04

第四讲

初中几何经典结构-大角夹半角

八年级数学

平行线教育线上课程

2020 年

PARALLEL EDUCATION

新的数学方法和概念，

常常比解决数学问题本身更重要。

——华罗庚

第四讲 初中几何经典结构-大角夹半角

智慧导航

1．大角夹半角结构介绍

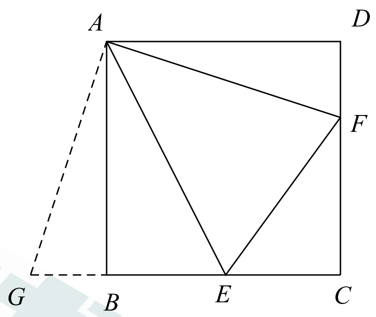
（1）在一个角的内部有这个角的半角

（2）大角和半角共顶点

（3）在公共顶点处有等线段

2．常见处理方法

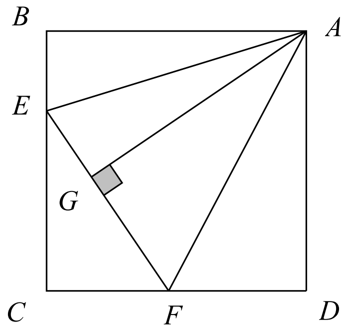
旋转使两个小角拼到一起，等于半角，构造全等



智慧基石

例 1

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 的 BC、CD 边上取 E、F 两点，使 $\angle EAF=45°$， $AG\perp EF$ 于点 G，求证： $AG=AB$



例 2

1. 已知，如图 1，四边形 $ABCD$ 是正方形， E 、F 分别在边 BC 、CD 上，且 $\angle EAF=45°$，我们把这种模型称为“半角模型”，在解决“半角模型”问题时，旋转是一种常用的方法.

（1）在图 1 中，连接 EF，为了证明结论“ $EF=BE+DF$ ”，小明将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 后解答了这个问题，请按小明的思路写出证明过程；

（2）如图 2，当 $\angle EAF$ 的两边分别与 CB 、DC 的延长线交于点 E 、F，连接 EF，试探究线段 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系，并证明.

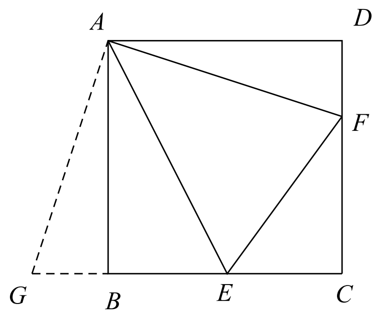


图 1

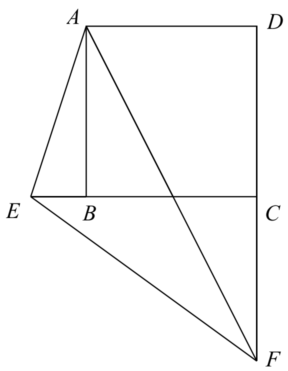
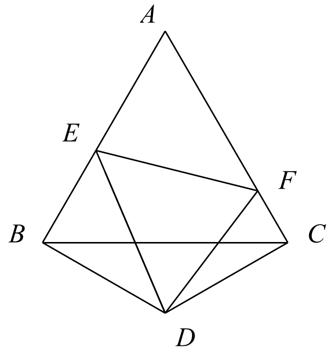


图 2

例 3

1. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 是$\triangle ABC$ 外一点，$DB=DC$ 且 $\angle BDC=120°$，$\angle EDF=60°$，DE、DF 分别交 AB、AC 于点 E、F.

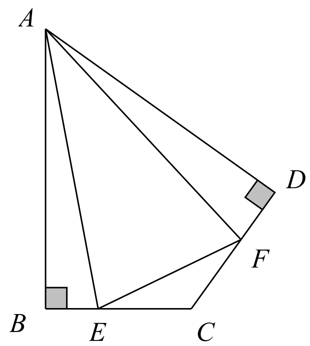
求证：$EF=BE+CF$



练一练

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B=\angle D=90°$，E、F 分别是边 BC、CD 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$.

求证：$EF=BE+FD$



例 4

1. 探究发现：如图 1，$\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 为 AB 边上的一点，$\angle DCE = 30°$，$\angle DCF = 60°$ 且 $CF = CD$．

（1）求 $\angle EAF$ 的度数；

（2）DE 与 EF 相等吗？请说明理由

类比探究：如图 2，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle ACB = 90°$，点 D 为 AB 边上的一点，$\angle DCE = 45°$，$CF = CD$，$CF \perp CD$，请直接写出下列结果：

（1）$\angle EAF$ 的度数；

（2）线段 AE，ED，DB 之间的数量关系．

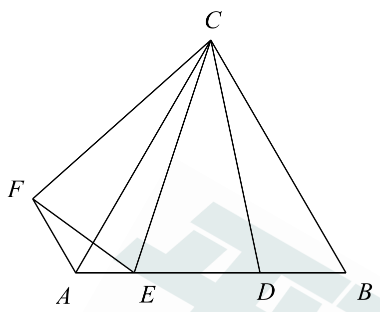


图 1

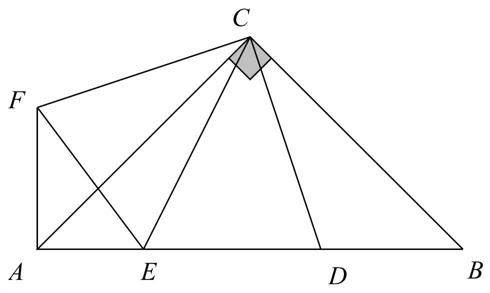


图 2

例 5

1. “半角型”问题探究：

（1）如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=120^\circ$，$\angle B=\angle ADC=90^\circ$，且 $\angle EAF=60^\circ$，探究图中线段 BE，EF，FD 之间的数量关系.

小明同学的方法是将 ΔABE 绕点 A 逆时针旋转 120° 到 ΔADG 的位置，然后再证明 $\triangle AFE\cong\triangle AFG$，从而得出结论：____________.

（2）如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180^\circ$，$E$，$F$ 分别是边 BC，CD 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，上述结论是否仍然成立，并说明理由.

（3）正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC、CD 上，且 $\angle EAF=45^\circ$，已知 $BE=3$，$DF=2$，求正方形 $ABCD$ 的边长.

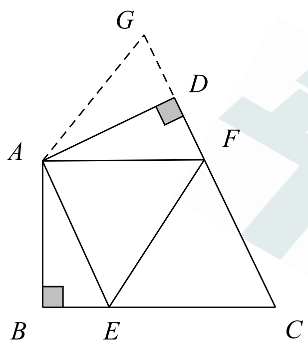


图 1

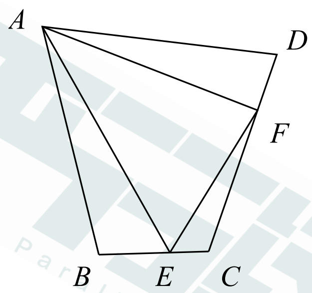


图 2

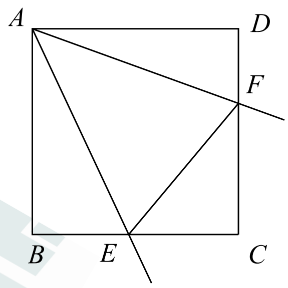


图 3

例 6

1. 问题 1：如图 1，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB=BC=CD$，点 M、N 分别在 AD、CD 上，若 $\angle MBN=\frac{1}{2}\angle ABC$，试探究线段 MN、AM、CN 的数量关系，直接写出即可，不用证明；

问题 2：如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\angle ABC+\angle ADC=180°$，点 M、N 分别在 DA、CD 的延长线上，若 $\angle MBN=\frac{1}{2}\angle ABC$ 仍然成立，试探究线段 MN、AM、CN 的数量关系，写出猜想，并证明.

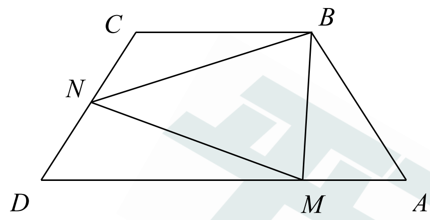


图 1

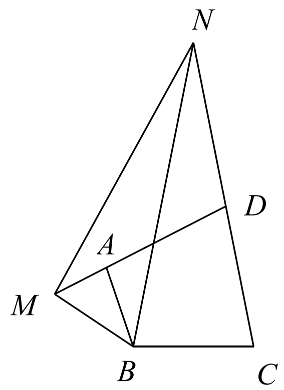


图 2

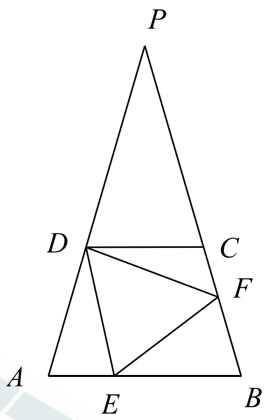
智慧高峰

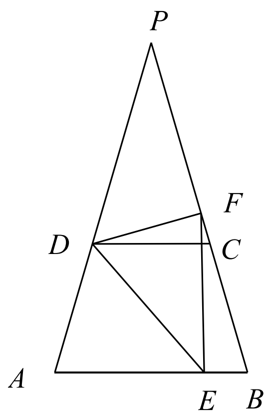
1．如图，在等腰ΔABP中，$PA=PB$，点D、E分别为AP、AB边上的点，点C、F都在BP边上，且$DC//AB$，$DA=DC$，$\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADC$．

（1）若F在BC边上时，求证：$AE+CF=EF$；

（2）若F在BC延长线上时，请写出AE、CF、EF的数量关系，并给出证明；

（3）若F在BC边上时，且$AD=DC=1$，$AB=2$，则ΔBEF的最大面积为__________．





智慧攻略

1．重点：大角夹半角结构中的线段关系

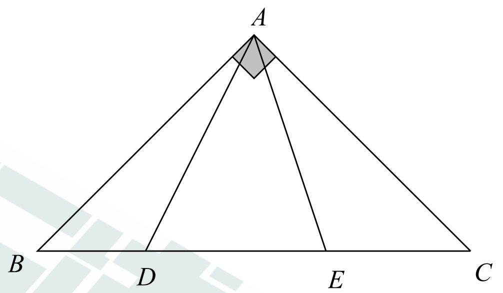
2．难点：

A．辅助线添加

B．图形变化后结论的发现

智慧磨炼

1．如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，点 D、E 在 BC 上，且满足 $\angle DAE=45^{\circ}$，求证：$DE^2=BD^2+CE^2$．



2. 已知，正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB、DC（或它们的延长线）于点 M、N，$AH\perp MN$ 于点 H．

（1）如图 1，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时，请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系：____；

（2）如图 2，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时，（1）中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗？如果不成立请写出理由，如果成立请证明；

（3）如图 3，已知 $\angle MAN=45°$，$AH\perp MN$ 于点 H，且 $MH=2$，$NH=3$，求 AH 的长．（可利用（2）得到的结论）

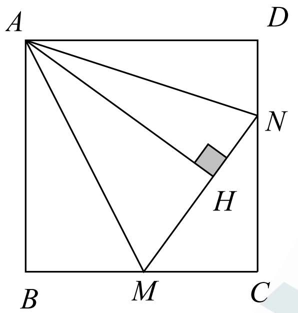


图 1

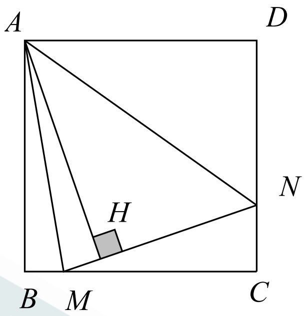


图 2

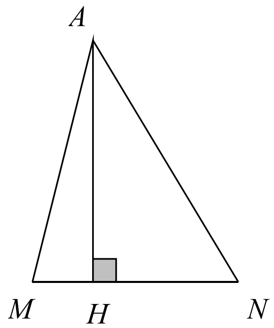


图 3

3. 已知四边形 $ABCD$ 中，$AB \perp AD$，$BC \perp CD$，$AB = BC$，$\angle ABC = 120°$，$\angle MBN = 60°$，$\angle MBN$ 绕 B 点旋转，它的两边分别交 AD，DC（或它们的延长线）于 E，F．

（1）当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时（如图 1），求证：$AE + CF = EF$．

（2）当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时，在图 2 和图 3 这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，给出证明；若不成立，线段 AE，CF，EF 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并给予证明．

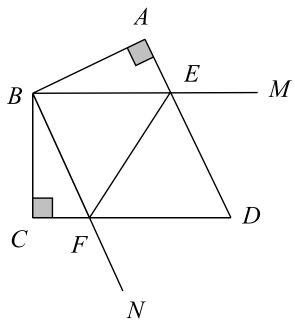


图 1

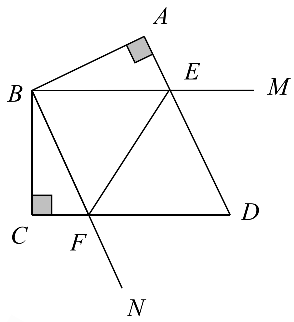


图 2

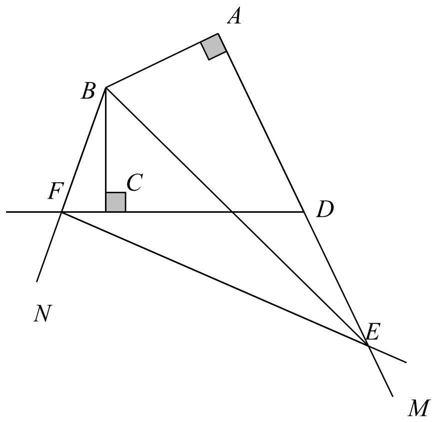


图 3

小明第（1）问的证明步骤是这样的：

延长 DC 到 Q 使 $CQ = AE$，连结 BQ，

证出 $\triangle BAE \cong \triangle BCQ$ 得到 $BE = BQ$，$\angle ABE = \angle CBQ$；

再证 $\triangle BEF \cong \triangle BQF$，得到 $EF = FQ$，证出 $EF = CF + CQ$，即 $EF = CF + AE$．

请你仿照小明的证题步骤完成第（2）问的证明．