

06

第六讲 中考类比探究之直角结构

九年级数学

平行线教育线上课程

2020年

PARALLEL EDUCATION

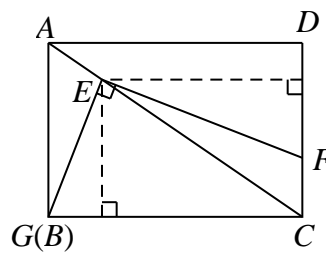
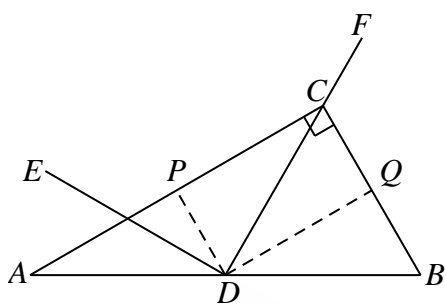
**新的数学方法和概念，
常常比解决数学问题本身更重要。**

—— 华罗庚

第六讲 中考类比探究之直角结构

智慧导航

斜直角结构



Parallel Education

智慧基石

例1

1. (1) 问题发现

如图1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=2$, $AC=4$, 点 D 为 BC 的中点, 过点 D 作射线 $DE \perp DF$, 分别交 AB, AC 于点 E, F , 当 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ 时, $\frac{DE}{DF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 类比探究

若 $\angle EDF$ 绕着点 D 旋转到图2的位置, (1) 中其他条件不变. $\frac{DE}{DF} = \underline{\hspace{2cm}}$; 若改变点 D 的位置, 当 $\frac{CD}{BD} = \frac{a}{b}$ 时, 求 $\frac{DE}{DF}$ 的值, 请就图3的情形写出解答过程;

(3) 问题解决

如图3, $AB=2$, $AC=4$, 连接 EF , 当 $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\triangle DEF$ 为等腰直角三角形; 当 $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

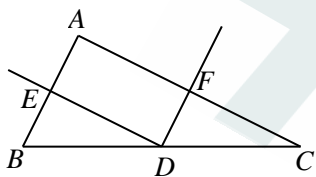


图1

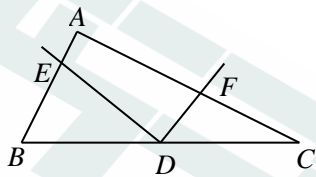


图2

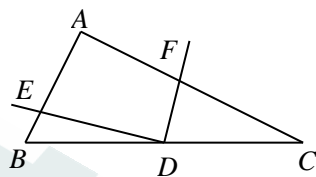


图3

例2

1. 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, BF 为斜边上的高, 在射线 AB 上有点 D , 连接 DF , 作 $\angle DFE=90^\circ$, FE 交射线 BC 于点 E .

【问题发现】如图 1 所示, 如果 $AB=CB$, 则 DF 与 EF 的数量关系为 DF _____ EF (选填 $>$, $<$, $=$)

【类比探究】如图 2 所示, 如果改变 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中两直角边的比例, 使得 $AB=2BC$, 则 DF 与 EF 还存在①中的关系吗?

【拓展延伸】如图 3 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 如果已知 $BC=\sqrt{3}$, $AB=3$, $EF=\sqrt{2}$, 试求 BD 的长.

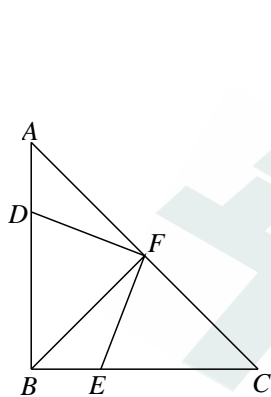


图1

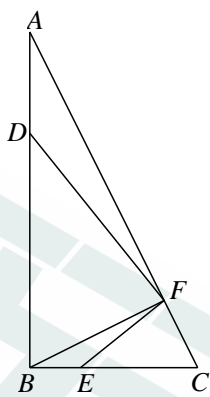


图2

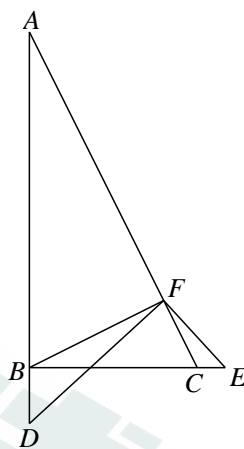


图3

例3

1. 操作发现:

(1) 如图 1, 将直角三角板的直角顶点放在正方形 $ABCD$ 上, 使直角顶点 E 与正方形 $ABCD$ 的顶点 D 重合, 直角的一边交 CB 于点 F , 将另一边交 BA 的延长线于点 G . 请你直接回答 EF 和 EG 的数量关系:

类比探究

(2) 如图 2, 当三角板的直角顶点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上运动时, 其余条件不变, (1) 中的结论还成立吗? 并说明理由:

拓展延伸

(3) 如图 3, 将“正方形 $ABCD$ ”改成“矩形 $ABCD$ ”, 当直角顶点移动到图中所示位置时, 若 $AD=2$, $DC=3$, 求 $\frac{EF}{EG}$ 的值.

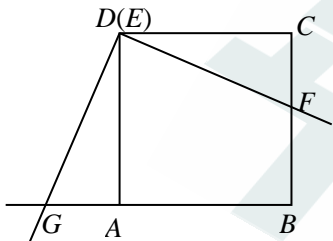


图1

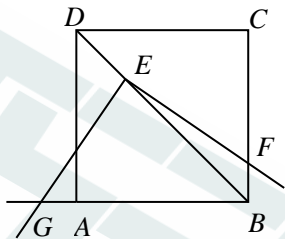


图2

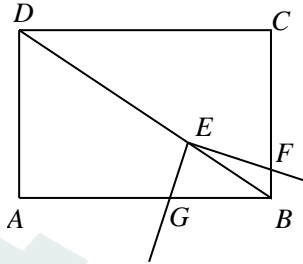


图3

例4

1. 如图1, $AO \perp BO$ 且 $AO = BO$, 由点 A 和点 B 向过 O 点的直线作垂线, 可以构成如图两个全等三角形; 当这条直线绕点 O 旋转到直角内部时, 仍然能构造出全等三角形! 相信同学们认识了这个“模型”的特点后, 一定能解决下面的问题:

(1) 如图3, $AD \perp CD$, $AD \perp AB$, 若 $AB = 4$, $CD = 6$, $BC = BE$ (可以借助图中的辅助线, 也可以根据自己所悟, 另外画辅助线), 你得到阴影部分的面积是_____.

(2) 如图4, 点 D 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的平分线上任一点, 连结 DA , 作 $DE \perp DA$ 交另一边 BC 于点 E , 若 DB 长是 $4\sqrt{2}$, $AD = AE$, 则四边形 $ABED$ 的面积值是_____.

(3) 如图5, 点 B 是两个等腰直角三角形的公共顶点, 连结 DC 和 AF , 若 $BE \perp CD$ 交 CD 于 E 点, 延长 EB 交 AF 于 G 点, 试证明 $AG = GF$.

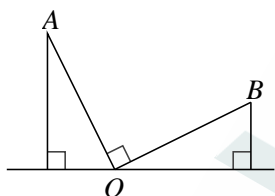


图1

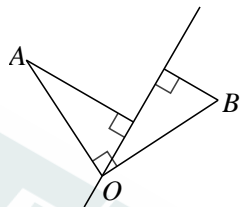


图2

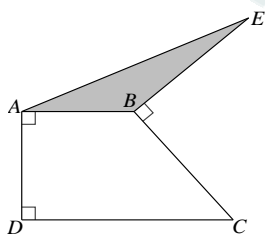


图3

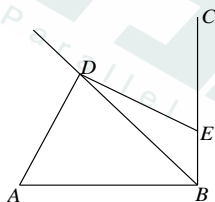


图4

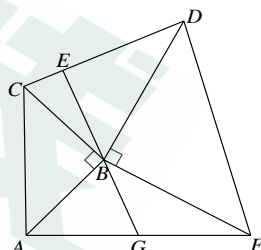


图5

智慧高峰

1. (1) 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=5$, $\angle MPN=90^\circ$, 且 $\angle MPN$ 的直角顶点在 BC 边上, $BP=1$.

①特殊情形: 若 MP 过点 A , NP 过点 D , 则 $\frac{PA}{PD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

②类比探究: 如图 2, 将 $\angle MPN$ 绕点 P 按逆时针方向旋转, 使 PM 交 AB 边于点 E , PN 交 AD 边于点 F , 当点 E 与点 B 重合时, 停止旋转. 在旋转过程中, $\frac{PE}{PF}$ 的值是否为定值? 若是, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.

(2) 拓展探究: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=BC=2$, $AD \perp AB$, $\odot A$ 的半径为 1, 点 E 是 $\odot A$ 上一动点, $CF \perp CE$ 交 AD 于点 F . 请直接写出当 $\triangle AEB$ 为直角三角形时 $\frac{EC}{FC}$ 的值.

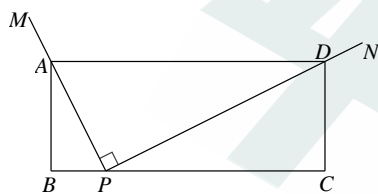


图1

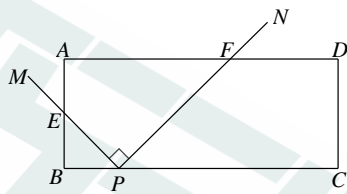


图2

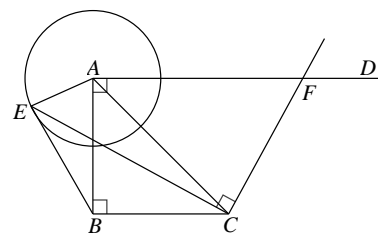


图3

智慧攻略

看到斜直角，构造一线三等角

智慧磨炼

1. 情景观察

将矩形 $ABCD$ 纸片沿对角线 AC 剪开，得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'C'D$ ，如图1所示，将 $\triangle A'C'D$ 的顶点 A' 与点 A 重合，并绕点 A 按逆时针方向旋转，使点 D 、 A (A')、 B 在同一条直线上，如图2所示，观察图2可知，与 BC 相等的线段是_____， $\angle CAC' =$ _____.

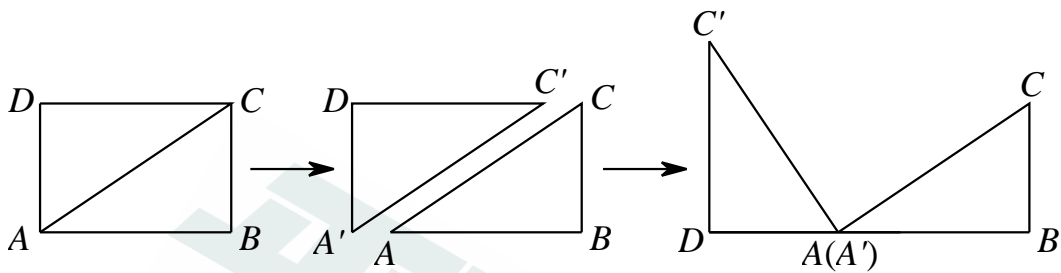


图1

图2

拓展探究

(1) 如图3，在 $\triangle ABC$ 中， $AG \perp BC$ 于点 G ，以 A 为直角顶点，分别以 AB 、 AC 为直角边向 $\triangle ABC$ 外做等腰 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和等腰 $\text{Rt}\triangle ACF$ ，过点 E 、 F 作射线 GA 的垂线，垂足分别为 P 、 Q ，试探究 EP 与 FQ 之间的数量关系，并证明你的结论.

(2) 如图4，在 $\triangle ABC$ 中， $AG \perp BC$ 于点 G ，分别以 AB 、 AC 为一边向 $\triangle ABC$ 外作矩形 $ABME$ 和矩形 $ACNF$ ，射线 GA 交 EP 于点 H ，若 $AB = kAE$ ， $AC = kAF$ ，试探究 HE 与 HF 之间的数量关系，并说明理由.

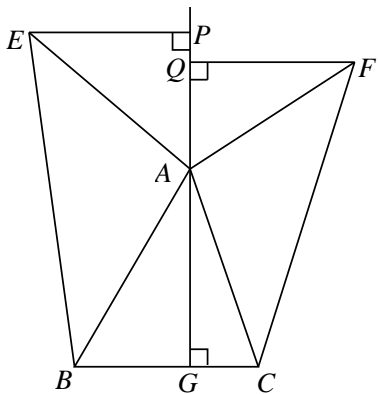


图3

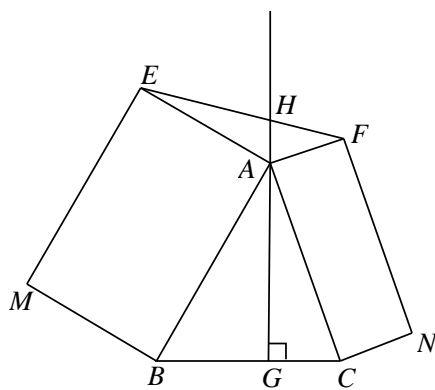


图4