

05

第五讲 中考类比探究之旋转结构

九年级数学

平行线教育线上课程
2020年

PARALLEL EDUCATION

新的数学方法和概念，
常常比解决数学问题本身更重要。

—— 华罗庚

第五讲 中考类比探究之旋转结构

智慧导航

旋转常考结构—“手拉手”



旋转的共生结构：由一组旋转型的全等（或相似），可得到另一组旋转型的全等（或相似）.

平行线
Parallel Education

智慧基石

例1

1. 已知: $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 都是等边三角形, M 是 BC 与 EF 的中点, 连接 AD , BE .

(1) 如图 1, 当 EF 与 BC 在同一条直线上时, 直接写出 AD 与 BE 的数量关系和位置关系;

(2) $\triangle ABC$ 固定不动, 将图 1 中的 $\triangle DEF$ 绕点 M 顺时针旋转 α ($0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$) 角, 如图 2, 判断 (1) 中的结论是否仍然成立, 若成立, 请加以证明; 若不成立, 说明理由;

(3) $\triangle ABC$ 固定不动, 将图 1 中的 $\triangle DEF$ 绕点 M 旋转 α ($0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$) 角, 作 $DH \perp BC$ 于点 H . 设 $BH = x$, 线段 AB , BE , ED , DA 所围成的图形面积为 S . 当 $AB = 6$, $DE = 2$ 时, 求 S 关于 x 的函数关系式, 并写出相应的 x 的取值范围.

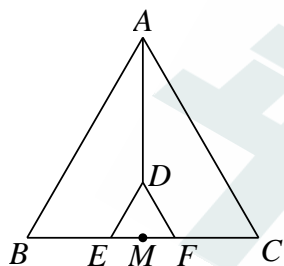


图1

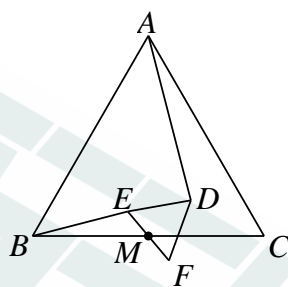


图2

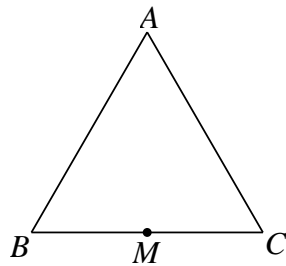


图3

例2

1. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=2$, $\angle A=30^\circ$, 点 E, F 分别是线段 BC, AC 的中点, 连结 EF .

(1) 线段 BE 与 AF 的位置关系是_____ , $\frac{AF}{BE} =$ _____ .

(2) 如图2, 当 $\triangle CEF$ 绕点 C 顺时针旋转 $\alpha(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ 时, 连结 AF, BE , (1)中的结论是否仍然成立. 如果成立, 请证明; 如果不成立, 请说明理由.

(3) 如图3, 当 $\triangle CEF$ 绕点 C 顺时针旋转 $\alpha(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ 时, 延长 FC 交 AB 于点 D , 如果 $AD=6-2\sqrt{3}$, 求旋转角 α 的度数.

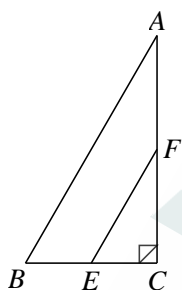


图1

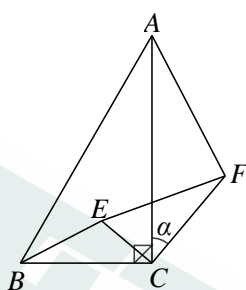


图2

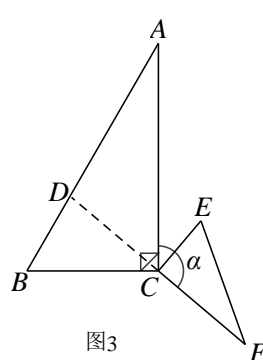


图3

例3

1. 如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点, 过点 E 作 AB 的垂线, 过点 F 作 CD 的垂线, 两垂线交于点 G , 连接 AG 、 BG 、 CG 、 DG , 且 $\angle AGD = \angle BGC$.

(1) 求证: $AD = BC$;

(2) 求证: $\triangle AGD \sim \triangle EGF$;

(3) 如图2, 若 AD 、 BC 所在直线互相垂直, 求 $\frac{AD}{EF}$ 的值.

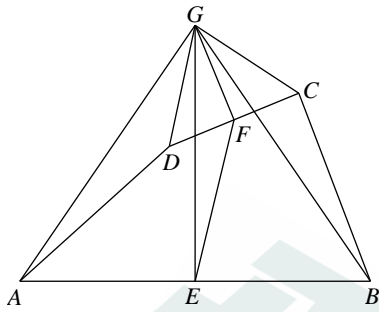


图1

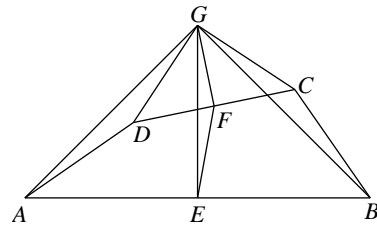


图2

例4

1. 【操作发现】

(1) 如图1, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ADE$, 连接 BD , 则 $\angle ABD$ 的度数是_____.

【类比探究】

(2) 如图2, 在等腰直角三角形 ABC 内取一点 P , 使 $\angle APB=135^\circ$, 将 $\triangle ABP$ 绕顶点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ACP'$, 连接 PP' . 请猜想 BP 与 CP' 有怎样的位置关系, 并说明理由.

【解决问题】

(3) 如图3, 在等腰直角三角形 ABC 内任取一点 P , 连接 PA 、 PB 、 PC . 求证:
 $PC + \sqrt{2}PA > PB$.

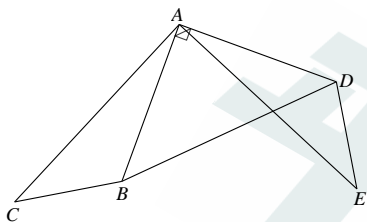


图1

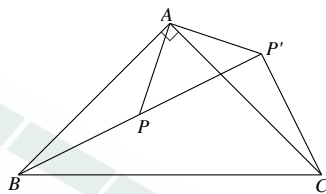


图2

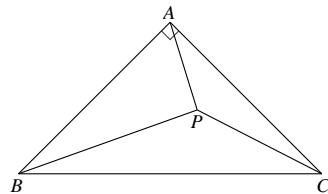


图3

例5

1. 问题情境：如图1， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， F 是 AC 边上的一个动点（点 F 与 A, C 不重合），以 CF 为一边在等腰直角三角形外作正方形 $CDEF$ ，连接 BF ， AD 。

探究展示：

- (1) ①猜想图1中线段 BF 、 AD 的数量关系及所在直线的位置关系，直接写出结论；
②将图1中的正方形 $CDEF$ ，绕着点 C 按顺时针方向旋转任意角度 α ，得到如图2的情形，图2中 BF 交 AC 于点 H ，交 AD 于点 O ，请你判断①中得到的结论是否仍然成立，并选取图2证明你的判断。

变式练习：

- (2)将原题中的等腰直角三角形 ABC 改为直角三角形 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，正方形 $CDEF$ 改为矩形 $CDEF$ ，如图3，且 $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， $CD = \frac{4}{3}$ ， $CF = 1$ ， BF 交 AC 于点 H ，交 AD 于点 O ，连接 BD 、 AF ，请判断线段 BF 、 AD 所在直线的位置关系，并证明你的判断。

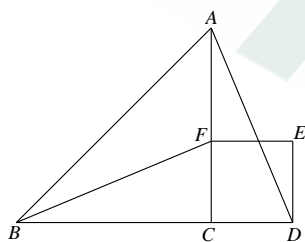


图1

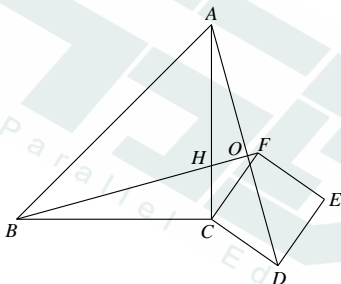


图2

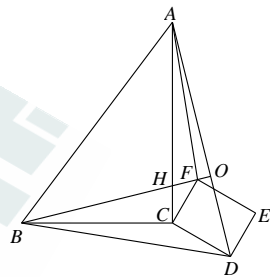


图3

智慧高峰

1. (1) 操作发现:

如图①, 在正方形 $ABCD$ 中, 过 A 点有直线 AP , 点 B 关于 AP 的对称点为 E , 连接 DE 交 AP 于点 F , 当 $\angle BAP=20^\circ$ 时, 则 $\angle AFD=$ _____ $^\circ$; 当 $\angle BAP=\alpha(0<\alpha<45^\circ)$ 时, 则 $\angle AFD=$ _____ $^\circ$; 猜想线段 DF, EF, AF 之间的数量关系: $DF-EF=$ _____ AF (填系数);

(2) 数学思考:

如图②, 若将“正方形 $ABCD$ 中”改成“菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD=120^\circ$ ”, 其他条件不变, 则 $\angle AFD=$ _____ $^\circ$; 线段 DF, EF, AF 之间的数量关系是否发生改变, 若发生改变, 请写出数量关系并说明理由;

(3) 类比探究:

如图③, 若将“正方形 $ABCD$ 中”改成“菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD=\alpha$ ”, 其他条件不变, 则 $\angle AFD=$ _____ $^\circ$; 请直接写出线段 DF, EF, AF 之间的数量关系: _____.

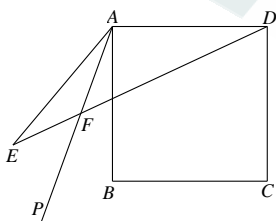


图1

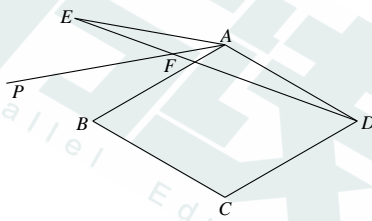


图2

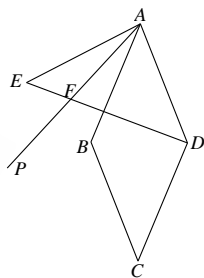


图3

智慧攻略

解决类比探究问题的核心思想是类比（照搬），类比上一问的思路方法；探究变化过程中的不变特征（如常见结构），是类比的前提。

处理思路：

“等线段，共顶点”考虑旋转；

确定被旋转图象，通过旋转图形全等或相似的关系转移边角或边之比的关系；

研究新图形的出现，结合勾股定理或者等腰三角形的几何性质求证。



智慧磨炼

1. 如图1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 2AB = 8$, 点 D, E 分别是边 BC, AC 的中点, 连接 DE . 将 $\triangle EDC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转, 记旋转角为 α .

(1) 问题发现

- ①当 $\alpha = 0^\circ$ 时, $\frac{AE}{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$; ②当 $\alpha = 180^\circ$ 时, $\frac{AE}{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 拓展探究

试判断: 当 $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ 时, $\frac{AE}{BD}$ 的大小有无变化? 请仅就图2的情形给出证明.

(3) 问题解决

当 $\triangle EDC$ 旋转至 A, D, E 三点共线时, 直接写出线段 BD 的长.

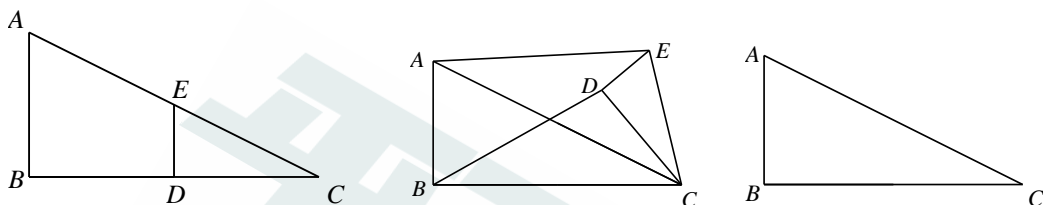


图1

图2

备用图

2. 问题发现:

如图1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $\angle CAB = \angle CDE = 45^\circ$, 点 D 是线段 AB 上一动点, 连接 BE .

填空:

① $\frac{BE}{AD}$ 的值为_____; ② $\angle DBE$ 的度数为_____.

类比探究:

如图2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $\angle CAB = \angle CDE = 60^\circ$, 点 D 是线段 AB 上一动点, 连接 BE . 请判断 $\frac{BE}{AD}$ 的值及 $\angle DBE$ 的度数, 并说明理由;

拓展延伸:

如图3, 在(2)的条件下, 将点 D 改为直线 AB 上一动点, 其余条件不变, 取线段 DE 的中点 M , 连接 BM 、 CM , 若 $AC=2$, 则当 $\triangle CBM$ 是直角三角形时, 线段 BE 的长是多少? 请直接写出答案.

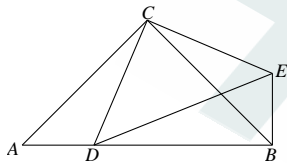


图1

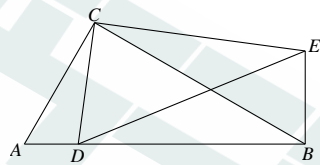


图2

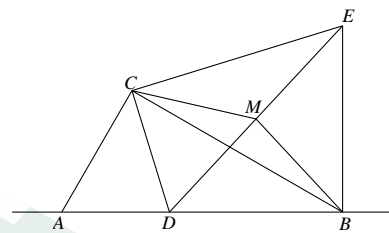


图3