第6届数学奥林匹克国家集训队选拔试题及解答

第一天

（1991年4月17日8：00—12：30）

一、设实系数多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的根为实数$b_1,b_2,\cdots,b_n$，其中$n\geqslant 2$。

试证：对于$x>\max(b_1,\cdots,b_n)$，

$$f(x+1)\geqslant\frac{2n^2}{\dfrac{1}{x-b_1}+\dfrac{1}{x-b_2}+\cdots+\dfrac{1}{x-b_n}}.$$

二、对$i=1,2,\cdots,1991$，在圆周上任取n_i个点，标上数i，每点只标一个数．要求作一批弦使得：

（1）任两弦无公共点；

（2）每条弦的两端点所标的数不同．

若对所有可能的标数方法都能按上述要求联结所有标数的点作弦．

问：自然数$n_1,n_2\cdots,n_{1991}$应满足的充分且必要条件是什么？

三、在平面上任给5个点，其中任三点不共线，任四点不共圆．若一圆过其中三点，且另两点分别在该圆内、外，则称为“好圆”．

记好圆个数为n，试求n的一切值．

第二天

（1991年4月18日8：00—12：30）

四、在圆心为O的单位圆上顺次取5点$A_1,\cdots,A_5$；P为该圆内一点，记线段A_iA_{i+2}与线段PA_{i+1}的交点为Q_i，$i=1,\cdots,5$，其中$A_6=A_1$，$A_7=A_2$，$OQ_i=d_i$，$i=1,\cdots,5$．

试求乘积 $A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5$．

五．设函数f对非负整数有定义，且满足条件：

$$f(0)=0,\ f(1)=1,$$

$$f(n+2)=23f(n+1)+f(n),$$

$n=0,1,2,\cdots$．

试证：对任意$m\in N$，都存在$d\in N$，使得$m\mid f(f(n))\Longleftrightarrow d\mid n$．

六、将凸多面体的每一条棱都染成红、黄两色之一．两边异色的面角称为奇异面角．某顶点A处的奇异面角数称为该顶点的奇异度，记为S_A．求证：总存在两个顶点B和C，使得$S_B+S_C\leqslant 4$．

解答

一、由于$n\geqslant 2$，从而

$$n^2-2n(n-1)\leqslant 0.$$

于是，对任何$t>0$，有

$$\frac{n(n-1)}{2}t^2-nt+1\geqslant 0.$$

由此得 $(1+t)^n\geqslant 1+nt+\dfrac{n(n-1)}{2}t^2\geqslant 2nt.$ （1）

当$x>\max(b_1,b_2,\cdots,b_n)$时，由于$f(x)$是首项系数为1的多项式，从而

$$f(x+1)=(1+x-b_1)\cdot(1+x-b_2)\cdot\cdots\cdot(1+x-b_n)>0.$$

由均值不等式可知

$$f(x+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}\geqslant nf(x+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}}=n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}}.$$

由（1）可得 $\dfrac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}\geqslant 2n$．

所以，$f(x+1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}\geqslant 2n^2$．

从而原不等式成立。

二、如果按题意要求可以连结所有标数的点作弦，由于任意两个标数的点对应且仅对应一条弦，所以 $n_1+n_2+\cdots+n_{1991}$ 必是偶数。又对任意 $i\in\{1,2,\cdots,1991\}$，在标数为 i 的 n 个点中，每一点必对应一条所作的弦使得该点为这条弦的一个端点，而另一个端点标数不是 i，从而

$$n_i\leqslant n_1+\cdots+n_{i-1}+n_{i+1}+\cdots+n_{1991}.$$

于是得到必要条件

$$\begin{cases} n_1+\cdots+n_{1991}=2m, m\in N, \\ n_i\leqslant m, i=1,2,\cdots,1991. \end{cases} \quad (*)$$

以下证（*）也是充分条件。实际上可以用归纳法证明。如果非负整数 $n_1,n_2,\cdots,n_{1991}$ 满足（*），则可按题意要求连结所有标数的点作弦。

当 $m=1$ 时，则存在 $i\neq j$，使得

$n_i=n_j=1$，$n_k=0$，对任意的 $k\neq i,j$。即在圆上只取两个点且它们标不同的数，只要把这两点连起来就可以了，于是命题成立。

设 $m=k(k\in N, k\geqslant 1)$ 时命题成立。考虑 $m=k+1$ 的情况。不妨设 $n_1=\max\{n_1, n_2,\cdots,n_{1991}\}$。由（*），

$$0<n_1\leqslant k+1<2(k+1),$$

所以存在标数为 1 的点 A 和标数不是 1 的点 B（不妨设 B 的标数为 2），使得 A,B 相邻，即由 A，B 所决定的两个圆弧，必有一个其内部没有标数的点。连结 A，B 作弦，显然连结其余任两个标数的点作弦都与弦 AB 无公共点。令

$$n_1'=n_1-1,\ n_2'=n_2-1,\ n_3'=n_3,$$
$$\cdots,\ n_{1991}'=n_{1991}.$$

显然，$n_1',\cdots,n_{1991}'$ 都是非负整数，且

$$n_1'+\cdots+n_{1991}'=2k.$$

可以证明对于任何 $i\in\{1,2,\cdots,1991\}$，有 $n_i'\leqslant k$。如不然，存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,1991\}$，使得 $n_{i_0}'\geqslant k+1$。由于 $n_1'=n_1-1\leqslant k$，$n_2'=n_2-1\leqslant k$，从而 $i^0\neq 1,2$，于是

$$n_{i_0}'=n_{i_0}\geqslant k+1.$$

由（*）可知 $n_{i_0}=k+1$。又 $n_1\geqslant n_{i_0}$，所以 $n_1=k+1$。由于 $n_2>0$，从而

$$n_1+n_2+\cdots+n_{1991}\geqslant 2(k+1)+1.$$

矛盾。这样就证明了 n_1'，n_2'，$\cdots$，n_{1991}' 满足（*）且 $k=m$。由归纳假设，除去 A，B，其余的点可按题要求连结所有标数的点作弦，而且这些弦都与 AB 弦无公共点，所以命题对 $m=k+1$ 成立。

三、在 5 点中任取两点 A,B 并作过 A，B 的直线。若另外三点 C,D,E 在直线 AB 的同侧，则考察 $\angle ACB$，$\angle ADB$，$\angle AEB$，不妨设 $\angle ACB<\angle ADB<\angle AEB$。过 A，B，D 三点作一个圆，则 C 在圆外而 E 在圆内，即圆 ABD 为好圆，且过 A,B 两点的好圆只此一个。若 C,D，E 分别在直线 AB 的两侧，不妨设 C,D 在 AB 上方而 E 在下方，且设 $\angle ACB<\angle ADB$。如果 $\angle AEB+\angle ADB<180°$，则圆 ACB 是唯一好圆；如果 $\angle AEB+\angle ACB>180°$，则圆 ADB 是唯一好圆；如果 $\angle AEB+\angle ACB<180°$，$\angle AEB+\angle ADB>180°$，则圆 ACB，ADB，AEB 都是好圆。这就是说，过两个固定点的好圆或者一个，或者三个。

由 5 点共可组成10个点对，过每个点对至少有一个好圆，故至少有10个好圆（包括重复计数）。每个好圆恰过 3 个点对，所以至少有 4 个不同的好圆，即 $n\geqslant 4$。

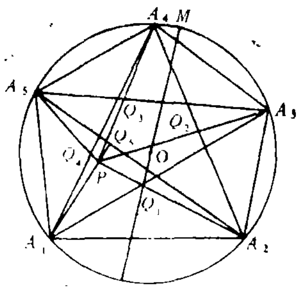
将 5 点中每两点间连一条线段，则每条线段或是一个好圆的弦，或是 3 个好圆的公共弦。如果至少有 5 个好圆，则它们至少有15条弦。由于总共只有10条线段且每条线段在上述计数中的贡献为 1 或 3，10个奇数的和为偶数，不可能为15，故至少有 6 个不同的

好圆．这时贡献为3的线段至少有4条．4条线段有8个端点，故其中必有两条线段有一个公共端点，不妨设为AB，AC．于是ABD，ACD都是好圆，因此过A，D的好圆至少两个，当然必有三个．同理，过A，E的好圆也有三个．

设AB，AC，AD，AE中最短的一条是AB，于是$\angle ACB$，$\angle ADB$，$\angle AEB$都是锐角．若C，D，E在直线AB同侧，则过A，B的好圆只有一个，所以C，D，E必分别在直线AB的两侧．这时，由于$\angle ACB$，$\angle ADB$，$\angle AEB$中任何两角之和都小于180°，所以过A，B的好圆不能有三个，矛盾．

综上可知，好圆的数目n一定为4．

四、连结A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5A_1，并作过Q_1的直径MN．于是，由相交弦定理有



$$A_1Q_1\cdot Q_1A_3=MQ_1\cdot Q_1N=1-d_1^2,$$

同理有

$$A_iQ_i\cdot Q_iA_{i+2}=1-d_i^2,\quad i=2,3,4,5.$$

从而有

$$\prod_{i=1}^{5}(A_iQ_i\cdot Q_iA_{i+2})=\prod_{i=1}^{5}(1-d_i^2), \qquad (1)$$

此外，由于

$$A_iQ_i:Q_iA_{i+2}$$
$$=S_{\triangle PA_iA_{i+1}}:S_{\triangle PA_{i+1}A_{i+2}},$$

$i=1,2,\cdots,5$，故有

$$A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5$$
$$=Q_1A_3\cdot Q_2A_4\cdot\cdots\cdot Q_5A_2. \qquad (2)$$

由（1）和（2）即得

$$A_1Q_1\cdot A_2Q_2\cdot\cdots\cdot A_5Q_5$$
$$=\left[\prod_{i=1}^{5}(1-d_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

五、首先证对任意$m\in N$，存在$n\in N$，使得$m|f(n)$．

事实上，不妨设$m>1$．令$g(n)$是$f(n)$除以m所得的余数，于是

$g(n)\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，且$g(0)=0$，$g(1)=1$，

$$g(n+2)\equiv 23g(n+1)+g(n)\pmod m,$$
$$n=0,1,2,\cdots. \qquad (1)$$

考虑映射T：

$$(f(n),f(n+1))\xrightarrow{T}(g(n),g(n+1))$$

由于$(g(n),g(n+1))$仅有m^2个不同取值，于是存在n与n'满足$1\leqslant n<n'\leqslant m^2+1$，且$(g(n),g(n+1))=(g(n'),g(n'+1))$．

即
$$\begin{cases}g(n+1)=g(n'+1),\\ g(n)=g(n').\end{cases}$$

由（1）得　$g(n-1)=g(n'-1)$．

递推可知　$g(0)=g(n'-n)$．

由于　$g(0)=0$，所以　$g(n'-n)=0$．

即　$m|f(n'-n)$，$n'-n\in N$．

令　$c=\min\{n;n\in N,m|f(n)\}$，以下证

$$m|f(n)\Leftrightarrow c|n. \qquad (2)$$

当$m=1$时，由$c=1$知（2）成立．设$m>1$，由于$f(1)=1$，所以$c>1$．从而有

$m|f(0)=0$，$m|f(c)$，但$m\nmid f(n)$，对任意$n\in N$，$n<c$．　（3）

为用（3）证明（2），先用归纳法证明如下命题：

设$k\in N$且$m|f(k)$，则

$$f(k+t)\equiv(-1)^{t+1}f(k-t)\pmod m,$$

对任意$t\in N$且$t\leqslant k$．

当$t=1$时，由于$f(k)\equiv 0\pmod m$，从而由递推公式可知　$f(k+1)=23f(k)+f(k-1)$
$\equiv f(k-1)\pmod m$，

即（4）成立．设$1\leqslant t\leqslant s$时（4）成立，其中$s\in N$且$s<k$．由递推公式及归纳假设知

$$f(k+s+1)$$
$$=23f(k+s)+f(k+s-1)$$
$$\equiv(-1)^{s+1}23f(k-s)+(-1)^{s}f(k-(s-1))(\mathrm{mod}\, m).$$

又 $(-1)^{s+1}23f(k-s)$
$$+(-1)^{s}f(k-(s-1))$$
$$=(-1)^{s}[f(k-(s-1))-23f(k-s)]$$
$$=(-1)^{s+2}f(k-(s+1)),$$

所以 $f(k+s+1)$
$$\equiv(-1)^{s+2}f(k-(s+1))(\mathrm{mod}\, m).$$

即当 $t=s+1$时(4)成立

综合(3)和(4)即可得(2). 以下利用(2)证明所要的结果. 事实上, 对任意$m\in N$, 由(2)知存在$c\in N$, 使得
$$m\mid f(n)\Longleftrightarrow c\mid n.$$
对于$c\in N$, 再由(2)可知存在$d\in N$, 使得
$$c\mid f(n)\Longleftrightarrow d\mid n.$$
于是 $m\mid f(f(n))\Longleftrightarrow c\mid f(n)\Longleftrightarrow d\mid n.$

六、将凸多面体的红色棱标上数1, 黄色棱标上数0. 定义任意一个面角的度数为该面角两边标数之和再模2所得余数0或者1. 于是一个面角为奇异面角的充分必要条件为其度数是1. 任取一顶点A, 由于在计算A处所有面角度数之和时, 从A出发的每一条棱的标数都用了两次, 从而A处所有面角度数之和为偶数. 于是顶点A的奇异度S_A为偶数. 同理可证任一面所包含的奇异面角数也是偶数.

假设凸多面体有k个顶点$A_1, A_2, \cdots, A_k$, j个面$M_1, M_2, \cdots, M_j$, t条棱. 设面M_i所包含的棱数为t_i($i=1,2,\cdots,j$). 显然
$$\sum_{i=1}^{j} t_i=2t.$$
令M_i所含的奇异面角数为$\widetilde{S}_{M_i}$, 由于它是偶数, 从而
$$\widetilde{S}_{M_i}\leqslant 2\left[\frac{t_i}{2}\right].$$
又$t_i\geqslant 3$, 于是得
$$\widetilde{S}_{M_i}\leqslant 2\left[\frac{t_i}{2}\right]\leqslant 2t_i-4.$$
由此可得凸多面体所有奇异面角数应满足
$$\sum_{i=1}^{j}\widetilde{S}_{M_i}\leqslant 2\sum_{i=1}^{j}t_i-4j$$
$$=4(t-j).$$
由Euler公式可得 $t-j=k-2$, 于是有
$$\sum_{i=1}^{j}\widetilde{S}_{M_i}\leqslant 4k-8.$$
所以 $\sum_{i=1}^{k}S_{A_i}=\sum_{i=1}^{j}\widetilde{S}_{M_i}\leqslant 4k-8.$

又 $S_{A_1}, S_{A_2}, \cdots, S_{A_k}$都是偶数, 从而必存在$i, j$, 使得 $S_{A_i}\leqslant 2$, $S_{A_j}\leqslant 2$, 即
$$S_{A_i}+S_{A_j}\leqslant 4.$$

(南开大学李成章　供解)