，使得任何两个相切的圆纸片都染有不同的颜色？

解 考虑如下图所示的11个圆纸片的情形：



显然，A，B，E 三圆片只能染1和3两种颜色，而且是 A 为一种，B 和 E 为另一种颜色. 若只有三种颜色，则 C 和 D 无法染上不同颜色. 所以，为了给这11个圆片染色并满足要求，至少要有四种不同颜色.

下面用归纳法证明只要有四种不同颜色，就可以按题中要求进行染色.

设当 $n=k$ 时只要四种颜色即可按要求染色. 当 $n=k+1$时，考虑这 $k+1$个圆的圆心的凸包，设 A 是此凸多边形的一个顶点，则显然，以 A 为心的圆至多与其他三个圆相切. 按归纳假设，除以 A 为心的圆片外的其他 k 个圆可用四种颜色染色. 染好之后，与圆片 A 相切的圆片至多三个，当然至多染有三种颜色. 于是只要给圆片 A 染上第四种颜色就行了.

8. 对每个自然数 n，用 $p(n)$ 表示将 n 分成自然数之和的分拆种数(仅仅加数次序不同的分拆算作同一种). 例如 $p(4)=5$ (见下表). 一个分拆的离散度是指这个分拆中的不同加数的个数，离散度的和记为 $q(n)$.

4的分拆	离散度
1+1+1+1	1
2+1+1	2
2+2	1
3+1	2
4	1
$p(4)=5$	$q(4)=7$

求证：(1) $q(n)=1+p(1)+p(2)+\cdots+p(n-1)$；

(2) $1+p(1)+p(2)+\cdots+p(n-1)\leqslant\sqrt{2n}\,p(n)$.

证明 (1) n 的含有加数 i 的分拆 $(1\leqslant i<n)$，去掉之后变成 $n-i$ 的分拆，这种对应是一一对应，因而 n 有 $p(n-i)$ 个含 i 的分拆 $(1\leqslant i\leqslant n)$ 及一个唯一的含 n 的分拆.

将 n 的离散度为 l 的分拆分为 l 个块，每个块由相同的加数组成. 对 n 的每个分拆都这样处理. 总共得到 $q(n)$ 个块. 其中全由 i 组成的块有 $p(n-i)$ 个（即含 i 的分拆数)，因此，

$q(n)=1+p(1)+p(2)+\cdots+p(n-1)$.

(2) 设 l 是 n 的一个分拆的离散度，则

$$n\geqslant 1+2+\cdots+l=\frac{1}{2}l(l+1)>\frac{1}{2}l^2.$$

所以，$l<\sqrt{2n}$.

因此，

$$q(n)=\sum l<\sqrt{2n}\cdot\sum 1=\sqrt{2n}\,p(n).$$

(其中 $\sum$ 表示对所有分拆求和)

再由 (1) 即得

$$1+p(1)+p(2)+\cdots+p(n-1)\leqslant\sqrt{2n}\,p(n).$$

(南开大学数学奥林匹克研究小组供解)