第二届罗马尼亚数学大师杯数学竞赛

第二届罗马尼亚数学大师杯数学竞赛(RMM)于2009年2月26日—3月2日在罗马尼亚首都布加勒斯特举行。中国、美国、俄罗斯、保加利亚、英国、意大利、塞尔维亚、罗马尼亚(派出了三支队伍)共8个国家的10支队伍参加了比赛。考试时间是5个小时,4个试题,每题7分,共28分。我国派出了由领队熊斌(华东师大数学奥林匹克研究中心),副领队冯志刚(上海中学),队员宣炎、陈家豪(复旦大学附属中学),朱靓妤、李弘毅(华东师范大学附属第二中学),阮丰、唐志皓(上海中学)组成的代表队参加了此次竞赛。

共有57名学生参加此次考试。有6名学生获得金牌(金牌分数线是23分),10名学生获得银牌(银牌分数线是16分),23名学生获得铜牌(铜牌分数线是11分)。

中国队成绩如下:唐志皓(27分,金牌,第一名),陈家豪(24分,金牌,第二名),宣炎(23分,金牌,第三名(并列)),阮丰(21分,银牌,第八名(并列)),李弘毅(14分,铜牌),朱靓妤(10分)。

中国队以74分获得此次竞赛的团体第一名(按照每支代表队前三名成绩的和排列)。

期间,还举行了庆祝国际数学奥林匹克50周年的庆典活动。熊斌和冯志刚作为嘉宾参加了这次庆典并获得了纪念证书。

1.对正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$,记

$$n=\sum_{i=1}^{k}a_i,\binom{n}{a_1,\cdots,a_k}=\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(a_i!)}.$$

令 $d=\gcd(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的最大公约数.证明:$\frac{d}{n}\binom{n}{a_1,\cdots,a_k}$ 是一个整数.

2.一个由空间中的点组成的集合 S 满足性质:S 中任意两点之间的距离互不相同.假设 S 中的点的坐标 (x,y,z) 都是整数,且 $1\leqslant x、y、z\leqslant n$.证明:集合 S 的元素个数小于

$$\min\left\{(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}},n\sqrt{6}\right\}.$$

3.在平面上给定任意三点不共线的四个点 $A_1、A_2、A_3、A_4$,使得

$$A_1A_2\cdot A_3A_4=A_1A_3\cdot A_2A_4=A_1A_4\cdot A_2A_3.$$

记 O_i 是 $\triangle A_kA_jA_l$ 的外心($\{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$).假设对每个下标 i,都有 $A_i\neq O_i$.证明:四条直线 A_iO_i 共点或平行.

4.对一个由正整数组成的有限集 X,定义

$$\sum(X)=\sum_{x\in X}\arctan\frac{1}{x}.$$

设一个由正整数组成的有限集 S,满足 $\sum(S)<\frac{\pi}{2}$.证明:至少存在一个由正整数组成的有限集 T,使得 $S\subset T$,且 $\sum(T)=\frac{\pi}{2}$.

参考答案

1.设 $a_1=dx_1,a_2=dx_2,\cdots,a_k=dx_k$.则 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)=1$.

由 Bezout 定理知,存在整数 $u_1,u_2,\cdots,u_k$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{k}u_ix_i=1$.所以,$\sum\limits_{i=1}^{k}u_ia_i=d$.令

$$S_i=\frac{a_i}{n}\binom{n}{a_1,\cdots,a_k}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(a_1!)\cdots(a_{i-1}!)(a_i-1)!\ (a_{i+1}!)\cdots(a_k!)}(i=1,$$

万方数据

$2,\cdots,k)$.

考虑由 a_1 个 1，a_2 个 2，a_{i-1} 个 $i-1$，a_i-1 个 i，a_{i+1} 个 $i+1$，…，a_k 个 k 这 $n-1$ 个数组成的排列. 易知这样的排列共有 S_i 种. 所以，S_i 是整数. 从而，

$$\frac{d}{n}\binom{n}{a_1,\cdots,a_k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{u_ia_i}{n}\binom{n}{a_1,\cdots,a_k}=\sum_{i=1}^{k}u_iS_i$$

是整数.

2. 记 $|S|=t$. 则对任意的 (x_1,y_1,z_1)、$(x_2,y_2,z_2)\in S$，都有

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\leqslant 3(n-1)^2$$

(因为满足 $1\leqslant x、y、z\leqslant n$ 的整点之间的距离不超过 $(1,1,1)$ 与 (n,n,n) 之间的距离)，并且依题意 S 中任意两点之间的距离互不相同. 故 $C_t^2\leqslant 3(n-1)^2$，得

$$t^2-t\leqslant 6(n-1)^2.$$

于是，$t\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+24(n-1)^2}<n\sqrt{6}$

(最后一个不等式等价于 $1+24(n-1)^2<(2n\sqrt{6}-1)^2$，展开后移项即可得到).

另一方面，对 S 中的任意两点 (x_i,y_i,z_i)、(x_j,y_j,z_j)，考虑集合 $\{a,b,c\}$ (允许出现重复元素)，这里，

$$a=|x_i-x_j|,b=|y_i-y_j|,c=|z_i-z_j|.$$

依题意，所得的 $\{a,b,c\}$ 两两不同，且 $0\leqslant a、b、c\leqslant n-1$ ($a、b、c$ 不全为 0). 于是，

$$C_t^2\leqslant C_n^3+2C_n^2+C_n^1-1. \qquad ①$$

故 $C_t^2<C_n^3+2C_n^2+C_n^1$.

解得 $t<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$.

当 $n\geqslant 3$ 时，有 $t<(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}}$ (这只需证明：

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}\leqslant(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\leqslant\left[(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}}-\frac{1}{2}\right]^2,$$

展开后移项即知此不等式在 $n\geqslant 3$ 时成立).

于是，当 $n\geqslant 3$ 时，总有

$$t\leqslant\min\left\{(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}},n\sqrt{6}\right\}. \qquad ②$$

而当 $n=1$ 时，$t=1$；当 $n=2$ 时，由式① 知 $t\leqslant 3$. 此时，式②也成立. 命题获证.

3. 若四个点 A_1、A_2、A_3、A_4 构成一个凹四边形，不妨设 A_4 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中，如图 1.

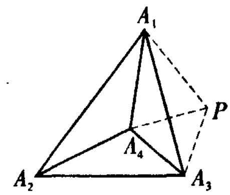


图 1

作 $\triangle A_1A_3P\backsim\triangle A_1A_2A_4$. 则

$$\angle A_3A_1P=\angle A_4A_1A_2.$$

于是，$\angle A_4A_1P=\angle A_2A_1A_3$，且

$$\frac{A_1P}{A_1A_3}=\frac{A_1A_4}{A_1A_2}.$$

则 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle A_1A_4P\Rightarrow\frac{A_4P}{A_2A_3}=\frac{A_1A_4}{A_1A_2}$

$$\Rightarrow A_4P=\frac{A_1A_4\cdot A_2A_3}{A_1A_2}=A_3A_4.$$

又 $\frac{A_3P}{A_1A_3}=\frac{A_2A_4}{A_1A_2}$，则

$$A_3P=\frac{A_1A_3\cdot A_2A_4}{A_1A_2}=A_3A_4.$$

因此，$A_3P=A_4P=A_3A_4$，即 $\triangle A_3A_4P$ 是正三角形.

故 $\angle A_1A_2A_4+\angle A_1A_3A_4$

$$=\angle A_1A_3P+\angle A_1A_3A_4=60^\circ.$$

同理，$\angle A_3A_2A_4+\angle A_3A_1A_4=60^\circ$，

$\angle A_2A_1A_4+\angle A_2A_3A_4=60^\circ$.

设 $\angle A_1A_2A_4=\alpha$，$\angle A_2A_3A_4=\beta$，

$\angle A_3A_1A_4=\gamma$.

则 $\angle A_1A_3A_4=60^\circ-\alpha$，$\angle A_2A_1A_4=60^\circ-\beta$，$\angle A_3A_2A_4=60^\circ-\gamma$.

如图 2，因为 O_1 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 的外心，所

万方数据

以，

$\angle A_4A_2O_1$

$=90°-\beta$.

于是，

$\angle A_1A_2O_1$

$=90°+\alpha-\beta$.

同理，

$\angle A_2A_3O_2$

$=90°+\beta-\gamma$,

$\angle A_3A_1O_3=90°+\gamma-\alpha$.

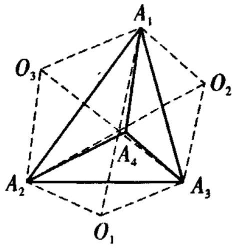


图 2

又$\angle A_4A_3O_1=90°-\angle A_4A_2A_3=30°+\gamma$,则

$\angle A_1A_3O_1=90°+\gamma-\alpha$.

同理，$\angle A_2A_1O_2=90°+\alpha-\beta$,

$\angle A_3A_2O_3=90°+\beta-\gamma$.

由角元塞瓦定理得

$$\frac{\sin\angle A_2A_1O_1}{\sin\angle O_1A_1A_3}\cdot\frac{\sin\angle A_3A_2O_1}{\sin\angle O_1A_2A_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1A_3O_1}{\sin\angle O_1A_3A_2}=1.$$

因为$\angle O_1A_3A_2=\angle O_1A_2A_3$,所以，

$$\frac{\sin\angle A_2A_1O_1}{\sin\angle A_3A_1O_1}=\frac{\sin\angle O_1A_2A_1}{\sin\angle O_1A_3A_1}$$

$$=\frac{\sin(90°+\alpha-\beta)}{\sin(90°+\gamma-\alpha)}.$$

同理，$\dfrac{\sin\angle A_3A_2O_2}{\sin\angle A_1A_2O_2}=\dfrac{\sin(90°+\beta-\gamma)}{\sin(90°+\alpha-\beta)}$,

$$\frac{\sin\angle A_1A_3O_3}{\sin\angle A_2A_3O_3}=\frac{\sin(90°+\gamma-\alpha)}{\sin(90°+\beta-\gamma)}.$$

故$\dfrac{\sin\angle A_2A_1O_1}{\sin\angle O_1A_1A_3}\cdot\dfrac{\sin\angle A_3A_2O_2}{\sin\angle O_2A_2A_1}\cdot\dfrac{\sin\angle A_1A_3O_3}{\sin\angle O_3A_3A_2}=1.$

因此，A_1O_1、A_2O_2、A_3O_3 三线共点（或者互相平行）.

若四个点 A_1、A_2、A_3、A_4 构成一个凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$,类似可得 A_1O_1、A_2O_2、A_3O_3 三线共点（或者互相平行）.

同理，A_1O_1、A_2O_2、A_4O_4 三线共点（或者互相平行）.

综上，四条直线 A_iO_i 共点或平行.

4. 注意到，当 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 都为有理数时，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$也为有理数.

因此，$\tan\left(\sum(S)\right)$为有理数.

熟知$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$在$n\to+\infty$时是发散的，故对任意的正整数 x,和数$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\cdots+\dfrac{1}{y}$随着正整数 y 的增大可以任意大. 结合 α、β($\alpha>\beta$)都是锐角时，

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}<\tan\alpha-\tan\beta,$$

可知$\tan\left(\sum(S)-\arctan\dfrac{1}{x}-\arctan\dfrac{1}{x+1}-\cdots-\arctan\dfrac{1}{y}\right)$

$$<\frac{p}{q}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{y}\right)$$

随着 y 的增大可以任意小$\left(\tan\left(\sum(S)\right)=\dfrac{p}{q}\right.$,$p$、$q$ 为互质的正整数$\left.\right)$,而 $x-1$ 为 S 中的最大元. 因此，存在正整数 $y\geqslant x-1$,使得

$$0\leqslant\alpha=\sum(S)-\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x+1}-\cdots-\arctan\frac{1}{y}<\arctan\frac{1}{y+1}.$$

依如下方式来定义集合 T.

首先取 $T=S$,在 $0<\alpha$ 时，设 $\tan\alpha=\dfrac{p_0}{q_0}$($p_0$、$q_0$ 为互质的正整数）. 则存在正整数 t,使得$\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{p_0}{q_0}<\dfrac{1}{t-1}$. 将 t 加入集合 T,则 t 大于原来 T 中的最大元，并有

$$\tan\left(\alpha-\arctan\frac{1}{t}\right)=\frac{\dfrac{p_0}{q_0}-\dfrac{1}{t}}{1+\dfrac{p_0}{tq_0}}=\frac{p_0t-q_0}{p_0+tq_0},$$

这里，$p_0t-q_0<p_0$.

再用 $\alpha-\arctan\dfrac{1}{t}$代替 α 重复上述讨论，可知每次在 T 中增加一个元素后，所得的新的 $\tan\alpha$ 的分子严格减小，除非 $\alpha=0$. 因此，存在满足条件的集合 T.

（熊 斌 提供）

万方数据

第三届罗马尼亚大师杯数学竞赛（2010）

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2010)06－0031－05

2010 年罗马尼亚大师杯数学竞赛于 2 月 24 日至 3 月 1 日在布加勒斯特举行。在 IMO 上成绩突出的中国、俄罗斯、美国与其周边的一些欧洲国家受邀参加。同期，罗马尼亚还举行了大师杯物理竞赛。考试分两天进行，每天三道题，每题 7 分，每天是 4 小时 30 分钟。

受中国数学奥林匹克委员会委派，以领队冯志刚（上海中学），副领队刘初喜（华东师范大学第二附属中学）及徐俊楠、陆羽豪（复旦大学附属中学），张贻辰、李弘毅（华东师范大学附属第二中学），张逸昊、聂子佩（上海中学）等六名队员组成的中国代表队参加了此次大师杯。

共有 71 名同学参加了此次考试，其中，聂子佩同学在所有参赛选手中获得了唯一的满分。共有 7 名同学获得了金牌（金牌分数线是 31 分）、13 名同学获得了银牌（银牌分数线是 20 分）、23 名同学获得了铜牌（铜牌分数线是 11 分）。

中国队获奖学生的得分如下：聂子佩(42 分，金牌）、李弘毅（30 分，银牌）、徐俊楠（26 分，银牌）、张逸昊(26 分，银牌）、张贻辰（19 分，铜牌）

按照每支代表队的前三名成绩之和排列总分名次，前五名成绩如下：俄罗斯（101 分）、中国(98 分）、美国(85 分）、塞尔维亚(67 分）、保加利亚(65 分）。

下面是本次比赛的试题和解答，其中，除第 3 题选自张逸昊和徐俊楠同学的解法外，其余都是聂子佩同学的解答。

第一天

1. 对一个由有限个质数组成的集合 P，用 $m(P)$ 表示具有下述性质的连续正整数的个数的最大值：这些连续正整数中的每个数都能被 P 中的至少一个元素整除. 设 $|P|$ 表示集合 P 的元素个数. 证明：

(1) $|P|\leqslant m(P)$，当且仅当 $\min P>|P|$ 时，上式等号成立；

(2) $m(P)<(|P|+1)(2^{|P|}-1)$.

2. 对每一个正整数 n，求具有下述性质的最大常数 c_n：对任意 n 个定义在闭区间 $[0,1]$ 上的实值函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$，都存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足 $0\leqslant x_i\leqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且

$$|f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)-x_1x_2\cdots x_n|\geqslant c_n. \quad ①$$

3. 设凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的两组对边都不平行. 对 $i=1,2,3,4$，定义圆 ω_i：它在四边形的外部，且与直线 $A_{i-1}A_i$、A_iA_{i+1}、$A_{i+1}A_{i+2}$ 都相切. 设 T_i 是圆 ω_i 与边 A_iA_{i+1} 的切点（下标在模 4 的意义下取，即 $A_0=A_4$，$A_5=A_1$，$A_6=A_2$）. 证明：直线 A_1A_2、A_3A_4、T_2T_4 三线共点的充要条件是 A_2A_3、A_4A_1、T_1T_3 三线共点.

第二天

4. 是否存在一个系数都为整数的两变量多项式 $f(x_1,x_2)$ 和平面上的两个点 $A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$ 同时满足下面所有条件？

(1) A 是一个整点（即 a_1、a_2 都是整数）；

(2) $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|=2\,010$；

(3) 对平面上所有整点 (n_1,n_2)（不同于点 A），都有 $f(n_1,n_2)>f(a_1,a_2)$；

(4) 对平面上所有点 (x_1,x_2)（不同于点 B），都有 $f(x_1,x_2)>f(b_1,b_2)$.

5. 设 n 为给定的正整数. 若一个由平面上的整点组成的集合 K 满足下述条件，则称其为“连通的”：对任意一对点 R、$S\in K$，都

存在一个正整数 l 及由 K 中的点组成的数列

$R=T_0,T_1,\cdots,T_l=S$,

这里,每个 T_i 与 T_{i+1} 之间的距离都是 1.

对这样的一个集合 K,定义

$\Delta(K)=\{\overrightarrow{RS}\mid R、S\in K\}$.

对所有由平面上的 $2n+1$ 个整点组成的连通的集 K,求 $|\Delta(K)|$ 的最大可能值.

6. 给定一个有理系数多项式 f,其次数 $d\geqslant 2$.定义集合列 $f^0(Q),f^1(Q),\cdots$ 如下:

$f^0(Q)=Q,f^{n+1}(Q)=f(f^n(Q))(n\geqslant 0)$

(对给定的集合 S,有 $f(S)=\{f(x)\mid x\in S\}$).

设 $f^{\omega}(Q)=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}f^n(Q)$ 是由属于所有集合 $f^n(Q)$ 的元素组成的集合.证明:$f^{\omega}(Q)$ 是一个有限集.

参考答案

第一天

1. 设 $1<p_1<p_2<\cdots<p_k$ 是 P 中的元素.则 $k=|P|>1$.

(1)由中国剩余定理知,存在正整数 a,使得 $a\equiv -i(\bmod p_i)(i=1,2,\cdots,k)$,即 $p_i\mid(a+i)$.

因此,存在 k 个连续正整数 $a+1,a+2,\cdots,a+k$,它们具有满足题中性质.

从而,$m(P)\geqslant k$.

注意到,当 $\min P>k$ 时,对 P 中的每个元素而言,任意连续 $k+1$ 个正整数中至多有一个是其倍数.

由抽屉原理知,任意具有满足题中性质的连续 $k+1$ 个正整数中,应有两个数同时是 P 中某个数的倍数.

因此,$m(P)=k$.

另一方面,当 $\min P\leqslant k$ 时,再次运用中国剩余定理知,对 $1,2,\cdots,k$ 的任意一个排列 $r_1,r_2,\cdots,r_k$,都存在正整数 a,使得

$a\equiv -r_i(\bmod p_i)(i=1,2,\cdots,k)$.

特别地,设 $r_1\equiv k+1(\bmod p_1)$.则数 $a+1,a+2,\cdots,a+k,a+k+1$ 符合要求.此时,

$m(P)>k$.

(2)只要证在连续 $(k+1)(2^k-1)$ 个正整数中,必有一个数与 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 互质.

设 A 是 P 的一个子集,T_A 是这连续 $(k+1)(2^k-1)$ 个正整数中满足其为 A 中每个数的倍数的数的集合.

设 $m=(k+1)(2^k-1)$.

由容斥原理知,这些数中与 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 互质的数的个数为 $\sum\limits_{A\subseteq P}(-1)^{|A|}|T_A|$.

接下来只需证明:

$\sum\limits_{A\subseteq P}(-1)^{|A|}|T_A|>0$.

由于 $\dfrac{m}{\prod\limits_{p_i\in A}p_i}-1<|T_A|<\dfrac{m}{\prod\limits_{p_i\in A}p_i}+1$,且 $T_{\varnothing}=m$,故只要证明

$$\sum_{A\subseteq P}(-1)^{|A|}\frac{m}{\prod\limits_{p_i\in A}p_i}\geqslant 2^k-1.$$

这等价于 $m\prod\limits_{p_i\in A}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)\geqslant 2^k-1$,即

$$\prod_{p_i\in A}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\geqslant\frac{1}{k+1}.$$

由 $1<p_1<p_2<\cdots<p_k$,知

$p_i\geqslant i+1(i=1,2,\cdots,k)$.

故 $\prod\limits_{p_i\in A}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)\geqslant\prod\limits_{i=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{i+1}\right)$

$=\prod\limits_{i=1}^{k}\dfrac{i}{i+1}=\dfrac{1}{k+1}$.

从而,$\sum\limits_{A\subseteq P}(-1)^{|A|}|T_A|>0$.

因此,在这 $(k+1)(2^k-1)$ 个正整数中,必有一个数与 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 互质.

所以,$m(P)<(|P|+1)(2^{|P|}-1)$.

2. 所求的最大常数 $c_n=\dfrac{n-1}{2n}$.

一方面,取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$,得

式①左边 $=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(1)-1\right|$;

取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,得

式①左边 $=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(0)\right|$;

取 $x_i=0,x_j=1(j\neq i)$,得

式①左边 $=\left|\sum\limits_{j\neq i}f_j(1)+f_i(0)\right|$.

由三角形不等式知

$$(n-1)\left|\sum_{i=1}^{n}f_i(1)-1\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j\neq i}f_j(1)+f_i(0)\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f_i(0)\right|$$

$$\geqslant\left|(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(1)-1\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i}f_j(1)+f_i(0)\right)+\sum_{i=1}^{n}f_i(0)\right|$$

$$=n-1.$$

故 $\left|\sum_{i=1}^{n}f_i(1)-1\right|$、$\left|\sum_{i=1}^{n}f_i(0)\right|$、$\left|\sum_{j\neq i}f_j(1)+f_i(0)\right|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 中必有一个数不小于 $\frac{n-1}{2n}$.

从而，$c_n\geqslant\frac{n-1}{2n}$.

另一方面，令

$$f_i(x)=\frac{x}{n}-\frac{n-1}{2n^2}(i=1,2,\cdots,n).$$

接下来证明：对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$，都有

$$|f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)-x_1x_2\cdots x_n|\leqslant\frac{n-1}{2n}.$$

为此，只需证明：

$$1-n\leqslant nx_1x_2\cdots x_n-\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant0.$$

不等式左边等价于

$$(n-1)x_1x_2\cdots x_n+(x_1-1)(x_2x_3\cdots x_n-1)+\cdots+(x_{n-1}-1)(x_n-1)\geqslant0.$$

式中每一个加项都不小于 0，故成立.

不等式右边等价于

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-nx_1x_2\cdots x_n\geqslant0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i\left(1-\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_i}\right)\geqslant0.$$

同上可知亦成立.

3. 证法 1 不妨设 A_2A_1 与 A_3A_4、A_1A_4 与 A_2A_3 分别交于点 X、Y.

由对称性只需证明：若 X、T_4、T_2 三点共线，则 A_2A_3、A_4A_1、T_1T_3 三线共点.

延长 X、T_4、T_2 所共的线交圆 ω_2 于另外一点 T_2'.

由圆 ω_2 与圆 ω_4 关于 X 位似，则点 T_4 与 T_2' 是该位似变换下的对称点. 因此，圆 ω_4 过 T_4 的切线与圆 ω_2 过 T_2' 的切线平行.

设 Y' 是圆 ω_2 过 T_2' 的切线与直线 A_2A_3 的交点. 则 $Y'T_2'/\!/YT_4$. 故

$$\angle YT_2T_4=\angle Y'T_2T_2'=\angle Y'T_2'T_2=\angle YT_4T_2$$

$$\Rightarrow YT_2=YT_4\Rightarrow C_3T_4=B_3T_2,B_1T_4=C_1T_2,$$

其中，B_i、$C_i(i=1,2,3,4)$ 分别是圆 ω_i 与 $A_{i-1}A_i$、$A_{i+1}A_{i+2}$ 的交点（下标在模 4 意义下取）.

进一步，$B_4T_3=C_3T_4=B_3T_2=T_3C_2$.

同理，$C_4T_1=T_1B_2$.

结合 $XC_4=XB_4$，$XB_2=XC_2$，得

$XT_1=XT_3$.

故 $\angle XT_1T_3=\angle XT_3T_1$.

设 $\angle C_1A_2T_1=\alpha$，$\angle B_3A_3T_3=\beta$. 则

$$\angle C_1T_1A_2=90^\circ-\frac{\alpha}{2},$$

$$\angle A_3B_3T_3=90^\circ-\frac{\beta}{2}.$$

于是，$\angle T_1XT_3=\alpha+\beta-180^\circ$.

故 $\angle XT_1T_3=\angle XT_3T_1=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}$,

$$\angle A_2T_1T_3=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

因此，$\angle C_1T_1T_3+\angle C_1B_3T_3=180^\circ$.

所以，C_1、B_3、T_3、T_1 四点共圆.

同理，C_3、B_1、T_1、T_3 四点共圆.

结合 C_1、B_3、C_3、B_1 也四点共圆知，三条根轴 A_2A_3、A_4A_1、T_1T_3 三线共点（或平行），而 A_2A_3、A_4A_1 相交，故它们共点.

证法 2 设 A_4A_1 与 A_3A_2、A_3A_4 与 A_2A_1 分别交于点 Q、P. 设

$$\angle QA_1A_2=\alpha,\angle QA_2A_1=\beta,$$

$$\angle PA_4A_1=\gamma,\angle QA_3P=180^\circ-\delta.$$

注意到

A_2A_3、A_4A_1、T_1T_3 三线共点

$\Leftrightarrow Q$、T_1、T_3 三点共线

$\Leftrightarrow T_1$、T_3 到两边 QT_2、QT_4 的距离的比相同

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\angle A_1QT_1}{\sin\angle A_2QT_1}=\frac{\sin\angle A_1QT_3}{\sin\angle A_2QT_3}.$$

由 $\frac{A_1Q\sin\angle A_1QT_1}{A_2Q\sin\angle A_2QT_1}=\frac{S_{\triangle QA_1T_1}}{S_{\triangle QA_2T_1}}=\frac{A_1T_1}{A_2T_1}$，知

$$\frac{\sin\angle A_1QT_1}{\sin\angle A_2QT_1}=\frac{A_2Q}{A_1Q}\cdot\frac{A_1T_1}{A_2T_1}.$$

利用正弦定理及圆 ω_1 为内切圆知

$$\frac{A_2Q}{A_1Q}\cdot\frac{A_1T_1}{A_2T_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\cot\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

类似地，结合圆 ω_4 为旁切圆知

$$\frac{\sin\angle A_1QT_3}{\sin\angle A_2QT_3}=\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\delta}{2}}.$$

故 A_2A_3、A_4A_1、T_1T_3 三线共点

$$\Leftrightarrow\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\delta}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}=\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

同理可证

A_1A_2、A_3A_4、T_2T_4 三线共点

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}=\cos^2\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

所以，命题成立.

第 二 天

4. 存在满足条件的多项式 $f(x_1,x_2)$ 和平面上的两个点 $A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$.

令 $a_1=a_2=0,b_1=\frac{1}{3},b_2=\frac{6\,029}{3}$,

$f(x_1,x_2)=(3x_1-1)^2+2(6\,029x_1-x_2)^2$.

则(1)、(2)显然满足.

对于(3)，$f(a_1,a_2)=f(0,0)=1$.

此时，对平面上所有的整点 (n_1,n_2)（不同于点 A），若 $6\,029n_1\neq n_2$，则

$f(n_1,n_2)\geqslant 2(6\,029n_1-n_2)^2\geqslant 2>1$.

若 $6\,029n_1=n_2$，则 $n_1\neq 0$（因为不同于点 A）. 此时，

$f(n_1,n_2)\geqslant(3n_1-1)^2\geqslant 2^2>1$.

故(3)成立.

对于(4)，$f(b_1,b_2)=0$.

对平面上所有点 (x_1,x_2)（不同于点 B），若 $6\,029x_1\neq x_2$，则

$f(x_1,x_2)\geqslant 2(6\,029x_1-x_2)^2>0$;

若 $6\,029x_1=x_2$，则 $x_1\neq\frac{1}{3}$（因为不同于点 B）. 此时，

$f(x_1,x_2)\geqslant(3x_1-1)^2>0$.

故(4)成立.

5. $|\Delta(K)|$ 的最大可能值为 $2n^2+4n+1$.

一方面，取集合

$K=\{(0,0)\}\cup\{(0,i)\mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{(i,0)\mid i=1,2,\cdots,n\}$,

它是连通的，且 $|K|=2n+1$. 而

$$\begin{aligned}|\Delta(K)|=&\{(0,0)\}\cup\{(0,\pm i)\mid i=1,2,\cdots,n\}\\&\cup\{(\pm i,0)\mid i=1,2,\cdots,n\}\\&\cup\{(-i,j)\mid i、j=1,2,\cdots,n\}\\&\cup\{(i,-j)\mid i、j=1,2,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

此时，$|\Delta(K)|=2n^2+4n+1$.

另一方面，证明：对任意满足 $|K|=2n+1$ 的连通集，都有

$|\Delta(K)|\leqslant 2n^2+4n+1$.

构造图 G，使得 G 中的顶点就是 K 中的点. 若 G 中两点对应于 K 中的纵坐标相同而横坐标差 1，则在它们之间连一条红边；若 G 中两点对应于 K 中的横坐标相同而纵坐标差 1，则在它们之间连一条蓝边. 由于 K 是连通的，故 G 为连通图.

取 G 的一个生成树 G_0，并记 G_0 的红、蓝边数分别为 e_r、e_b. 则 $e_r+e_b=2n$.

记 G_0 中所有的红边为 $A_iA_i'(i=1,2,\cdots,e_r)$，所有的蓝边为 $B_iB_i'(i=1,2,\cdots,e_b)$，并用同样的记号表示 K 中对应的边.

设 A_i' 在 A_i 的右边，而 B_i' 在 B_i 的上边.

现在，构造图 M，使得 M 中的顶点是 K 中任意两个不同点所成的向量，这些向量中有一些相等. 则

$|M|=2\mathrm{C}_{2n+1}^2=4n^2+2n$.

将 $\overrightarrow{A_iA_j}$ 和 $\overrightarrow{A_i'A_j'}(i\neq j,1\leqslant i、j\leqslant e_r)$ 对应的 M 中的顶点之间连一条红色的边；将 $\overrightarrow{B_iB_j}$ 和 $\overrightarrow{B_i'B_j'}(i\neq j,1\leqslant i、j\leqslant e_b)$ 对应的 M 中的顶点之间连一条蓝色的边.

对这样得到的图 M 而言，由于各 A_i 不同，各 B_j 不同，故 M 中任意两点之间所连边数都不超过 1，而 $\overrightarrow{A_i'A_j'}$ 是 $\overrightarrow{A_iA_j}$ 向右平移一个单位所得，$\overrightarrow{B_i'B_j'}$ 是 $\overrightarrow{B_iB_j}$ 向上平移一个单位所得，因此，M 中没有两个顶点之间既连了红边也连了蓝边. 这表明 M 是简单图.

若 M 中有圈：

$$\overrightarrow{C_1D_1}\to\overrightarrow{C_2D_2}\to\cdots\to\overrightarrow{C_kD_k}\to\overrightarrow{C_1D_1}$$

（中间所连的边既有红边，也有蓝边），则 C_1, C_2, $\cdots$, C_k, C_1 是 G_0 中的一个圈，与 G_0 为树矛盾.

所以，M 是若干个树的并集.

由于 M 中某两点之间连边意味着它们在 K 中对应的向量相等，故 K 中对应的非零向量的个数等于 M 的连通分支的个数，即 $|M|-e(M)$（$e(M)$ 为 M 的边数）. 则

$$\begin{aligned}|\Delta(K)| &= |M|-e(M)+1\\ &=4n^2+2n-2\mathrm{C}_{e_r}^2-2\mathrm{C}_{e_b}^2+1\\ &=4n^2+4n+1-(e_r^2+e_b^2)\\ &\leqslant 4n^2+4n+1-\frac{1}{2}(e_r+e_b)^2\\ &=2n^2+4n+1.\end{aligned}$$

综上，所求最大值为 $2n^2+4n+1$.

6. 设 $f(x)=\frac{1}{M}(a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_0)$ $(M\in\mathbf{N}_+, a_i\in\mathbf{Z}, a_d\neq 0, d\geqslant 2)$.

先证明一个引理.

引理　设 $\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$（p 为非零整数，q 为正整数，且 $(p,q)=1$）. 则存在正常数 c_1，使得当 $q>c_1$ 时，都有 $f\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$.

设 $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{r}{s}$（$r$ 为非零整数，s 为正整数，且 $(r,s)=1$）. 则 $s>q$.

证明　事实上，当 q 充分大时，若总存在 $\frac{p}{q}$，使得 $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$，则方程 $f(x)=0$ 有无穷多个根，矛盾.

故当 q 充分大时，总有 $f\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$.

而 $\frac{r}{s}=\frac{1}{Mq^d}(a_dp^d+a_{d-1}p^{d-1}q+\cdots+a_0q^d)$，又

$$\begin{aligned}&(Mq^d, a_dp^d+a_{d-1}p^{d-1}q+\cdots+a_0q^d)\\ &\leqslant M(q^d, a_dp^d+a_{d-1}p^{d-1}q+\cdots+a_0q^d)\\ &\leqslant M(q^d, (a_dp^d+a_{d-1}p^{d-1}q+\cdots+a_0q^d)^d)\\ &=M(q,a_dp^d)^d=M(q,a_d)^d\leqslant M|a_d|^d,\end{aligned}$$

因此，结合 $d\geqslant 2$，可知当 q 充分大时，有

$$s\geqslant\frac{Mq^d}{M|a_d|^d}>q.$$

回到原题.

由 $d\geqslant 2$，可知当 $|x|$ 充分大时，

$|f(x)|>|x|$.

设对正常数 c_2，当 $|x|>c_2$ 时，有

$|f(x)|>|x|$.

现在，对 $f^{\omega}(Q)$ 中的任一元素 $\frac{p_0}{q_0}$，可设

$$\frac{p_0}{q_0}=f^1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)=f^2\left(\frac{p_2}{q_2}\right)=\cdots,$$

其中，分数分母都是正整数，且分子与分母互质，将 0 写为 $\frac{0}{1}$.

而对每个 $\frac{p_n}{q_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，若

$q_n>\max\{c_1,q_0\}$,

则由引理知

$$q_n<f^1\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\text{的既约分母}<\cdots$$
$$<f^n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\text{的既约分母}=q_0,$$

矛盾.

故 $q_n\leqslant\max\{c_1,q_0\}$.

对每个 $\frac{p_n}{q_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，若

$$\left|\frac{p_n}{q_n}\right|>\max\left\{\frac{p_0}{q_0},c_2\right\},$$

则 $\left|\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|f^1\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|<\cdots<\left|f^n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|=\frac{p_0}{q_0}$,

矛盾.

因此，$\left|\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\max\left\{\frac{p_0}{q_0},c_2\right\}$.

故当 $\frac{p_0}{q_0}$（$\neq 0$）确定后，$\frac{p_n}{q_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 只

第 4 届罗马尼亚大师杯数学竞赛

第一天:2011 年 2 月 25 日,星期五,布加勒斯特

1. 证明:存在两个函数 $f, g: R \to R$,使得函数 $f(g(x))$ 在 R 上是严格递减的,而 $g(f(x))$ 在 R 上是严格递增的.

   证明:设 A=$\bigcup_{k\in Z}([-2^{2k+1},-2^{2k})\cup(2^{2k},2^{2k+1}])$,B=$\bigcup_{k\in Z}([-2^{2k},-2^{2k-1})\cup(2^{2k-1},2^{2k}])$,则 A=2B,B=2A,A=-A,B=-B,A∩B=∅,并且 A∪B∪{0}=R.现在令

   $$f(x)=\begin{cases} x, x\in A; \\ -x, x\in B; \text{而 g(x)=2f(x),} \\ 0, x=0. \end{cases}$$

   那么,f(g(x))=f(2f(x))=-2x,而 g(f(x))=2f(f(x))=2x.所以,满足条件的函数存在.

2. 求所有的正整数 n,使得存在一个实系数多项式 f(x),满足下面的两个性质:

   (1) 对任意整数 k,数 f(k)为整数的充要条件是 k 不能被 n 整除;

   (2) 多项式 f(x)的次数小于 n.

   解法一:我们将证明这样的多项式存在的充要条件是 n=1 或者 n 是某个素数的幂.为表述上方便起见,依次建立下述引理:

   [引理一] 若 p^α是一个素数的幂,k 是一个整数,则数

   $$\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-p^\alpha+1)}{(p^\alpha-1)!}\ (=\binom{k-1}{p^\alpha-1}\text{为整数})$$

   能被 p 整除的充要条件是 k 不能被 p^α整除.

   [证明] 用 $L_p(m)$表示满足 $p^r|m$ 的最大整数 r.

   情形一:若 $p^\alpha|k$,则对 $1\le j\le p^\alpha-1$,有 $L_p(j)<\alpha$,故 $L_p(k-j)=L_p(j)=L_p(p^\alpha-j)$,于是

$$\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-p^{\alpha}+1)}{(p^{\alpha}-1)!}=\frac{k-1}{p^{\alpha}-1}\cdot\frac{k-2}{p^{\alpha}-2}\cdots\frac{k-p^{\alpha}+1}{1}$$

右边乘积的每一项的分子与分母中 p 的幂次相同,因此,它不是 p 的倍数.

情形二:若 $p^{\alpha}\nmid k$,则由 $\binom{k-1}{p^{\alpha}-1}=\frac{p^{\alpha}}{k}\binom{k}{p^{\alpha}}$ 中 $\binom{k}{p^{\alpha}}$ 为整数,而 $L_p(k)<\alpha$,可知 $\binom{k-1}{p^{\alpha}-1}$ 是 p 的倍数.

[引理二] 若 g(x)是一个次数小于 n 的多项式,则 $\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}C_{n}^{l}g(x+n-l)$=0.

[证明] 这是关于多项式的差分中的一个熟知的结论,一个常规的证明是对 n 归纳.

当 n=1 时,g(x)是一个常数多项式,因此

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}C_{n}^{l}g(x+n-l)=C_{1}^{0}g(x+1)-C_{1}^{1}g(x)=g(x+1)-g(x)=0\,.$$

命题对 n=1 成立.

现设命题对 n-1(n>1)的情形成立,对于 n 的情形,令 h(x)=g(x+1)-g(x),则 h(x)的次数小于 g(x)的次数,由归纳假设可知 $\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l}C_{n-1}^{l}h(x+n-1-l)$=0,即有

$$\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l}C_{n-1}^{l}(g(x+n-l)-g(x+n-1-l))=0$$

$$\Rightarrow C_{n-1}^{0}g(x+n)+\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{l}(C_{n-1}^{l-1}+C_{n-1}^{l})g(x+n-l)-(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}g(x)=0$$

$$\Rightarrow\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}C_{n}^{l}g(x+n-l)=0$$

引理二获证.

[引理三] 若 n 有两个不同的素因子,则 gcd($C_{n}^{1},C_{n}^{2},\cdots,C_{n}^{n-1}$)=1.

[证明] 若否,则存在素数 p,使得 p| gcd($C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^{n-1}$).特别地,有 p| $C_n^1 = n$,设 $L_p(n)=\alpha$,由于 n 有两个不同的素因子,因此,$1<p^\alpha<n$,这表明组合数 $C_n^{p^\alpha-1}$ 和 $C_n^{p^\alpha}$ 都在 $C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^{n-1}$ 中出现,它们都是 p 的倍数,于是,

$$p \mid (C_n^{p^\alpha} - C_n^{p^\alpha-1}) = C_{n-1}^{p^\alpha-1},$$

这与引理一得结论冲突.

回到原题,我们对 n=1 或 p^α(素数的幂,α为正整数)构造满足条件的多项式.当 n=1,时,f(x)=$\frac{1}{2}$ 即符合要求;当 n=p^α时,令

$$f(x)=\frac{1}{p}\binom{x-1}{p^\alpha-1}=\frac{1}{p}\cdot\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-p^\alpha+1)}{(p^\alpha-1)!},$$

它是一个 p^α-1(=n-1)次的多项式,由引理一可知,它符合要求.

最后,我们证明若 n 有两个不同的素因子,则不存在符合要求的多项式.

事实上,如果存在满足条件的多项式 f(x),那么,在引理二中,令 g=f,x =-k(这里 1≤k≤n)可知 $C_n^k f(0) = \sum_{0\le l\le n, l\ne k}(-1)^{k-l}C_n^l f(-k+l)$,而由条件(1),数 f(-k),…,f(-1);f(1),…,f(n-k)都是整数,所以,对 1≤k≤n,数 $C_n^k f(0)$ 都为整数.

由引理三的结论结合 Bezout 定理知,存在整数 $u_1,\ldots,u_n$,使得 $\sum_{k=1}^n u_k C_n^k$ =1.

导致 f(0)=($\sum_{k=1}^n u_k C_n^k$)f(0)= $\sum_{k=1}^n u_k C_n^k f(0)$ 为整数,与条件(1)不符.

问题获解.

解法二:答案为 n=p^α,这里 p 为素数,α为非负整数.先证一个引理.

[引理四] 对任意 n 个整数 $a_1,\ldots,a_n$,存在一个次数小于 n 的整值多项式 P(x),使得对 1≤k≤n,都有 $P(k)=a_k$.

对 n 归纳来处理,当 n=1 时,令 $P(x)=a_1$ 即可,现设命题对 n-1(n>1)时命题成立,即存在整值多项式 $P_1(x)$,对 1≤k≤n-1,都有 $P_1(k)=a_{k-1}$,令 $P(x)=P_1(x)+$

$(a_n-P_1(n))\binom{x-1}{n-1}$,结合对 $1\le k\le n-1$,都有 $\binom{k-1}{n-1}=0$,而 $\binom{n-1}{n-1}=1$.即可实现归纳过渡.

现在,如果对 n 存在符合要求的多项式 f(x),那么由引理四可构造一个次数小于 n-1 的整值多项式 P(x),使得 $1\le k\le n-1$,都有 P(k)=f(k),此时,1,2,…,n-1 都是多项式 f(x)-P(x)的根,结合 P(x)为整值多项式,可知 f(x)-P(x)也是一个符合条件的多项式,因此,为解决中的问题,我们可设 $f(x)=c\prod_{i=1}^{n-1}(x-i)$,这里 c 是一个有理数常数.设 $c=\frac{p}{q}$ 是最简分数表示,其中正整数 q 的素因数分解为 $q=\prod_{j=1}^{d}p_j^{\alpha_j}$.

一方面,由于 f(x)满足条件,因此,f(0)不是整数,故 $q\nmid(-1)^n(n-1)!$,因此存在某个 j,使得 $p_j^{\alpha_j}\nmid(-1)^n(n-1)!$,这说明

$$\prod_{i=1}^{n}(p_j^{\alpha_j}-i)\equiv(-1)^n(n-1)!\not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p_j^{\alpha_j})$$

于是,f($p_j^{\alpha_j}$)不为整数,有条件(1),可知 n| $p_j^{\alpha_j}$,即 n 为素数的幂.

另一方面,当 $n=p^{\alpha}$时,令 $f(x)=\frac{1}{p}\binom{x-1}{p^{\alpha}-1}=\frac{1}{p}\cdot\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-p^{\alpha}+1)}{(p^{\alpha}-1)!}$,利用引理一的结论可知它是一个符合要求的多项式.

3. 设ω是△ABC 的外接圆,一条平行于 BC 的动直线 l 分别交线段 AB,AC 于点 D,E,交圆ω于点 K,L(点 D 介于 K 和 E 之间),γ_1 是与线段 KD,BD 和圆ω都相切的圆,γ_2 是与线段 LE,CE 和圆ω都相切的圆.求 l 变化时,圆γ_1 和γ_2 的内公切线的交点的轨迹.

解:设 P 为圆γ_1 和γ_2 的内公切线的交点,直线 m 是∠BAC 的角平分线,由于 KL//BC,故 m 也是∠KAL 的角平分线.

现在将平面上的先作关于直线 m 的对称变换,然后,以 A 为反演中心,以

$\sqrt{AK \cdot AL}$ 为反演半径作反演变换,该合成变换记为Φ.在变换Φ下,各几何元素的变换情况如下:点 K↔点 L; 直线 KL↔圆ω; 射线 AB↔射线 AC; 点 B↔点 E; 点 C↔点 D; 线段 BD↔线段 EC; 弧 BK↔线段 EL; 弧 CL↔线段 DK.

记 O_1,O_2 分别是圆 γ_1 和 γ_2 的圆心,由于在题给的条件下,圆 γ_1 和 γ_2 都是唯一确定的,因此,依照上面的对应关系,可知在变换Φ下,它们相互对应,于是射线 AO_1 与 AO_2 关于直线 m 对称,得 $\angle O_1AB=\angle O_2AC$,故 $\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$,这里 ρ_1,ρ_2 分别是圆 γ_1 和 γ_2 的半径.而由于 P 为圆 γ_1 和 γ_2 的内公切线的交点,它是线段 O_1O_2 上的点,并且 $\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$,所以,P 在 $\angle O_1AO_2$ 的角平分线上,也就是在∠BAC 的角平分线上.

考虑极限情形结合连续性即可知道点 P 的轨迹是∠BAC 的角平分线内部的点.

每题 7 分

共 4 小时 30 分钟

第 4 届罗马尼亚大师杯数学竞赛

第二天:2011 年 2 月 26 日,星期六,布加勒斯特

语言:中文

4. 对正整数 $n=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$,设 $\Omega(n)=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$ 是 n 所有素因数的个数,这里的素因数依重数求和得到,定义 $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$ (例如 $\lambda(12)=\lambda(2^2\cdot 3)=(-1)^{2+1}=-1$).证明:

(1) 存在无穷多个正整数 n,使得 $\lambda(n)=\lambda(n+1)=+1$;

(2) 存在无穷多个正整数 n,使得 $\lambda(n)=\lambda(n+1)=-1$.

证明:注意到,对任意正整数 m,n,有$\Omega(mn)=\Omega(m)+\Omega(n)$,即$\Omega$是一个完全可加函数,因此,$\lambda(mn)=\lambda(m)\lambda(n)$,知$\lambda$是一个完全可乘函数,故对任意素数 p,都有$\lambda(p)=-1$,而对任意正整数 k,都有$\lambda(k^2)=\lambda(k)^2=1$.

(1) 佩尔方程 $x^2-6y^2=1$ 有无穷多个正整数解(x_m,y_m),它们可由 $x_m+y_m\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^m$ 定义,由于$\lambda(6y^2)=\lambda(y^2)=1$,且$\lambda(6y^2+1)=\lambda(x^2)=1$,故该方程的每一组解都对应(1)中的一个 $n(=6y^2)$.

另解:若正整数 n 满足$\lambda(n)=\lambda(n+1)$,则$\lambda((2n+1)^2-1)=\lambda(4n(n+1))=\lambda(4)\lambda(n)\lambda(n+1)=1$,而$\lambda((2n+1)^2)=1$,这样,从 n=1 出发可递推构造出无穷多个满足(1)的 n.

(2) 佩尔方程 $3x^2-2y^2=1$ 有无穷多组正整数解(x_m,y_m),它们可由 $x_m\sqrt{3}+y_m\sqrt{2}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2m+1}$ 定义,而$\lambda(2y^2)=\lambda(2)\lambda(y^2)=-1=\lambda(3)\lambda(x^2)=\lambda(3x^2)=\lambda(2y^2+1)$,同(1)可知命题成立.

另解:注意到 n=2 满足条件,如果命题不成立,那么存在最大的正整数 n,使得$\lambda(n-1)=\lambda(n)=-1$,而当 $m\geq n$ 时,$\lambda(m)$与$\lambda(m+1)$不同时为 1.于是,$\lambda(n+1)=1$,故$\lambda(n(n+1))=\lambda(n)\lambda(n+1)=-1$,进而$\lambda(n^2+n+1)=1$,得$\lambda(n^3-1)=\lambda(n-1)\lambda(n^2+n+1)=-1$,而$\lambda(n^3)=\lambda(n)^3=-1$,与 n 最大矛盾(因为 $n\geq2$,故 $n^3-1>n-1$).

5. 对每个正整数 $n\geq3$,试确定平面上具有下述性质的 n 个不同的点 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 之间的关系:对任意一对不同的点 X_i,X_j,都存在$\{1,2,\ldots,n\}$的一个排列σ,使得对所有 $1\leq k\leq n$,都有 $d(X_i,X_k)=d(X_j,X_{\sigma(k)})$.这里 $d(X,Y)$表示点 X 和 Y 之间的距离.

解:我们先证明所有的点共圆.

建立恰当的直角坐标系,使得点 X_k 对应的从原点出发的向量 x_k 满足 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\vec{0}$.利用 $d(X_l,X_k)^2=\|x_l-x_k\|^2=(x_l-x_k)\bullet(x_l-x_k)=\|x_l\|^2-2x_l\bullet x_k+\|x_k\|^2$,因此,

$$\sum_{k=1}^{n} d(X_i,X_k)^2 = n\|x_i\|^2 - 2x_i \bullet \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 = n\|x_i\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d(X_j,X_{\sigma(k)})^2 = n\|x_j\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\|x_{\sigma(k)}\|^2 .$$

所以,对不同的 i,j,都有$\|x_i\|^2=\|x_j\|^2$,因此,这些点共圆(它们的圆心为 O(0,0)).

现在设 m 是这 n 个点中任意两点的角距离的最小值,那么角距离等于 m 的两个点在圆 O 上必为相邻的两点,将这样的点对之间连一条边,构成一个图 G,依条件,G 是一个正则图,且每个顶点的度都是 1 或者 2.

如果 n 为奇数,由于$\sum_{k=1}^{n}\deg(X_k)=2|E|$,知 deg(G)=2,即每个点都与它相邻的两个点连边,此时它们构成一个正 n 边形.

如果 n 为偶数,同上当 deg(G)=2 时,仍然构成正 n 边形.但也可能是 deg(G)=1,此时,设 M 是任意两点的角距离中第 2 小的值,角距离为 M 的两点在圆上仍然是相邻的,将距离为 M 的点对之间连一条边得到图 G′,类似讨论可知 deg(G′)=1,于是,这时,所得的 n 边形的边长交替相等(即奇数边长度相等,且偶数边长度相等).

直接验证可知,具有上述性质的 n 个点符合要求.

6. 一个 2011×2011 的方格表的每个小方格都被标上整数 1,2,…,2011^2 中的某个数,使得其中的每个数都恰好用了一次.现在将表格的左右边界视为相同,上下边界也视为相同,依通常的方式得到一个圆环面(可视为一个“甜甜圈”的表面).求最大的正整数 M,使得对任意标数方式,都存在两个相邻的小方格(指有公共边的小方格),它们中所填写的数之差(大的减小的)至少为 M.

注: 用坐标表示,小方格(x,y)和(x′,y′)相邻是指:x=x′,y-y′≡±1(mod 2011)或者 y=y′,x-x′≡±1(mod 2011).

解:设 N=2011,我们对一般的 N×N 的表格求解相同的问题.

当 N=2 时,结论是平凡的,所求的 M=2,例子如下:

1	2
3	4

考虑 $N\geq 3$ 的情形,我们证明 $M\geq 2N-1$.

从最初表格的每个小方格都是白色的状态开始,当表格中依次写入数 1,2,…时,并将被标号的小方格染成黑色,在标上数 k,且第一次出现下面的情形时,停止上述操作:表格中的每一行都有至少两个黑格,或者表格中每一列都有至少两个黑格.这表明在标上 k 之前,必有一行且必有一列中至多有一个黑格.

不妨设,当标上 k 时,每一行都出现了两个黑格.这时表格中至多有一行中的格子都是黑色,因为如果有两行都是全黑格,那么,若 k 标在这两行中的某个小方格内,则此前每行中已有两个黑格(这里用到 $N\geq 3$);若 k 标在其它行中,则此时每一列中都已有两个黑格.现在我们将有一个相邻格为白色的黑格染成红色,那么由于除掉可能存在的全黑行外,其余每行都有两个黑格和一个白格,因此,这些行中都至少有两个红色格.进一步,与可能存在的全黑行相邻的行中必有一个为白格,所以,该全黑行中至少有一个黑格被染成红色.依此可知,红色方格数$\geq 2(N-1)+1=2N-1$.

因此,所有红色方格中的最小标号至多为 $k+1-(2N-1)$,当该方格相邻的白色格中被标号(所标的数至少为 $k+1$)后,这两个相邻格之间的差$\geq 2N-1$.

由于题中只需给出 $N=2011$ 的例子,我们只需构造出形如 $N=2n+1(\geq 2)$的例子,下表给出了一个使 $M=2N-1$ 的例子:

$(2n+1)^2-2$	$(2n+1)^2-9$	…		$n(2n-1)+1$		…	$(2n+1)^2-10$	$(2n+1)^2-3$
$(2n+1)^2-8$		…	$n(2n-1)+2$		$n(2n-1)$	…		$(2n+1)^2-11$
⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	$2n(n+1)+3$	⋮
	$2n^2$	…	8	2	6	…	$2n(n-1)+2$	$2n(n+1)+2$
$2n^2+1$		…	3	1	5	…		$2n(n+1)+1$

	$2n^2+2$	…	10	4	12	…	$2n(n+1)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$(2n+1)^2-7$			$n(2n+1)$		$n(2n+1)+2$	…		$(2n+1)^2-4$
$(2n+1)^2-1$	$(2n+1)^2-6$			$n(2n+1)+1$			$(2n+1)^2-5$	$(2n+1)^2$

n=2 的例子是

23	16	7	15	22
17	8	2	6	14
9	3	1	5	13
18	10	4	12	21
24	19	11	20	25

对应的 M=9.

因此,题中所求的 M=4021.

每题 7 分

共 4 小时 30 分钟

2012 罗马尼亚大师杯数学奥林匹克

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2012)06-0025-05

2012 年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克于 2 月 29 日—3 月 4 日在布加勒斯特举行。在 IMO 上成绩突出的中国、俄罗斯、美国及罗马尼亚周边的一些国家受邀参加，参赛队伍共 15 支。

受中国数学奥林匹克委员会委派，北京市组队代表中国参加了此次竞赛。领队是刘来福（北京师范大学），副领队是李秋生（人大附中），六名队员：陈景文、魏宏济、高奕博、赵伯钧、段柏延（人大附中），高子珺（北京四中）。

考试分两天进行，每天 4 小时 30 分钟考 3 道题。每题 7 分。

在所有参赛的 90 名选手中有 7 人获得金牌，11 人获得银牌，15 人获得铜牌. 金、银、铜牌分数线依次是 28 分、22 分、15 分。中国队获得奖牌的同学是：陈景文（金牌，30 分），魏宏济（金牌，28 分），高奕博（银牌，25 分），段柏延（银牌，22 分）。

第 一 天

1. 在一群有限人数的男孩和女孩中，称一些男孩构成一个"男孩友善集"，如果每个女孩都认识其中至少一个男孩；称一些女孩构成一个"女孩友善集"，如果每个男孩都认识其中至少一个女孩. 证明：男孩友善集的个数与女孩友善集的个数具有相同的奇偶性.（认识关系是相互的）

2. 已知在非等腰 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别是边 BC、CA、AB 的中点，直线 BE 交 $\triangle BCF$ 的外接圆于点 P（不同于点 B），直线 AD 交 $\triangle ABE$ 的外接圆于点 Q（不同于点 A），直线 DP 与 FQ 交于点 R. 证明：$\triangle ABC$ 的重心 G 在 $\triangle PQR$ 的外接圆上.

3. 已知每个正整数都被染上红色或蓝色. 函数 $f:\mathbf{Z}_+\rightarrow\mathbf{Z}_+$ 满足下列两个条件：

(1) 若 $x\leqslant y$，则 $f(x)\leqslant f(y)$；

(2) 若正整数 x、y、z（可以相等）颜色相同，且 $x+y=z$，则 $f(x)+f(y)=f(z)$.

证明：存在正数 a，使得 $f(x)\leqslant ax$ 对一切正整数 x 成立.

第 二 天

4. 证明：存在无穷多个正整数 n，使得 $2^{2^n+1}+1$ 能被 n 整除，但 2^n+1 不能被 n 整除.

5. 给定整数 $n\geqslant 3$ 以及 $\left[\frac{(n+2)^2}{3}\right]$ 种颜色. 将一个 $n\times n$ 方格表中的每个方格都染上其中一种颜色，且每种颜色至少用一次. 证明：方格表中一定存在一个 1×3 或者 3×1 的小长方形，其三个方格染上了三种不同的颜色.

【注】$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

6. 已知 I、O 分别是 $\triangle ABC$ 的内心、外心，圆 ω_A 过点 B 和 C，并且与 $\triangle ABC$ 的内切圆相切. 类似地定义圆 ω_B 和圆 ω_C. 设圆 ω_B 和圆 ω_C 交于不同的两点 A、A'，类似地定义点 B' 和 C'. 证明：直线 AA'、BB'、CC' 交于一点，且交点在直线 IO 上.

万方数据

参考答案

第一天

1. 证法1 如果男孩子集 X 中任何一个男孩与女孩子集 Y 中任何一个女孩都不认识,则称 X 与 Y 是“分离的”.

考虑所有分离子集对 (X,Y) 的数量 S.

对于给定的男孩子集 X,记 Y_X 为与 X 分离的元素个数最大的女孩子集,则与 X 构成分离子集对的女孩子集共有 $2^{|Y_X|}$ 个.

于是,$S=\sum\limits_{X}2^{|Y_X|}$.

注意到,$2^{|Y_X|}$ 是奇数当且仅当 Y_X 是空集,也即 X 是男孩友善集,因此,S 与男孩友善集个数的奇偶性相同.

同理,S 与女孩友善集个数的奇偶性相同.

故男孩友善集的个数与女孩友善集的个数具有相同的奇偶性.

证法2 记所有男孩组成集合 B,所有女孩组成集合 G.

下面对 $|B|+|G|$ 进行归纳.

当 $|B|+|G|=0$ 时,结论显然成立.

假设当 $|B|+|G|\leqslant k$ 时,结论都成立.

当 $|B|+|G|=k+1$ 时,若 $B=\varnothing$,则结论成立.

下设 $B\neq\varnothing$.

取 B 中男孩 b,记 $B'=B/\{b\}$,所有不认识 b 的女孩组成集合 G'.

首先,$B'\cup G$ 中的男孩友善集仍然是 $B\cup G$ 中的男孩友善集.

其次,如果 $B\cup G$ 中的男孩友善集不是 $B'\cup G$ 中的男孩友善集,则其一定是 $B'\cup G'$ 中的男孩友善集再加上男孩 b. 于是,$B\cup G$ 中的男孩友善集个数是 $B'\cup G$ 中的男孩友善集个数与 $B'\cup G'$ 中的男孩友善集个数之和.

同理,$B\cup G$ 中的女孩友善集个数是 $B'\cup G$ 中的女孩友善集个数与 $B'\cup G'$ 中的女孩友善集个数之差.

由归纳假设,$B'\cup G$ 中的男孩友善集个数与女孩友善集个数具有相同的奇偶性,$B'\cup G'$ 中的男孩友善集个数与女孩友善集个数也具有相同的奇偶性.

故 $|B|+|G|=k+1$ 时,结论也成立.

2. 如图1,在射线 GF 上取点 T,使得 $GF\cdot GT=GQ\cdot GD$.

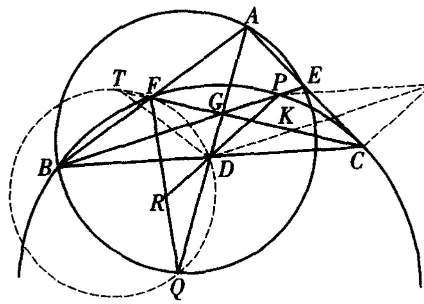


图1

从而,F、D、Q、T 四点共圆.

于是,$\angle FQG=\angle GTD=\angle CTD$.

作线段 $PM \mathrel{\underline{/\!/}} BD$,设 DM 交 GC 于点 K.

易知,$\angle DPB=\angle CMD$.

记 $GE=x,GF=y$.

由 $GP\cdot GB=GC\cdot GF$,得 $GP=\frac{y^2}{x}$.

同理,$GT=\frac{x^2}{y}$.

于是,$DM=BP=BG+GP=2x+\frac{y^2}{x}$,

$CT=CG+GT=2y+\frac{x^2}{y}$.

又 $DK=\frac{1}{2}BG=GE=x$,

$CK=\frac{1}{2}CG=GF=y$,

则 $DK\cdot KM=DK(DM-DK)$

$=x\left(2x+\frac{y^2}{x}-x\right)=x^2+y^2=TK\cdot KC$

$\Rightarrow T$、D、C、M 四点共圆

万方数据

$\Rightarrow \angle CTD=\angle CMD$

$\Rightarrow \angle RQG=\angle CTD=\angle CMD=\angle RPG$

$\Rightarrow G、P、Q、R$ 四点共圆.

3. 对于整数 $x、y$，记 $[x,y]$ 表示所有满足 $x\leqslant t\leqslant y$ 的整数 t，并称其长度为 $y-x$.

如果 $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}$ 对任意同色整数 $x、y$ 都成立，则取 $a=\max\left\{\frac{f(r)}{r},\frac{f(b)}{b}\right\}$，其中 $r、b$ 分别是染上红色、蓝色的整数.

于是，$\frac{f(x)}{x}\leqslant a$，即 $f(x)\leqslant ax$ 对一切正整数 x 成立.

下面考虑存在两个同色整数 $x、y$ 使得 $\frac{f(x)}{x}\neq\frac{f(y)}{y}$ 的情形，不妨设 $x、y$ 均为红色.

(1) 若某个长度为 xy 的区间中所有整数都是红色的，设为 $[k,k+xy]$. 则

$f(k+xy)=f(k+x(y-1))+f(x)$

$=\cdots=f(k)+yf(x)$，

$f(k+xy)=f(k+y(x-1))+f(y)$

$=\cdots=f(k)+xf(y)$.

于是，$yf(x)=xf(y)$，矛盾.

(2) 若某个长度为 xy 的区间中所有整数都是蓝色的，设为 $[k,k+xy]$. 取

$D=\max\{f(k),f(k+1),\cdots,f(k+xy)\}$，

则对任意整数 $z\geqslant k$，有

$f(z+1)-f(z)\leqslant D$.

事实上，取不超过 z 的最大蓝色整数 b_1，由 (1) 知

$z-b_1\leqslant xy$.

在区间 $[b_1+k,b_1+k+xy]$ 中也必有蓝色整数 (设为 b_2)，则 $b_2>b_1$.

由 b_1 的取法知 $b_2>z$.

注意到，$b_2-b_1\in[k,k+xy]$ 是一个蓝色整数.

则 $f(z+1)-f(z)\leqslant f(b_2)-f(b_1)$

$=f(b_2-b_1)\leqslant D$.

取 $a=\max\left\{\frac{f(1)}{1},\frac{f(2)}{2},\cdots,\frac{f(k)}{k},D\right\}$.

当 $1\leqslant x\leqslant k$ 时，显然有 $f(x)\leqslant ax$ 成立.

当 $x>k$ 时，有

$f(x)\leqslant f(k)+(x-k)D$

$\leqslant ak+(x-k)a=ax$

也成立，满足要求.

(3) 若对于任意一个长度为 xy 的区间，其中都既有蓝色整数，也有红色整数，取红色整数 $R\geqslant 2xy$ 且 $R+1$ 是蓝色整数.

取 $D=\max\{f(R),f(R+1)\}$.

则对任意整数 $z\geqslant 2xy$，有

$f(z+1)-f(z)\leqslant D$.

事实上，取不超过 z 的最大红色整数 r 和小于 r 的最大蓝色整数 b，则

$0<z-b=(z-r)+(r-b)\leqslant 2xy$.

令 $t=b+R+1$. 则

$t\geqslant b+2xy+1\geqslant z+1$.

若 t 是蓝色的，则

$f(t)=f(b)+f(R+1)\leqslant f(b)+D$

$\Rightarrow f(z+1)-f(z)\leqslant f(t)-f(b)\leqslant D$;

若 t 是红色的，注意到 $b+1$ 也是红色的，则

$f(t)=f(b+1)+f(R)\leqslant f(b+1)+D$

$\Rightarrow f(z+1)-f(z)\leqslant f(t)-f(b+1)\leqslant D$.

这说明，对任意整数 $z\geqslant 2xy$，有

$f(z+1)-f(z)\leqslant D$.

以下同情形 (2) 即可证得结论.

第 二 天

4. (1) 首先说明：$n=57$ 是一个满足要求的正整数.

一方面，因为

$2^{57}+1\equiv(2^9)^6\times2^3+1$

$\equiv(-1)^6\times2^3+1\equiv9\pmod{19}$，

所以，$2^{57}+1$ 不能被 57 整除.

另一方面，因为

$2^{57}+1\equiv(2^4)^{14}\times 2+1\equiv(-2)^{14}\times 2+1$

$\equiv(2^4)^3\times 2^3+1\equiv 9 \pmod{18}$,

则 $2^{2^{57}+1}+1\equiv 2^9+1\equiv 0 \pmod{19}$，同时，

$2^{2^{57}+1}+1\equiv 2+1\equiv 0 \pmod 3$,

所以，$2^{2^{57}+1}+1$ 能被 57 整除.

(2)下面证明：若正整数 n 满足要求，则 $t=2^n+1$ 也满足要求.

事实上，由 $2^{2^n+1}+1$ 能被 n 整除，可设

$2^{2^n+1}+1=nk$（k 为奇数）.

则 $2^{2^t+1}+1=2^{nk}+1$ 能被 $t=2^n+1$ 整除.

由 2^n+1 不能被 n 整除，可设

$2^n+1=nk+r(1\leqslant r\leqslant n-1)$.

注意到，

$2^t+1=2^{2^n+1}+1=2^{nk+r}+1$

$=(2^n+1)[2^{(k-1)n+r}-2^{(k-2)n+r}+\cdots+(-1)^{k-1}2^r]+(-1)^k2^r+1$.

而 $1\leqslant|(-1)^k2^r+1|<2^n+1=t$，故 2^t+1不能被 t 整除.

综合(1)、(2)，知存在无穷多个正整数满足要求.

5. 若一个 1×3 或者 3×1 的小长方形的三个方格中至少有两个是同色的，则称此小长方形被该颜色“占据”了. 显然，每个小长方形最多被一种颜色占据.

先证明两个引理.

引理 1　在一行中，若某种颜色（不妨设为红色）染了 p 个方格，则这种颜色最多占据了这一行中的 $\frac{3p}{2}-1$ 个小长方形.

引理 1 的证明　对于每个被红色占据的小长方形，称其中的红色方格被计入了一次. 那么，每个红色小方格最多被计入三次，而且最左端的红色方格最多被计入两次，最右端的红色方格也是如此. 于是，所有红色小方格最多被计入了 $3p-2$ 次. 故被红色占据的小长方形最多有 $\frac{3p-2}{2}$ 个.

引理 2　在整个方格表中，若某种颜色（不妨设为红色）染了 q 个方格，则这种颜色最多占据了 $3(q-1)$ 个小长方形.

引理 2 的证明　若 $q=1$，则结论显然成立.

若 $q>1$，设红色方格分布在 k 行和 l 列中，显然，$k+l\geqslant 3$.

由引理 1，知被红色占据的 1×3 小长方形不超过 $\frac{3q}{2}-k$ 个，被红色占据的 3×1 小长方形不超过 $\frac{3q}{2}-l$ 个. 故被红色占据的长方形总数不超过 $3q-(k+l)\leqslant 3(q-1)$ 个.

回到原题.

记 $N=\left[\frac{(n+2)^2}{3}\right]$，用 n_i 表示第 i 种颜色染的方格数量. 则所有颜色占据的小长方形的总数不超过

$$\sum_{i=1}^{N}3(n_i-1)=3\sum_{i=1}^{N}n_i-3N$$
$$=3n^2-3N<3n^2-(n^2+4n)$$
$$=2n(n-2).$$

而 $n\times n$ 方格表中有 1×3 或者 3×1 的小长方形共 $2n(n-2)$ 个，故其中至少有一个没有被任何颜色占据，也即它的三个方格染上了三种不同的颜色.

6. 如图 2，记 $\triangle ABC$ 的内切圆为 Γ，设其与边 BC、CA、AB 分别切于点 A_1、B_1、C_1. 设圆

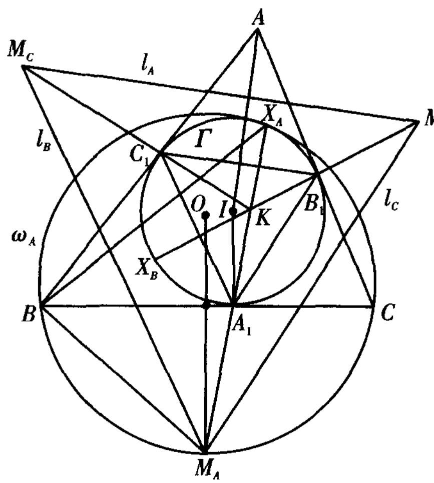


图 2

Γ 与圆 ω_A 切于点 X_A，延长 X_AA_1 交圆 ω_A 于点 M_A.

因圆 Γ 与 ω_A 关于切点 X_A 成位似关系，所以，圆 ω_A 在点 M_A 处的切线与 BC 平行.

因此，M_A 是弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点.

于是，$\angle M_ABC=\angle M_AX_AB$.

故 $\triangle M_ABA_1 \backsim \triangle M_AX_AB$.

从而，$M_AB^2=M_AA_1\cdot M_AX_A$.

这表明，点 M_A 位于点圆 B 与圆 Γ 的根轴 l_B 上.

同理，点 M_A 也位于点圆 C 与圆 Γ 的根轴 l_C 上.

类似地定义点 X_B、X_C、M_B、M_C 和直线 l_A.

可知直线 l_A、l_B、l_C 构成 $\triangle M_AM_BM_C$.

因为直线 l_A 与 B_1C_1 都垂直于 AI，所以，

$l_A /\!/ B_1C_1$.

同理，$l_B /\!/ C_1A_1$，$l_C /\!/ A_1B_1$.

因此，$\triangle M_AM_BM_C$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 位似.

设其位似中心为 K，位似比为 $k=\frac{M_AK}{A_1K}$.

则直线 M_AA_1、M_BB_1、M_CC_1 均过点 K.

因为 X_A、X_B、A_1、B_1 四点共圆，所以，

$A_1K\cdot KX_A=B_1K\cdot KX_B$.

上式两边同时乘以 k 得到

$M_AK\cdot KX_A=M_BK\cdot KX_B$.

这表明，点 K 位于圆 ω_A 和圆 ω_B 的根轴 CC' 上.

同理，点 K 也位于直线 AA' 和 BB' 上.

下面证明：O、I、K 三点共线.

设点 I 在前述位似变换下的对应点为 O'. 则

$O'M_A /\!/ IA_1$.

因此，$O'M_A\perp BC$.

因为 M_A 是弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，所以，点 O' 位于边 BC 的中垂线上.

同理，点 O' 也位于边 AB 的中垂线上.

因此，点 O' 就是外心 O.

故直线 AA'、BB'、CC' 交于一点 K，且点 K 位于直线 OI 上.

（李秋生　提供）

2013 罗马尼亚大师杯数学竞赛

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2013)06-0025-03

第一天

1. 任给正整数 a,定义整数数列 $x_1,x_2,\cdots$,满足

$$x_1=a,x_n=2x_{n-1}+1(n\geqslant1).$$

若 $y_n=2^{x_n}-1$,试确定整数 k 的最大值,使得存在某个正整数 a 满足 $y_1,y_2,\cdots,y_k$ 均为质数.

2. 是否存在 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 上的函数对 (g,h) 满足如下性质:若对函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 使得对所有的 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f(g(x))=g(f(x)),$$

$$f(h(x))=h(f(x)),$$

则 f 只能为恒同函数,即 $f(x)\equiv x$?

3. 已知四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,直线 AB 与 CD 交于点 P,AD 与 BC 交于点 Q,对角线 AC 与 BD 交于点 R. 若 M 是线段 PQ 的中点,K 为线段 MR 与 $\odot O$ 的交点,证明:$\odot O$ 与 $\triangle KPQ$ 的外接圆相切.

第二天

4. 设 P、P' 是平面上相交的两个凸四边形区域,O 为其相交区域上的一点.

假设对任意一条经过 O 的直线在区域 P 中截得的线段比在区域 P' 中截得的线段长. 问:是否有可能区域 P' 的面积与区域 P 的面积比大于 1.9?

5. 记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数. 给定一个正数 $k(k\geqslant2)$,令 $a_1=1$,对任意的整数 $n(n\geqslant2)$,a_n 为方程

$$x=1+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sqrt[k]{\frac{x}{a_i}}\right]$$

中大于 a_{n-1} 的最小解. 证明:所有的质数均在数列 $a_1,a_2,\cdots$ 中.

6. 已知 $1,2,\cdots,2n$ 放置在一个正 $2n$ 边形的各个顶点上. 记一次运动是指选取 $2n$ 边形一条边的两个顶点上的两数交换. 假设经有限次运动后每对数恰好相互交换一次. 证明:存在有没被选择的边.

参考答案

第一天

1. 若 y_i 是质数,则 x_i 也是质数.

否则,若 $x_i=1$,则 $y_i=1$ 不是质数;若 $x_i=mn$(整数 m、$n>1$),则

$$(2^m-1)\mid(2^{x_i}-1),$$

即 x_i、y_i 是合数.

下面用反证法证明:对任意的奇质数 a,y_1、y_2、y_3 中至少有一个为合数.

否则,x_1、x_2、x_3 均为质数.

由 $x_1\geqslant3$ 是奇数,知

$x_2>3$,且 $x_2\equiv3\pmod 4$.

因此,$x_3\equiv7\pmod 8$.

故 2 是 x_3 的二次剩余,即存在 $x\in\mathbf{N}_+$,使得

$$x^2\equiv2\pmod{x_3}.$$

所以,$2^{x_2}=2^{\frac{x_3-1}{2}}\equiv x^{x_3-1}\equiv1\pmod{x_3}$.

于是,$x_3\mid y_2$.

又 $x_2>3$,则 $2^{x_2}-1>2x_2+1=x_3$.

所以,y_2 是合数.

最后,若 $a=2$,则

$y_1=3,y_2=31$,且 $23\mid y_3=(2^{11}-1)$.

所以,$k=2$.

2. 存在这样的函数对.

首先,建立一个 $\mathbf{R}$ 与单位闭区间的双射.

从而,只需在单位区间上存在函数对即可.

给出一个特例:取正实数 α、β,令

$g(x)=\max\{x-\alpha,0\}$,

$h(x)=\min\{x+\beta,1\}$.

对集合 $S\subseteq[0,1]$,若对所有的 f 满足

$f(g(x))=g(f(x))$,

$f(h(x))=h(f(x))$,

且 $f(S)\subseteq S$,则称该集合为"不变集".

注意到,不变集的交、并集仍是不变集,不变集关于函数 g、h 的原像也是不变集,这表明,若 S 是不变集,原像 $T=g^{-1}(S)$,则

$g(f(T))=f(g(T))\subseteq f(S)\subseteq S$,

即 $f(T)\subseteq T$.

下面利用数学归纳法证明一个结论:

若 $\alpha+\beta<1$,m、$n\in\mathbf{N}$,满足

$0\leqslant n\alpha-m\beta\leqslant 1$,

则区间 $[0,n\alpha-m\beta]$ 是不变集.

首先,$\{0\}$ 是不变集.

由于 f 能与 g 交换,则

$g(f(0))=f(g(0))=f(0)$,

即 $f(0)$ 是 g 的不动点.

所以,$f(0)=0$.

故当 $m=n=0$ 时,结论成立.

假设对 m、n 存在 m'、n' 满足

$m'+n'<m+n$

且 $[0,n'\alpha-m'\beta]$ 是不变集.

则数 $(n-1)\alpha-m\beta$ 与 $n\alpha-(m-1)\beta$ 至少有一个属于 $(0,1)$.

不妨设 $(n-1)\alpha-m\beta\in(0,1)$. 则

$[0,n\alpha-m\beta]=g^{-1}([0,(n-1)\alpha-m\beta]$.

因此,$[0,n\alpha-m\beta]$ 是不变集.

再证明:若

$$\alpha+\beta<1,0<\alpha\notin\mathbf{Q},\beta=\frac{1}{k}(k>1),$$

则对所有的 $0<\delta<1$,区间 $[0,\delta]$ 是不变集.

事实上,由前面结论,对所有 $n(n\in\mathbf{N})$,有 $[0,n\alpha(\bmod 1)]$ 是不变集,而 $n\alpha(\bmod 1)$ 在 $[0,1]$ 中稠密,特别地,

$$[0,\delta]=\bigcap_{n\alpha(\bmod 1)>\delta}[0,n\alpha(\bmod 1)]$$

是不变集.

同理,知 $[\delta,1]$ 也是不变集.

故 $\{\delta\}(0<\delta<1)$,$\{0\}$、$\{1\}$ 均是不变集.

所以,f 是恒同函数.

3. 注意到,P、Q、R 是(关于 $\odot O$ 的)QR、RP、PQ 的极点.

从而,$OP\perp QR$,$OQ\perp RP$,$OR\perp PQ$.

所以,R 是 $\triangle OPQ$ 的垂心.

若 $MR\perp PQ$,则 M、R、O 三点共线,且 $\triangle PQR$ 关于这条直线对称. 结论显然成立.

否则,过点 O 作直线 MR 的垂线,垂足为 V,直线 OV 与 PQ 交于点 U.

由 $OU\perp MR$,U 为线段 UR 的一个端点,知 UK 是 $\odot O$ 的切线.

因此,只需证明:$UK^2=UP\cdot UQ$.

事实上,由 $\triangle OKU$ 是直角三角形得

$UK^2=UV\cdot UO$.

延长 RM 与 $\triangle OPQ$ 的外接圆圆 Γ 交于点 R'.

由 $\angle OVR'=90°$,知点 V 也在圆 Γ 上.

从而,$UP\cdot UQ=UV\cdot UO=UK^2$.

第二天

4. 可能.

对于任意的 $\varepsilon>0$,构造区域 P' 与区域 P,使二者面积之比大于 $2-\varepsilon$.

设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心,A'、B'、C' 分别为 O 关于 A、B、C 的反射点.

注意到,l 为除直线 AC 外过点 O 的任一直线.

则 l 分别被四边形 $ABCD$、$\triangle A'B'C'$ 所截长度相等.

在 $B'A'$、$B'C'$ 上分别取点 M、N 满足

$$\frac{B'M}{B'A'}=\frac{B'N}{B'C'}=\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{4}}.$$

区域 P' 取凸四边形 $B'MON$ 以 O 为位似中心、$\sqrt[4]{1-\frac{\varepsilon}{4}}$ 为位似比所得到的图形. 则该

区域满足与区域 P 的面积比大于 $2-\frac{\varepsilon}{2}$.

5. 由题意,知证明 a_n 为非质数 k 次幂的所有正整数.这样结论就得证.

令 B 为所有非质数 k 次幂的正整数组成的集合.

首先证明:对任意的正整数 c 有

$$\sum_{\substack{b\in B\\ b\leqslant c}}\left[\sqrt[k]{\frac{c}{b}}\right]=c. \qquad ①$$

事实上,任一正整数可由 B 中一个元素和一个质数 k 次幂的乘积唯一表示.

从而,可将所有不大于 c 的整数分类

$$C_b=\left\{x\in\mathbf{N}_+\,\middle|\,x\leqslant c,\text{且}\frac{x}{b}\text{是质数的}k\text{次幂}\right\},$$

其中,$b\in B,b\leqslant c$.

显然,$|C_b|=\left[\sqrt[k]{\frac{c}{b}}\right]$.

故式①成立.

最后,列举出 B 中的元素.

按自然顺序

$1=b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$,

利用数学归纳法证明:$a_n=b_n$.

显然,当 $n=1$ 时,$a_1=b_1=1$.

令 $n\geqslant 2$.假设 $m<n$,有 $a_m=b_m$.

则 $b_n>b_{n-1}=a_{n-1}$,且

$$b_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt[k]{\frac{b_n}{b_i}}\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sqrt[k]{\frac{b_n}{b_i}}\right]+1$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sqrt[k]{\frac{b_n}{a_i}}\right]+1.$$

由 a_n 的定义知 $a_n\leqslant b_n$.

若 $a_n<b_n$,则

$$a_n=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sqrt[k]{\frac{a_n}{b_i}}\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sqrt[k]{\frac{a_n}{a_i}}\right]=a_n-1,$$

矛盾.

从而,$a_n=b_n$.故结论成立.

6. 任取三个数 $i<j<k$,其在正 $2n$ 边形的外接圆上(按顺时针方向)其顺序只能为 i、j、k 或 i、k、j.

若三个数中有两个交换,则顺序就改变了.从而,这三个数的顺序变换了三次,即原来在圆周按顺时针方向为 i、j、k,每两个数互换后就变成 k、j、i 这一方向.然后,将 k 放置在顺时针从 i 到 j 的弧上,最后,$i+1$ 逆时针与 $i(i=1,2,\cdots,2n-1)$ 相邻,也就是这些数按逆时针方向排列在 $2n$ 边形的各个顶点上.这表明,最后的安排可以通过开始情形经过某直线 l 的反射得到.

注意到,每个数要与另外 $2n-1$ 个互换.

所以,开始和最后的顶点上的数不同.

故直线 l 经过 $2n$ 边形两相对边的中点.

假设边 a、b 分别为连接 $2n$ 和 1、n 和 $n+1$ 的边.在此过程中每个数 x 至少经过 l 一次,且这一交换是经过边 a 或 b.

假设某两次交换是经过边 a 和 b 完成.不妨设先由 a 边且 $x\leqslant n$.则关于数 x 的运动至少包含如下情形:

(1)移动顶点 x 到 a 沿 a 穿过 l;

(2)移动由 a 到 b 沿 b 穿过 l;

(3)到达顶点 $2n+1-x$.

则至少交换

$$x+n+(n-x)=2n$$

次,这是不可能的.

因此,每个数只经过边 a 或 b 交换.

最后证明,所有数交换只经过 a 或 b,即其中有一条边没被选取.从而,结论成立.

否则,所有交换中有经过 a 和 b.

先考虑这样的交换,数 x、y 按顺时针方向经过 a、b 穿过 l,则 $x\neq y$,故 x、y 开始在 l 的两侧.

进一步,由于 x、y 仅交换一次,假设在 l 与 y 同侧顶点间进行.此交换是在 x 经过 a 后,经过这次交换,数 x 在 y 到 b 的顺时针弧上,且没有路离开该弧(因为 x、y 之间只能交换一次).从而,数 y 要经过 b 运动,这是不可能的,矛盾.

(张正杰　提供)

第七届罗马尼亚大师杯数学邀请赛

中图分类号:G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2015)06-0035-07

1. 是否存在一个正整数的无穷数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足: a_m 与 a_n 互素当且仅当 $|m-n|=1$?

2. 两名玩家在一个正 $n(n\geqslant5)$ 边形边界上玩游戏. 一开始,有三枚棋子位于正 n 边形的连续三个顶点处(每一个顶点上各有一枚棋子),然后玩家轮流进行如下操作:选取其中的一枚棋子,沿正 n 边形的边界移动到另一个没有棋子的顶点,中间可以经过任意多条边,但不可跨越其他棋子,使得以这三枚棋子为顶点的三角形面积在移动后比移动前严格增加. 规定当一名玩家无法按照上述规则移动棋子时,该玩家即为输家. 问:对哪些 n,先手有必胜策略?

3. 在黑板上写着一列有限个有理数,一次操作是指:先从这列数中任选两数 a、b 擦去,然后写下如下形式中的一种:

$a+b,a-b,b-a,a\times b,$

$\frac{a}{b}(b\neq0),\frac{b}{a}(a\neq0).$

证明:对于每一个给定的正整数 $n>100$,仅存在有限多个整数 $k\geqslant0$,使得由 $k+1$, $k+2,\cdots,k+n$ 构成的一列数,在 $n-1$ 次操作后得到 $n!$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 D 为 $\triangle ABC$ 内切圆在边 BC 上的切点. 假设点 J_b、J_c 分别为 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心. 证明: $\triangle AJ_bJ_c$ 的外心落在 $\angle BAC$ 的平分线上.

5. 设素数 $p\geqslant5$,对于正整数 k,定义 $R(k)(0\leqslant R(k)\leqslant p-1)$ 为 k 被 p 除后的余数. 试求所有正整数 $a<p$,使得对每一个 $m=1,2,\cdots,p-1$,均有

$m+R(ma)>a.$

6. 给定一个正整数 n. 求最大的实数 μ,满足:对"开"单位正方形 U 内的任意一个由 $4n$ 个点构成的集合 C,存在一个 U 内的"开"矩形 V,满足如下性质:

(1)开矩形 V 的边均与 U 的边平行;

(2)开矩形 V 恰包含集合 C 中一个点;

(3)开矩形 V 的面积至少为 μ.

【注】所谓"开"图形是指不含该图形的边界.

参考答案

1. 解法 1 存在.

设全体素数数列从小到大依次为

$2=p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots.$

定义 $a_1=p_1p_2,a_2=p_3p_4$,对正整数 $k\geqslant2$,令

$$a_{2k-1}=\left(\prod_{i=1}^{2k-3}p_{2i-1}\right)p_{4k-3}p_{4k-2},$$

$$a_{2k}=\left(\prod_{i=1}^{k-2}p_{2i}\right)p_{4k-1}p_{4k}.$$

下面证明:这样构造的无穷数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant1)$满足题设.

由素数有无穷多,知这样的 $\{a_n\}(n\geqslant1)$ 是无穷正整数数列.

首先,因为 $p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots$ 为素数数列,所以,

$(a_1,a_2)=1.$

$(a_2,a_3)=(p_3p_4,p_1p_5p_6)=1.$

对正整数 $k\geqslant2$,

$a_{2k-1}=(p_1p_3p_5\cdots p_{4k-7}p_{4k-3})p_{4k-2},$

$a_{2k}=(p_2p_4\cdots p_{4k-4}p_{4k})p_{4k-1},$

$a_{2k+1}=(p_1p_3\cdots p_{4k-3}p_{4k+1})p_{4k+2}.$

由于素因子不同,从而,

$(a_{2k-1},a_{2k})=(a_{2k},a_{2k+1})=1.$

故由 $|m-n|=1\Rightarrow(a_m,a_n)=1.$

其次,$(a_k,a_k)=a_k>1$,故对 $r、s\in\mathbf{Z}_+$,$r=s$,有 $(a_r,a_s)>1$.

对正整数 $m<n$,

$p_1|a_{2m-1},p_1|a_{2n-1}\Rightarrow(a_{2m-1},a_{2n-1})>1,$

$p_4|a_{2m},p_4|a_{2n}\Rightarrow(a_{2m},a_{2n})>1,$

由 $2m<2n-1$,知

$p_{4m-1}|a_{2m},p_{4m-1}|a_{2n+1}\Rightarrow(a_{2m},a_{2n+1})>1,$

且当 $m<n-1$ 时,

$p_{4m+2}|a_{2m+1},$

由 $2m+1<2n-2$,知 $p_{4m+2}|a_{2n}$.

故 $(a_{2m+1},a_{2n})>1$.

这表明,对所有 $r、s\in\mathbf{Z}_+$,$r-s\geqslant2$,有 $(a_r,a_s)>1$.

从而,上面构造的 $\{a_n\}$ 满足

$(a_m,a_n)=1\Leftrightarrow|m-n|=1.$

解法2 由于素数有无穷多个,记

$p_1<p_2<p_3<\cdots$

为全体素数的排列.

记 $a_n=\begin{cases}p_{2n-1}p_{2n}p_1p_3p_5\cdots p_{2n-5}, & 2\nmid n;\\ p_{2n-1}p_{2n}p_2p_4p_6\cdots p_{2n-4}, & 2|n.\end{cases}$

接下来证明上述 $\{a_n\}$ 满足条件.

对任意的正整数 $m、n$,不妨设 $m\geqslant n$.

(1) $m=n$.

由 $p_{2n-1}p_{2n}|a_n$,知 $a_n\neq1$.

于是,$(a_m,a_n)=a_n>1$.

(2) $m=n+1$.

(i) 若 $2\nmid n$,则

$a_n=p_{2n-1}p_{2n}p_1p_3p_5\cdots p_{2n-5},$

$a_{n+1}=p_{2n+1}p_{2n+2}p_2p_4p_6\cdots p_{2n-2}.$

于是,$(a_n,a_{n+1})=1$.

(ii) 若 $2|n$,则

$a_n=p_{2n-1}p_{2n}p_2p_4p_6\cdots p_{2n-2},$

$a_{n+1}=p_{2n+1}p_{2n+2}p_1p_3p_5\cdots p_{2n-3}.$

于是,$(a_n,a_{n+1})=1$.

从而,当 $|m-n|=1$ 时,$(a_m,a_n)=1$.

(3) $m\geqslant n+2$.

(i) 若 $2\nmid m$,则

$a_m=p_{2m-1}p_{2m}p_1p_3p_5\cdots p_{2m-5}.$

因为 $m\geqslant n+2$,所以,

$2m-5\geqslant2(n+2)-5=2n-1$

$\Rightarrow2n-1\in\{1,3,5,\cdots,2m-5\}.$

于是,$p_{2n-1}|a_m$.

故 $(a_m,a_n)\geqslant p_{2n-1}>1$.

(ii) 若 $2|m$,则

$a_m=p_{2m-1}p_{2m}p_2p_4p_6\cdots p_{2m-4}.$

因为 $m\geqslant n+2$,所以,

$2m-4\geqslant2(n+2)-4=2n$

$\Rightarrow2n\in\{2,4,6,\cdots,2m-4\}.$

于是,$p_{2n}|a_m$.

故 $(a_m,a_n)\geqslant p_{2n}>1$.

从而,当 $|m-n|\geqslant2$ 时,$(a_m,a_n)>1$.

综上,结合(1)~(3)知

$(a_m,a_n)=1\Leftrightarrow|m-n|=1.$

因此,存在这样的数列.

2. 对某一时刻,设三枚棋子放置于点 A、B、C.

定义 AB 的"距离"是以 AB 为弦的不含点 C 的弓形内正 n 边形的边的数目.

定义 B、C 及 C、A 的距离数组 (a,b,c) 为 AB 间、BC 间、CA 间距离的一个排列,使得 $a\leqslant b\leqslant c$,则 $a+b+c=n$.

假设某次操作,将棋子从点 C 移到 C',作 $CC_1\parallel AB$ 与圆交于点 C_1,点 C' 在弧 $\overparen{CC_1}$ 上(不含 A,不包含 C、C_1),如图1.

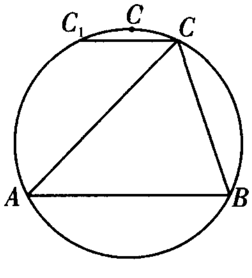


图1

设点 C 到 A 的距离为 x,点 C 到 B 的距离为 $y(x>y)$.

则点 C' 到 A 的距离 $|x-y|$ 在区间 (x,y) 上严格递减,每次操作是将数组 (a,b,c) 中

两个元素用和相同、但差绝对值更小的两个正整数代替，再重新排序得到数组(a',b',c').

注意到，若 $c-a\geqslant2$，则可用 $a+1$、$c-1$ 代替 a、c.

若无法继续操作，则必有 $c-a\leqslant1$.

记初始数组为(a_0,b_0,c_0).

若此时先手有必胜策略，称(a_0,b_0,c_0)为"优的"，否则为"劣的".

则(a_0,b_0,c_0)为优的

$\Leftrightarrow$ 可以对(a_0,b_0,c_0)操作一次，使得新数组为劣的；

(a_0,b_0,c_0)为劣的

$\Leftrightarrow$ 无论怎么对(a_0,b_0,c_0)操作(可能无法操作)新数组均为优的.

由于操作方法有限，故(a_0,b_0,c_0)要么使先手必胜，要么使先手必败.

接下来用反证法证明一个引理.

引理 若 $a<b<c$，则(a,b,c)为优的.

证明 假设(a,b,c)为劣的.

(1)若 $b\leqslant\frac{n}{3}$，由于

$a<b\leqslant n-2b<n-a-b=c$,

故可对劣的(a,b,c)操作一次得到

$(b,b,n-2b)\ ((n-2b)-b<c-a)$

为优的.

于是，存在 α、$\beta\in\mathbf{Z}_+$，使得

$\alpha+\beta=n-b,0<\beta-\alpha<n-3b$.

因为 $\alpha>b$，所以，(b,α,β)为劣的.

但 $\alpha+\beta=n-b=a+c$,

$\beta-\alpha<n-3b<c-a$,

可以将(a,b,c)操作一次得到(b,α,β)，且(a,b,c)与(b,α,β)均为劣的，矛盾.

(2)若 $b>\frac{n}{3}$，由于

$a=n-b-c<n-2b<b<c$,

故可对劣的(a,b,c)操作一次得到

$(n-2b,b,b)\ (b-(n-2b)<c-a)$

为优的.

于是，存在 α、$\beta\in\mathbf{Z}_+$，使得

$\alpha+\beta=n-b,0\leqslant\beta-\alpha<3b-n$.

因为 $\beta<b$，所以，(α,β,b)为劣的.

但 $\alpha+\beta=n-b=a+c$,

$\beta-\alpha<3b-n<c-a$,

可以将(a,b,c)操作一次得(α,β,b)，且(a,b,c)与(α,β,b)均为劣的，矛盾.

综合(1)、(2)，知假设不成立.

回到原题.

只需求 $n\geqslant5$，使得$(1,1,n-2)$为优的.

由引理知$(a,b,c)\ (a<b<c)$为优的.

于是，当有人操作过后数组(a,b,c)由两个 A 和一个 B 组成$(A\neq B)$，则下一次操作必须将一个 A 和一个 B 用两个$\frac{A+B}{2}$替换(因为操作只能对一个 A、一个 B 执行，所以，不会产生 $a<b<c$(必败)的情形). 记这样轮流的操作为τ.

记数组(a,b,c)"间距"为 x.

若(a,b,c)由两个 A 和一个 B 组成，则

$x=|A-B|\ (A\neq B)$.

注意到，当用两个$\frac{A+B}{2}$替换一个 A 和一个 B 时，(a,b,c)间距

$$x'=\left|A-\frac{A+B}{2}\right|=\frac{x}{2}.$$

所以，若能如此，必有 $2\mid x$；反之，若 $2\mid x$，则 A、B 同奇偶.

结合 $A\neq B$，知可将一个 A、一个 B 替换成两个$\frac{A+B}{2}$.

从而，双方必须轮流进行操作 τ，直至某一时刻间距为奇数，此时要进行操作的人败.

一开始的间距为 $n-3(>0)$.

记 $v_2(n-3)=\alpha$ 表示 $2^{\alpha}\parallel(n-3)$，则 α 次操作 τ 后，间距为奇数.

所以，当 α 为奇数时，先手胜. 从而，当且仅当 $2\nmid v_2(n-3)$时先手胜.

综上，先手必胜策略等价于

$n=2^{2k+1}m+3\ (k\in\mathbf{N},m\in\mathbf{Z}_+,2\nmid m)$.

3. 首先,黑板上的数初始时均为$\frac{P_i(k)}{Q_i(k)}$($i=1,2,\cdots,n$)的形式,其中,P_i、$Q_i\in\mathbf{Z}[k]$.

此时,$P_i(k)=k+1,Q_i(k)=1$.

注意到,

$$\frac{p(k)}{q(k)}+\frac{r(k)}{s(k)}=\frac{p(k)s(k)+q(k)r(k)}{q(k)s(k)},$$

$$\frac{p(k)}{q(k)}-\frac{r(k)}{s(k)}=\frac{p(k)s(k)-q(k)r(k)}{q(k)s(k)},$$

$$\frac{p(k)}{q(k)}\times\frac{r(k)}{s(k)}=\frac{p(k)r(k)}{q(k)s(k)},$$

$$\frac{p(k)}{q(k)}\div\frac{r(k)}{s(k)}=\frac{p(k)s(k)}{q(k)r(k)}.$$

若黑板上初始时写有$k+1,k+2,\cdots,k+n$(k为变量),则黑板上始终有形如$\frac{U(k)}{V(k)}$的式子,其中,$U(k)$、$V(k)\in\mathbf{Z}[k]$.

因为$n-1$次操作中每次选出的两个数至多有C_n^2种选择,而所执行的操作只能有6种,所以,操作序列不超过$(6\mathrm{C}_n^2)^{n-1}$种.

最终黑板上写有式子$\frac{f(k)}{g(k)}$,其中,f、$g\in\mathbf{Z}[k]$且有序列(f,g)不超过$(6\mathrm{C}_n^2)^{n-1}$种.

若对每个可能的(f,g),$\frac{f(k)}{g(k)}$不恒等于$n!$,则$f(k)=n!\,g(k)$只有有限多个解. 从而,k的个数有限.

而(f,g)对数有限,故k的个数有限.

结论获证.

下面假设存在一个可能的

$$(f,g)=(F,G),$$

使得$\frac{f(k)}{g(k)}\equiv n!$.

接下来证明这不可能,故存在一种操作序列,使得对任意的k,最后操作得$n!$(这是因为最终得到的数与k无关).

对有理数$\frac{p}{q}$(p、$q\in\mathbf{Z}$,允许$p=0$),定义

$$A\left(\frac{p}{q}\right)=|p|+|q|.$$

特别地,$A(0)=1$(即将0视作$\frac{0}{1}$,故对任意的$\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$,有$A\left(\frac{p}{q}\right)=|p|+|q|$).

注意到,黑板上的数始终为有理数.

可以定义一个乘积$P=\prod\limits_x A(x)$,其中,x取遍黑板上写有的数(若有重复则多次计入).

下面证明:P单调不增.

事实上,设$a=\frac{p}{q},b=\frac{r}{s}$($p$、$q$、$r$、$s\in\mathbf{Z}$),

$$A(a)A(b)=(|p|+|q|)(|r|+|s|),$$

$$A(a)A(b)\geqslant|p||s|+|q||r|+|q||s|$$

$$\geqslant|ps+qr|+|qs|=A\left(\frac{ps+qr}{qs}\right)=A(a+b),$$

$$A(a)A(b)\geqslant|p||s|+|q||r|+|q||s|$$

$$\geqslant|ps-qr|+|qs|=A\left(\frac{ps-qr}{qs}\right)$$

$$=A\left(\frac{qr-ps}{qs}\right)=A(a-b)=A(b-a),$$

$$A(a)A(b)\geqslant|p||r|+|q||s|$$

$$=A\left(\frac{pr}{qs}\right)=A(ab),$$

$$A(a)A(b)\geqslant|p||s|+|q||r|$$

$$=A\left(\frac{ps}{qr}\right)=A\left(\frac{qr}{ps}\right)=A\left(\frac{a}{b}\right)=A\left(\frac{b}{a}\right).$$

故若擦去a、b得到c,则

$$A(a)A(b)\geqslant A(c).$$

由于黑板上其余数A值均为正,于是,乘积$P=\prod\limits_x A(x)$不增.

注意到,n次操作后得到的有理分式为$\frac{F(k)}{G(k)}$.

故由上述结论知

$$A\left(\frac{F(k)}{G(k)}\right)\leqslant A(k+1)A(k+2)\cdots A(k+n).$$

取$k=-1,-2,\cdots,-n$,则

$$A(k+1)A(k+2)\cdots A(k+n)\leqslant n!.$$

注意到,

$$\frac{F(k)}{G(k)}\equiv n!\,(F(k)、G(k)\in\mathbf{Z}[x]).$$

而 $A\left(\frac{F(k)}{G(k)}\right)=|F(k)|+|G(k)|$

$=(n!+1)|G(k)|\leqslant n!$.

从而,$\deg G\geqslant n$.

再证明 $\deg G\leqslant n$.

(1)若没有进行过除法,则 $G\equiv 1$,矛盾.

(2)若进行过除法,则定义

$$K\left(\frac{f}{g}\right)=\max\{\deg f,\deg g\},$$

$$K\left(\frac{f}{g}\pm\frac{h}{p}\right)\leqslant K\left(\frac{f}{g}\right)+K\left(\frac{h}{p}\right),$$

$$K\left(\frac{f}{g}\times\frac{h}{p}\right)\leqslant K\left(\frac{f}{g}\right)+K\left(\frac{h}{p}\right),$$

$$K\left(\frac{f}{g}\div\frac{h}{p}\right)\leqslant K\left(\frac{f}{g}\right)+K\left(\frac{h}{p}\right), \qquad ①$$

且在第一次除法时,$g=p=1$,$\deg f>0$,$\deg h>0$,式①等号不成立.

故 $K\left(\frac{F}{G}\right)$

$<K(k+1)+K(k+2)+\cdots+K(k+n)\leqslant n$,

即 $\deg G<n$.

于是,假设不成立.

对每个可能的(f,g),$\frac{f(k)}{g(k)}$不恒为 $n!$.

从而,k 个数有限.

4. 如图 2,设$\triangle ABC$ 内切圆在 AB、AC 上的切点分别为 F、E,J_b、J_c 在边 AD 上投影分别为 K、K',K 为$\triangle ABD$ 内切圆在边 AD 上的切点,K'为$\triangle ADC$ 内切圆在边 AD 上的切点.

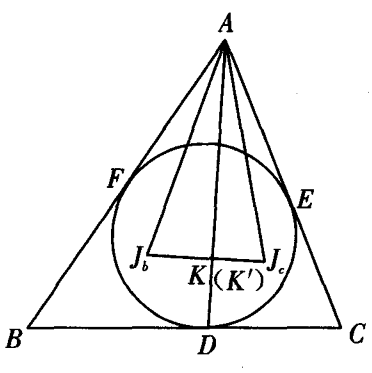


图 2

由切线长定理得

$AE=AF$,$BF=BD$,$CD=CE$,

$$AK=\frac{AB+AD-BD}{2}$$

$$=\frac{AF+BF+AD-BD}{2}=\frac{AF+AD}{2}$$

$$=\frac{AE+AD}{2}=\frac{AE+CE+AD-CD}{2}$$

$$=\frac{AC+AD-CD}{2}=AK'.$$

于是,点 K 与 K'重合,即 $J_bJ_c\perp AD$.

设$\triangle AJ_bJ_c$ 外心为 O,垂心为 H.

由于 O、H 关于$\triangle AJ_bJ_c$ 互为等角共轭点,则

$\angle OAJ_b=\angle HAJ_c=\angle DAJ_c=\angle CAJ_c$,

$\angle OAJ_c=\angle HAJ_b=\angle DAJ_b=\angle BAJ_b$.

故$\angle BAD=\angle BAJ_b+\angle OAJ_b$

$=\angle OAJ_c+\angle CAJ_c=\angle CAO$,

即点 O 在$\angle BAC$ 的平分线上.

5. 设 $p=as+r(s、r\in\mathbf{N},r<a)$.

(1)若 $a=1$,则对任意 $1\leqslant m\leqslant p-1$,有

$m+R(ma)=m+R(m)=2m\geqslant 2>a$.

(2)若 $a\geqslant 2$,由于 p 为素数,$1<a<p$,则 $r>0$.

记$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

由 $s=\left[\frac{p}{a}\right]<\frac{p}{a}\leqslant\frac{p}{2}<p-1$

$\Rightarrow s+1\leqslant p-1$.

取 $m=s+1$,得

$s+1+R(as+a)>a$.

由于 $0<r<a<p$,故

$p=as+r<as+a<as+p<2p$

$\Rightarrow R(as+a)=as+a-p=a-r$

$\Rightarrow s+1+a-r>a\Rightarrow r<s+1\Rightarrow r\leqslant s$.

接下来证明:若 $r\leqslant s$,则 a 满足题设.

设 $m=qs+t(q、t\in\mathbf{N},t<s)$.

(1)若 $t\geqslant 1$,则

$m+R(ma)=qs+t+R(aqs+at)$.

注意到,

$aqs+at<aqs+as<aqs+p$

$<aqs+qr+p=(q+1)p$

$\Rightarrow R(aqs+at)\geqslant aqs+at-qp$

$=aqs+at-q(as+r)=at-qr$

$\Rightarrow m+R(ma)\geqslant qs+t+at-qt$

$\geqslant t+at>at\geqslant a.$

(2)若 $t=0$,则

$m+R(ma)=qs+R(aqs).$

注意到,$qr\leqslant qs=m<p.$

则 $qp=aqs+qr>aqs$

$>aqs+qr-p=(q-1)p.$

$\Rightarrow R(aqs)=aqs-(q-1)p=p-qr$

$\Rightarrow m+R(ma)=qs+p-qr\geqslant p>a.$

从而,若 $r\leqslant s$,则 a 满足题设.

当 $a\leqslant[\sqrt{p}]$ 时,则 $a[\sqrt{p}]<p.$

而 $s=\left[\frac{p}{s}\right]$,故 $s\geqslant[\sqrt{p}].$

从而,$r<a\leqslant[\sqrt{p}]\leqslant s.$

当 $a>[\sqrt{p}]$ 时,由于

$[\sqrt{p}]^2>p,a\geqslant[\sqrt{p}]$,

故 $s\leqslant[\sqrt{p}]<a$. 此时,

$r\leqslant s\Leftrightarrow as<p\leqslant as+s\Leftrightarrow\frac{p}{s}-1\leqslant a<\frac{p}{s}.$

若 $s\geqslant2$,则由 $1<s\leqslant[\sqrt{p}]<p$,知 $s\nmid p$.

从而,$a=\left[\frac{p}{s}\right]$.

若 $s=1$,则 $a=p-1$.

综上,所求

$a=A(1\leqslant A\leqslant[\sqrt{p}],A\in\mathbf{Z}_+)$

或 $a=p-1$

或 $a=\left[\frac{p}{5}\right](2\leqslant s\leqslant[\sqrt{p}]$.

【注】答案也可写成

$a=p-1$ 或 $a=\left[\frac{p}{5}\right](2\leqslant s\leqslant p-1)$,

这只需用到对 $2\leqslant a\leqslant[\sqrt{p}]$,有 $[\frac{p}{a}]\geqslant a$.

故 $a\left[\frac{p}{a}\right]<p<a\left(\left[\frac{p}{a}\right]+1\right)\leqslant a\left[\frac{p}{a}\right]+\left[\frac{p}{a}\right]$,

即有 $\left[\frac{p}{\left[\frac{p}{a}\right]}\right]=a$,且 $\left[\frac{p}{p^{-1}}\right]=1$.

6. $\mu_{\max}=\frac{1}{2n+2}$.

不失一般性,设 U 为平面直角坐标系内 $\begin{cases}0<x<1,\\0<y<1\end{cases}$ 所构成的点集.

取正数 $\varepsilon<\frac{1}{n+1}$,记

$C=\left\{\left(\frac{k}{n+1}+\varepsilon_1\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon_2\varepsilon\right)\middle|\varepsilon_1、\varepsilon_2\in\{1,-1\},\right.$

$\left.k=1,2,\cdots,n\right\}.$

于是,对于一个开矩形 V,若 V 恰包含集合 C 内一点,且边平行于坐标轴,则其横坐标跨度不超过 $\frac{1}{n+1}+\varepsilon$,纵坐标跨度不超过 $\frac{1}{2}+\varepsilon$.

故 $\mu\leqslant\left(\frac{1}{n+1}+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$.

当 $\varepsilon\to0$ 时,$\mu\leqslant\frac{1}{2(n+1)}$.

接下来证明:$\mu=\frac{1}{2n+2}$ 是可以取到的.

设集合 C 内的点共有 k 种横坐标

$0<x_1<x_2<\cdots<x_k<1$,

且横坐标为 x_i 的点有 a_i 个,特别地,$x_0=x_{k+1}=1$. 不妨设 $k>1$,否则横、纵坐标交换.

首先给出一个引理.

引理 若线段 A_0A_m 内部有 $m(m\geqslant2)$ 个点,记为 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,且

$|A_0A_1|<|A_0A_2|<\cdots<|A_0A_{m-1}|$

$<|A_0A_m|=1$,

则存在 $0\leqslant i\leqslant m-2$,有

$|A_iA_{i+2}|\geqslant\frac{2}{m+f(m)}$,

其中,$f(m)=\begin{cases}0, & m=2,\\1, & m\geqslant3.\end{cases}$

证明　若 m 为偶数，则由

$$|A_0A_2|+|A_2A_4|+|A_4A_6|+\cdots+|A_{m-2}A_m|=|A_0A_m|=1,$$

知存在 $i\in\{0,2,\cdots,m-2\}$，使得

$$|A_iA_{i+2}|\geqslant\frac{1}{\frac{m}{2}}\geqslant\frac{2}{m+f(m)}.$$

若 $m(m\geqslant3)$ 为奇数，则由

$$|A_0A_2|+|A_1A_3|+|A_3A_5|+\cdots+|A_{m-2}A_m|=|A_0A_m|+|A_1A_2|>1,$$

知存在 $i\in\{0,1,3,\cdots,m-2\}$，使得

$$|A_iA_{i+2}|\geqslant\frac{1}{\frac{m+1}{2}}=\frac{2}{m+f(m)}.$$

回到原题.

设横坐标为 x_j 的点的纵坐标从小到大排序为点 $A_1,A_2,\cdots,A_{a_j}$，并令 $A_0(x_j,0)$，$A_{a_{j+1}}(x_j,1)$.

由引理知存在 $i\in\{0,1,\cdots,a_{j-1}\}$，使得

$$|A_iA_{i+2}|\geqslant\frac{2}{a_{j+1}+f(a_{j+1})},$$

矩形 $V:\begin{cases}x_{j-1}<x<x_{j+1},\\ y_i<y<y_{i+2}\end{cases}$ 包含点集 U 且仅包含集合 C 内一点 A_{i+1}（y_i、y_{i+2} 分别为 A_i、A_{i+2} 的纵坐标）.

假设 $\mu=\frac{1}{2n+2}$ 不能取到. 则对任意的 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$，有

$$(x_{j+1}-x_{j-1})(y_{i+2}-y_i)<\frac{1}{2n+2},$$

$$x_{j+1}-x_{j-1}<\frac{a_j+1+f(a_{j+1})}{4n+4}.$$

记 S 为 $2,3,\cdots,k+1$ 中所有偶数的集合，T 为 $2,3,\cdots,k-1$ 中所有奇数的集合.

因为 $y_{i+2}-y_i=|A_iA_{i+2}|$，又集合 S、T 中最大元均不小于 $k-2$，且 $x_2<x_3<\cdots<x_{k-1}$，所以，

$$\sum_{j\in S}(x_{j+1}-x_{j-1})\geqslant x_{k-1}-x_1,$$

$$\sum_{j\in T}(x_{j+1}-x_{j-1})\geqslant x_{k-1}-x_2.$$

设 a_1、a_k 中有 A 个大于 1，$2-A$ 个等于 1；

$a_j(j\in S)$ 中有 B 个大于 1，C 个等于 1；

$a_j(j\in T)$ 中有 D 个大于 1，E 个等于 1.

注意到，$a_j>1\Leftrightarrow f(a_{j+1})=1$ 及 $\sum\limits_{j=1}^{k}a_j=4n$.

则 $1<x_{k+1}-x_{k-1}+\sum\limits_{j\in S}(x_{j+1}-x_{j-1})+x_2-x_0$

$$<\frac{a_1+1+f(a_1+1)}{4n+4}+\frac{a_k+1+f(a_k+1)}{4n+4}+\sum_{j\in S}\frac{a_j+1+f(a_j+1)}{4n+4}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ j\notin T}}a_j+2+(B+C)+A+B}{4n+4}$$

$$\leqslant\frac{4n-2D-E+2+(B+C)+A+B}{4n+4}$$

$$=\frac{4n+2+A+2B-2D-E+C}{4n+4}.$$

类似地，

$1\leqslant x_{k+1}-x_{k-1}+\sum\limits_{j\in T}(x_{j+1}-x_{j-1})+x_2-x_0$

$$<\frac{a_1+1+f(a_1+1)}{4n+4}+\frac{a_k+1+f(a_k+1)}{4n+4}+\sum_{j\in T}\frac{a_{j+1}+f(a_{j+1})}{4n+4}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ j\notin S}}a_j+2+(D+E)+A+D}{4n+4}$$

$$\leqslant\frac{4n-2B-C+2+(D+E)+A+D}{4n+4}$$

$$=\frac{4n+2+A-2B-C+2D+E}{4n+4}.$$

两式相加得

$$2<\frac{8n+4+2A}{4n+4}\Rightarrow A>2.$$

但 A 为 a_1、a_k 中大于 1 的数的数目，即 $A\leqslant2$，矛盾.

从而，$\mu=\frac{1}{2n+2}$ 可以取到.

（顾　滨　提供）

第八届罗马尼亚大师杯数学竞赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2016)07－0031－04

1. 在$\triangle ABC$中，点D在线段BC上，且D与B、C均不重合，$\triangle ABD$的外接圆与线段AC的另一个交点为E，$\triangle ACD$的外接圆与线段AB的另一个交点为F. 记A'为点A关于直线BC的对称点，直线$A'C$与DE交于点P，且直线$A'B$与DF交于点Q. 证明：直线AD、BP、CQ三线共点或互相平行.

2. 给定正整数m，且$n\geqslant m$，在一个$m\times 2n$的方格表中最多能放入多少块多米诺骨牌(1×2或2×1的小方格表)满足以下条件：

(1)每块多米诺骨牌恰覆盖两个相邻的小方格；

(2)任意一个小方格至多被一块多米诺骨牌覆盖；

(3)任意两块多米诺骨牌不能形成2×2的方格表；

(4)最后一行的方格恰被n块多米诺骨牌完全覆盖.

3. 定义立方序列：

$$a_n=n^3+bn^2+cn+d,$$

其中，b、c、d为整数且为常数，n取遍所有整数.

(1)证明：存在一个立方序列，使得在此序列中只有$a_{2\,015}$、$a_{2\,016}$为完全平方数；

(2)若一个立方序列满足条件(1)，求$a_{2\,015}a_{2\,016}$的所有可能值.

4. 设正实数x、y满足$x+y^{2\,016}\geqslant 1$. 证明：

$$x^{2\,016}+y>1-\frac{1}{100}.$$

5. 给定凸六边形$A_1B_1A_2B_2A_3B_3$，其顶点在半径为R的圆Γ上. 对角线A_1B_2、A_2B_3、A_3B_1三线共点于X. 对于$i=1,2,3$，记圆Γ_i为与线段XA_i、XB_i、弧$\overparen{A_iB_i}$(不包含六边形其他顶点的弧)均相切的圆，记r_i为圆Γ_i的半径.

(1)证明：$R\geqslant r_1+r_2+r_3$；

(2)若$R=r_1+r_2+r_3$，证明：圆Γ_i与对角线A_1B_2、A_2B_3、A_3B_1相切的六个顶点共圆.

6. 一个由三维空间中的n个点组成的集合，任意四点不在同一平面，划分成两个子集A、B. 一个AB—树是指由$n-1$条线段，每条线段的一个端点在集合A中而另一个端点在集合B中，且这些线段不构成圈. 一个AB—树可以通过以下操作变成另一个：在这个AB—树中选择三条线段A_1B_1、B_1A_2、A_2B_2满足A_1在集合A中，满足

$$A_1B_1+A_2B_2>A_1B_2+A_2B_1,$$

且去掉线段A_1B_1，并用线段A_1B_2替换它. 给定任意一个AB—树，证明：任意一种操作序列均会在有限次后结束(操作无法进行下去).

参考答案

1. 如图1，记σ为关于BC的对称变换.

由A、E、D、F四点共圆得

$$\angle BDF=\angle BAC=\angle CDE.$$

则直线DE与DF在变换σ下互为对方的像.

故直线AC与DF交于点$P'=\sigma(P)$，直线AB与DE交于点$Q'=\sigma(Q)$.

于是，直线PQ、$P'Q'=\sigma(PQ)$、BC交于同一点R(有可能是无穷远点).

又直线对$(CA;QD)$，$(AB;DP)$，$(BC;PQ)$的三个交点共线(三个交点分别为P'、Q'、

R),则$\triangle ABC$与$\triangle DPQ$互为透视三角形.

由笛沙格定理,知AD、BP、CQ三线共点或互相平行.

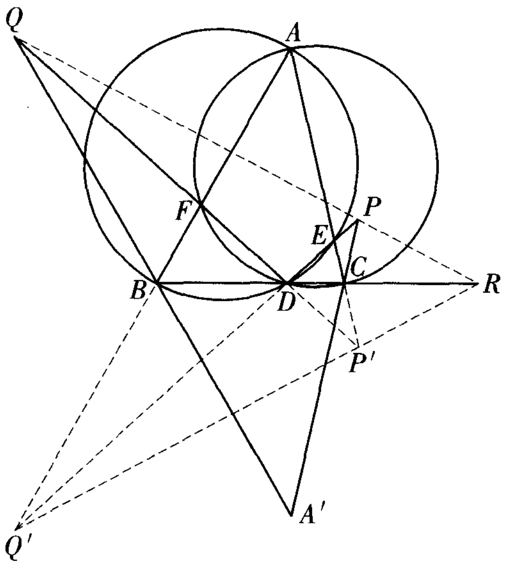


图1

2. 所求最大值为$mn-\left[\frac{m}{2}\right]$($[x]$表示不超过实数$x$的最大整数),且对任意交替的两行分别用$n$块$1\times2$与$n-1$块$1\times2$的多米诺骨牌使得最后一行的方格恰被$n$块多米诺骨牌完全覆盖即可.

为证明满足题目条件的多米诺骨牌至多能放入$mn-\left[\frac{m}{2}\right]$块,将原方格表中的行自下而上分别标为第$0,1,\cdots,m-1$行,且对第$i$行画一个垂直对称的$n-i$个虚构的多米诺块(因此,第$i$行在两侧各有$i$个小方格没有被画进去),图2是$m=n=6$的情形.

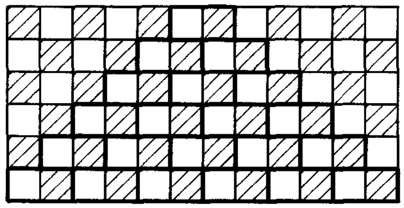


图2

虚构一个多米诺块,若其恰被一块多米诺骨牌覆盖,则称此多米诺块是"好的";否则,称其为"坏的".

下面分类讨论.

(1)若所有虚构的多米诺块均为好的,则剩下的多米诺骨牌不会覆盖这些虚构的多米诺块.因此,这些多米诺骨牌必须分布在左上角和右上角处的边长为$m-1$的三角形区域中.

像棋盘一样对这些小方格黑白染色,知对任何一个三角形区域中的黑格数与白格数的数目相差$\left[\frac{m}{2}\right]$.

因为每块多米诺骨牌覆盖两种不同色的小方格,所以,在每个三角形区域中至少有$\left[\frac{m}{2}\right]$个小方格没有被覆盖,故结论成立.

(2)为了处理剩下情形即有坏的多米诺块存在,只要证明满足条件的覆盖方式可以转换为另一种,且保证多米诺骨牌数没有减少,而坏的虚构的多米诺块数减少了.则经过有限次转换后,可将所有的多米诺块均变成好的,且多米诺骨牌数没有减少,故可由情形(1)得结论成立.

如图3,考虑标数最小的存在坏的多米诺块的行(这显然不是最后一行)且记D为这个多米诺块.记l、r分别为D的左边、右边的小方格.注意到,l、r下面的小方格分别被D_1、D_2覆盖.

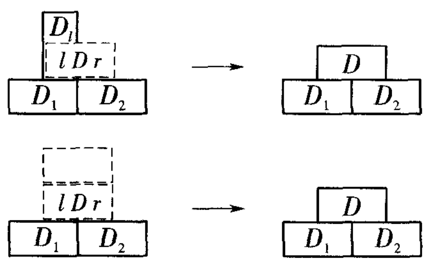


图3

若l被一块多米诺骨牌D_l覆盖,则由D是坏的且任意两块多米诺骨牌不能形成2×2的方格表,知D_l是纵向的.若r也被一块多米诺骨牌D_r覆盖,则D_r也是纵向的,且与D_l形成了一个2×2的方格表,产生矛盾.从而,

必有 r 是空的. 于是,可将多米诺骨牌 D_l 换成 D 同样满足题目条件,且保证了多米诺骨牌数没有减少,而坏的虚构的多米诺块数减少了.

对于 r 被多米诺骨牌覆盖的情形完全类似.

若 D 的 l 与 r 均没有被多米诺骨牌覆盖,则可直接在 D 处添上一块多米诺骨牌;或为了保证任意两块多米诺骨牌不形成 2×2 的方格表,可将 D 正上方的多米诺骨牌直接平移到 D 的位置即可.

3. 由于对数列的平移不改变问题,为简化起见,可用 a_0 代替 $a_{2\,015}$,用 a_1 代替 $a_{2\,016}$.

若有一个立方序列 a_n 只有 a_0、a_1 为完全平方数,设 $a_0=p^2, a_1=q^2$.

考虑过点 $(0,p)$、$(1,q)$ 的直线

$$y=(q-p)x+p.$$

故方程

$$[(q-p)x+p]^2=x^3+bx^2+cx+d$$

有根 $x=0,1$.

由韦达定理,知其另一个根为

$$x=(q-p)^2-b-1,$$

即当 $n=(q-p)^2-b-1$ 时,a_n 也为完全平方数.

而由题意知

$$x=0 \text{ 或 } x=1$$

$$\Rightarrow (q-p)^2-b-1=0 \text{ 或 } (q-p)^2-b-1=1.$$

类似地,考虑过点 $(0,-p)$、$(1,q)$ 的直线 $y=(q+p)x-p$,得

$$(q+p)^2-b-1=0 \text{ 或 } (q+p)^2-b-1=1.$$

因为 $(q-p)^2$ 与 $(q+p)^2$ 有相同的奇偶性,所以,必有 $pq=0$.

下面只需证明这样的数列存在即可.

记 $p=0$.

考虑数列 $a_n=n^3+(q^2-2)n^2+n$,满足 $a_0=0, a_1=q^2$.

下面证明 $q=1$ 符合.

事实上,若 $a_n=n(n^2-n+1)$ 为完全平方数,由 n^2-n+1 为正整数,知若 $n\neq0$,必有 n、n^2-n+1 均为完全平方数. 从而,必有 $n>0$.

当 $n>1$ 时,$(n-1)^2<n^2-n+1<n^2$.

故 n^2-n+1 不为完全平方数.

从而,$n=0$ 或 1.

4. (1) 当 $y>1-\frac{1}{100}$ 时,显然成立.

(2) 当 $y\leqslant1-\frac{1}{100}$ 时,由于

$$x\geqslant1-y^{2\,016}\geqslant1-\left(1-\frac{1}{100}\right)^{2\,016},$$

于是,由伯努利不等式得

$$x^{2\,016}\geqslant1-2\,016\left(1-\frac{1}{100}\right)^{2\,016}.$$

故为证明结论只要证明:

$$1-2\,016\left(1-\frac{1}{100}\right)^{2\,016}>1-\frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{100}\right)^{2\,016}<\frac{1}{100\times2\,016}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{100}{99}\right)^{2\,016}>100\times2\,016.$$

再次利用伯努利不等式有

$$\left(\frac{100}{99}\right)^{2\,016}>\left[\left(1+\frac{1}{99}\right)^{100}\right]^{20}\geqslant\left(1+\frac{100}{99}\right)^{20}$$

$$>2^{20}=2^9\times2^{11}=512\times2\,048$$

$$>100\times2\,016.$$

5. (1) 如图 4,记 l_1 为圆 Γ 的切线,且与直线 A_2B_3 平行、与圆 Γ_1 在直线 A_2B_3 同侧.

类似地,定义切线 l_2、l_3. 直线 l_1 与 l_2、l_2 与 l_3、l_3 与 l_1 分别交于点 C_3、C_1、C_2. 直线 C_2C_3 与射线 XA_1、XB_1 分别交于点 S_1、T_1;类似定义点 S_2、T_2 及 S_3、T_3.

记 $\triangle_1=\triangle XS_1T_1$, $\triangle_2=\triangle XS_2T_2$, $\triangle_3=\triangle XS_3T_3$, $\triangle=\triangle C_1C_2C_3$.

则 $\triangle_1\backsim\triangle_2\backsim\triangle_3\backsim\triangle$.

记 $k_i(i=1,2,3)$ 为 $\triangle_i$ 与 $\triangle$ 的相似比(如 $k_1=\frac{XS_1}{C_1C_2}$).

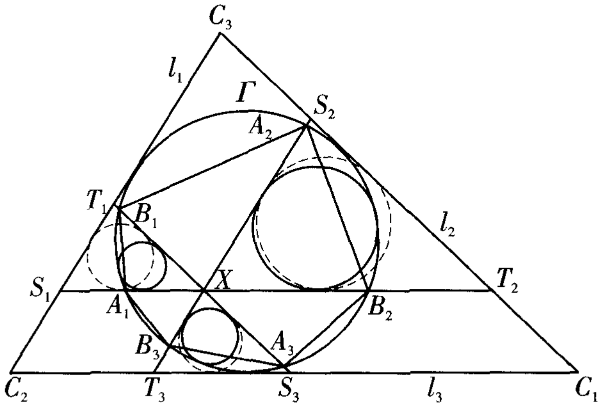


图 4

因为 $S_1X=C_2T_3$，$XT_2=S_3C_1$，所以，

$k_1+k_2+k_3=1$.

记 $\rho_i(i=1,2,3)$ 为 $\triangle_i$ 的内切圆半径.

则 $\rho_1+\rho_2+\rho_3=R$.

最后，注意到圆 Γ_i 在 $\triangle_i$ 内部，故 $r_i\leqslant\rho_i$.

从而，$R\geqslant r_1+r_2+r_3$.

(2)由(1)知 $R=r_1+r_2+r_3$ 当且仅当对任意 i，均有 $r_i=\rho_i$，即圆 Γ_i 为 $\triangle_i$ 的内切圆.

如图 5，记 K_i、L_i、M_i 分别为圆 Γ_i 与边 XS_i、XT_i、S_iT_i 的切点.

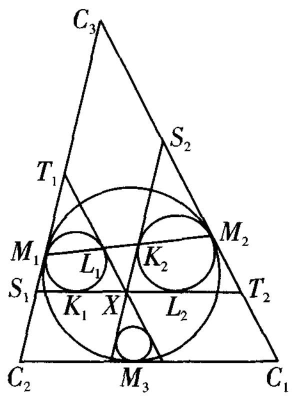


图 5

下面证明：点 K_i、$L_i(i=1,2,3)$ 到点 X 距离相等.

显然，$XK_i=XL_i$.

故只需证明 $XK_2=XL_1$，$XK_3=XL_2$.

由三角形相似得

$\angle T_1M_1L_1=\angle C_3M_1M_2$，

$\angle S_2M_2K_2=\angle C_3M_2M_1$.

因此，M_1、M_2、L_1、K_2 四点共线.

故 $\angle XK_2L_1=\angle C_3M_1M_2$

$=\angle C_3M_2M_1=\angle XL_1K_2$.

从而，$XK_2=XL_1$.

类似地，$XK_3=XL_2$.

综上，结论成立.

6. 记 S 为这 n 个点组成的集合，所考虑的图是一个关于集合 A、B 的二部图，且为一个树，在操作下始终保持这种性质.

对于一个树 $T=(A\cup B,E)$，记 $p_T(e)$ 表示在子图 $T-\{e\}$ 中包含 e 的在集合 A 的那个顶点处的连通分支中含有集合 A 中的点的个数，定义

$$f(T)=\sum_{e\in E}p_T(e)|e|,$$

其中，$|e|$ 表示边 e 的长度.

记 T' 为从树 T 选择三条线段 A_1B_1、B_1A_2、A_2B_2 得到一个树.

则 A_1、$A_2\in A$，B_1、$B_2\in B$，

$A_1B_1+A_2B_2>A_1B_2+A_2B_1$.

于是，$T'=T-A_1B_1+A_2B_2$.

当 e 不为边 A_1B_1、A_2B_1、A_2B_2 时，有

$p_T(e)=p_{T'}(e)$，

$p_{T'}(A_1B_2)=p_T(A_1B_1)$，

$p_{T'}(A_2B_1)=p_T(A_2B_1)+p_T(A_1B_1)$，

$p_{T'}(A_2B_2)=p_T(A_2B_2)-p_T(A_1B_1)$.

故 $f(T')-f(T)$

$$\begin{aligned}&=p_{T'}(A_1B_2)A_1B_2+\\&\quad(p_{T'}(A_2B_1)-p_T(A_2B_1))A_2B_1+\\&\quad(p_{T'}(A_2B_2)-p_T(A_2B_2))A_2B_2-\\&\quad p_T(A_1B_1)A_1B_1\\&=p_T(A_1B_1)(A_1B_2+A_2B_1-A_1B_1-A_2B_2)\\&<0.\end{aligned}$$

因此，f 在操作过程中严格单调递减.

而 S 上的树是有限的，故操作必定在有限步后终止.

（赵 斌 提供）

第九届罗马尼亚大师杯数学邀请赛

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2017)07-0025-05

1. (1)证明:每个正整数 n 均可唯一地表示为

$$n=\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j},$$

其中,$k\geqslant0$,且 $0\leqslant m_1<m_2<\cdots<m_{2k+1}$ 为整数,称 k 为 n 的权.

(2)令

$A=\{n\mid1\leqslant n\leqslant2^{2017},n\in\mathbf{N},n$ 的权为偶数$\}$,

$B=\{n\mid1\leqslant n\leqslant2^{2017},n\in\mathbf{N},n$ 的权为奇数$\}$.

求 $|A|-|B|$.

2. 求所有满足条件的正整数 n:对任何一个次数不超过 n 且最高次项系数为 1 的整系数多项式 $P(x)$,存在一个正整数 $k\leqslant n$ 和 $k+1$ 个互不相同的整数 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$,使得

$$P(x_1)+P(x_2)+\cdots+P(x_k)=P(x_{k+1}).$$

3. 设整数 $n\geqslant2$,X 为一个 n 元集.对于 X 的非空子集序列 $A_1,A_2,\cdots,A_k$,若 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$为 X 的真子集,且 X 中没有任何元素恰在一个 A_i 中,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为"紧密的".设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$为 X 的非空真子集序列,该序列及其任何子序列均不是紧密的.求 k 的最大值.

注:对于 X 的子集 A,若 $A\neq X$,集合序列中的集合均是互不相同的,则称 A 为 X 的真子集.

4. 在平面直角坐标系中,假设 G_1、G_2 分别为二次函数

$$f_1(x)=p_1x^2+q_1x+r_1,$$
$$f_2(x)=p_2x^2+q_2x+r_2,$$

的图像,其中,$p_1>0>p_2$.抛物线 G_1 与 G_2 交于不同的 A、B 两点.抛物线 G_1、G_2 在 A、B 两点处的四条切线形成一个具有内切圆的凸四边形.证明:抛物线 G_1 与 G_2 的对称轴重合.

5. 给定整数 $n\geqslant2$.从一个 $n\times n$ 方格表中挖去 n 个位于不同行和不同列的格,得到的图形称为一个 $n\times n$"筛子".$1\times k(k\in\mathbf{Z}_+)$或 $k\times1$ 的子方格表均称为一个"棒".对任意 $n\times n$ 筛子 A,将其剖分为若干棒(即这些棒相互之间无重叠的格,且恰覆盖住筛子 A),在 A 的所有可能的剖分中,其棒的数目的最小值记为 $m(A)$.当 A 取遍所有 $n\times n$ 筛子时,求 $m(A)$ 的取值范围.

6. 记四边形 $ABCD$ 是凸的,P、Q、R、S 分别为线段 AB、BC、CD、DA 内的点.假设相交的两条线段 PR 与 QS 将凸四边形 $ABCD$ 分为四个对角线互相垂直的凸四边形.证明:P、Q、R、S 四点共圆.

参考答案

1. (1)存在性.

设 $2^t\leqslant n\leqslant2^{t+1}-1$.

对 t 归纳.

当 $t=0$ 时,$n=1$,令 $k=0,m_1=0$ 即可.

设 $t\leqslant s-1$ 时存在,考虑 $t=s$ 时.

(i)若 $n=2^{t+1}-1$,则令

$k=1,m_1=0,m_2=1,m_3=t+1$.

故 $\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j}=2^{t+1}-2^1+2^0$

$=2^{t+1}-1=n$.

(ii)若 $n\leqslant2^{t+1}-2$,且 $2\mid n$,则$\frac{n}{2}\leqslant2^t-1$.

由归纳假设,存在 $k,m_1'<m_2'<\cdots<m_{2k+1}'$,使得

$$\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j'}=\frac{n}{2}.$$

令 $m_j=m_j'+1(j=1,2,\cdots,2k+1)$,得

$$\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j'}=2\times\frac{n}{2}=n.$$

(iii)若$n\leqslant 2^{t+1}-2$,且$2\nmid n$,则$n\leqslant 2^{t+1}-3$.

设$2^{\alpha}\parallel(n-1)$. 则$\alpha\geqslant 1$.

令$m=\frac{n-1}{2^{\alpha}}+1$,从而,$2|m$.

因此,$m\leqslant\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}\leqslant 2^{t}-1$.

由归纳假设,存在$m_1'<m_2'<\cdots<m_{2k+1}'$,使得

$$m=\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j}.$$

令$k=k'+1$,$m_j=m_{j-2}'+\alpha(j=3,4,\cdots,2k+1)$,$m_2=\alpha$,$m_1=0$..

则由$2|m$,知$m_1'\geqslant 1$.

于是,$0\leqslant m_1<m_2<m_3<\cdots<m_{2k+1}$.

故$\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j}$

$=1-2^{\alpha}+2^{\alpha}\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j}$

$=1-2^{\alpha}+2^{\alpha}m=n$.

由归纳原理知存在性成立.

唯一性.

假设$k,m_1,m_2,\cdots,m_{2k+1}$与$k',m_1',m_2',\cdots,m_{2k'+1}'$使得

$$\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j}=\sum_{j=1}^{2k'+1}(-1)^{j-1}2^{m_j'}(k\leqslant k').$$

若$m_1\neq m_1'$,设$m_1<m_1'$,则

$$2^{m_1+1}\left|\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j}2^{m_j}\right.,$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j}2^{m_j}\equiv 2^{m_1}(\bmod 2^{m_1+1}),$$

矛盾. 于是,$m_1=m_1'$.

对$k+k'$归纳.

若$k'=0$,由$m_1=m_1'$,则

$2^{m_1}=2^{m_1'}-2^{m_2'}+\cdots+2^{m_{2k+1}'}$.

若$k'\geqslant 1$,则

$2^{m_{2k+1}'}-2^{m_{2k}'}+\cdots+2^{m_3'}-2^{m_2'}$

$=\sum_{j=1}^{k}(2^{m_{2j+1}'}-2^{m_{2j}'})>0$,

矛盾.

于是,$k'=0$.

设$k+k'$较小时成立. 令

$n_i=m_{i+1}-m_1$,

$n_i'=m_{i+1}'-m_1(i=1,2,\cdots,2k)$.

则$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j}2n_j=\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j}2n_j'$.

若$n_2\neq n_2'$,设$n_2<n_2'$,得

$$2^{n_2+1}\left|\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j}2^{n_j'}\right.,2^{n_2+1}\nmid\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j}2^{n_j},$$

矛盾.

于是,$n_2=n_2'$.

故$\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}2^{m_{j+2}}=\sum_{j=1}^{2k'-1}(-1)^{j-1}2^{m_{j+2}'}$.

从而,$k-1,m_3,m_4,\cdots,m_{2k+1}$与$k'-1,m_3',m_4',\cdots,m_{2k+1}'$符合归纳假设.

则$k-1=k'-1,m_3=m_3',\cdots,m_{2k+1}=m_{2k+1}'$.

于是,$k=k'$.

又$m_1=m_1',m_2=m_2'$,因此,唯一性成立.

(2)注意到,

$\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j}$

$=2^{m_1}+\sum_{j=1}^{k}(2^{m_{2j+1}}-2^{m_{2j}})>0$,

$\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}2^{m_j}=2^{m_{2k+1}}-\sum_{j=1}^{k}(2^{m_{2j}}-2^{m_{2j-1}})$

$\leqslant 2^{m_{2k+1}}$,

特别地,当$k=0$时,$2^{m_{2j}}-2^{m_{2j-1}}$不存在.

则所有满足

$0\leqslant m_1<m_2<\cdots<m_{2k+1}\leqslant 2\,017$

的k和m所得的n满足$1\leqslant n\leqslant 2^{2\,017}$.

而这样的$k,m_1,m_2,\cdots,m_{2k+1}$的个数为

$$\mathrm{C}_{2\,018}^{1}+\mathrm{C}_{2\,018}^{3}+\cdots+\mathrm{C}_{2\,018}^{2\,017}=\frac{1}{2}\times 2^{2\,018}=2^{2\,017}.$$

由(1)的唯一性,知$m_1,m_2,\cdots,m_{2k+1}$两两不同. 于是,恰为$1,2,\cdots,2\,017$.

又当$2|k$时,$2k+1\equiv 1(\bmod 4)$;

当$2\nmid k$时,$2k+1\equiv 3(\bmod 4)$.

故$|A|=\mathrm{C}_{2\,018}^{1}+\mathrm{C}_{2\,018}^{5}+\cdots+\mathrm{C}_{2\,018}^{2\,017}$,

$|B|=\mathrm{C}_{2\,018}^{3}+\mathrm{C}_{2\,018}^{7}+\cdots+\mathrm{C}_{2\,018}^{2\,015}$.

令$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

则$(1+\mathrm{i})^{2\,018}-(1+\mathrm{i})^{2\,018}$

$=\sum_{j=1}^{2\,018}(\mathrm{i}^{j}\mathrm{C}_{2\,018}^{j})-\sum_{j=1}^{2\,018}(\mathrm{i}^{j}(-1)^{j}\mathrm{C}_{2\,018}^{j})$

$=\sum_{j=1}^{2018}\left(\mathrm{i}^{j}\mathrm{C}_{2018}^{j}\left(1-(-1)^{j}\right)\right)$

$=2\sum_{j=1}^{1009}\left(\mathrm{i}^{2j-1}\mathrm{C}_{2018}^{2j-1}\right)$

$=2\sum_{j=1}^{1009}\left(\mathrm{i}(-1)^{j-1}\mathrm{C}_{2018}^{j-1}\right)$

$=2\mathrm{i}(|A|-|B|)$.

又 $(1+\mathrm{i})^{2018}-(1-\mathrm{i})^{2018}$

$=(2\mathrm{i})^{1009}-(-2\mathrm{i})^{1009}=2\mathrm{i}\times2^{1009}$.

因此，$|A|-|B|=2^{1009}$.

2. 当 $n=1$ 时，令 $P(x)=x$，则

$P(x_1)=P(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

当 $n=2$ 时，

若 $P(x)=1$，则令 $x_1=1,x_2=2,k=1$.

若 $P(x)=x+c$，则

当 $c=0$ 时，令 $k=2,x_1=1,x_2=2,x_3=3$；

当 $c\neq0$ 时，令 $k=2,x_1=0,x_2=c,x_3=2c$.

若 $P(x)=x^2+px+q$，则

$P(-p-x)=P(x)$.

令 $k=2,x_1=x,x_2=-p-x$ 即可.

当 $n\geqslant3$ 时，先证明：若存在 $P(x)$，对于任意的 $x\in\mathbf{Z}$，使得

$P(x)\equiv1(\bmod n)$，且 $P(x+1)>P(x)$，

则结论不成立.

事实上，

$P(x_1)+P(x_2)+\cdots+P(x_k)\equiv k(\bmod n)$，

$P(x_{k+1})\equiv1(\bmod n)$.

于是，$k\equiv1(\bmod n)$.

又 $k\leqslant n$，则 $k=1$.

故 $P(x_k)=P(x_{k+1})$.

而 $P(x+1)>P(x)$，这不可能.

再构造 $P(x)$.

对 $n=4$，令

$P(x)=x^4+7x^2+4x+1$

$=x^2(x^2+7)+4x+1$.

注意到，$2|x$ 时，$4|x^2$；

$2\nmid x$ 时，$4|(x^2+7)$.

于是，$P(x)\equiv1(\bmod 4)$.

若 $P(x)=P(y)$，则

$(x-y)((x+y)(x^2+y^2+7)+4)=0$

$\Rightarrow(x+y)(x^2+y^2+7)=-4$.

又 $|x^2+y^2+7|\geqslant7$，矛盾.

对 $n\neq4$，令

$P(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-m)+nx+1$，

其中，$m=\begin{cases}n, & 2\nmid n;\\ n-1, & 2|n,\end{cases}$ 即 $2\nmid m$.

由于 $m!|(x-1)(x-2)\cdots(x-m)$：

$2\nmid n$ 时，$P(x)\equiv1(\bmod n)$；

$2|n,n\neq4$ 时，$n\geqslant6,n|(n-1)!$，则

$P(x)\equiv1(\bmod n)$.

故 $P(x+1)-P(x)$

$=x\cdots(x-m+1)-(x-1)\cdots(x-m)+n$

$=m(x-1)\cdots(x-m+1)+n$.

对 $x\in\mathbf{Z}$，当 $x\leqslant1$ 或 $x\geqslant m-1$ 时，

$(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)\geqslant0$；

当 $1\leqslant x\leqslant m-1$ 时，

$(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)=0$.

因此，$P(x+1)>P(x)$.

3. $k_{\max}=2n-2$.

设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$.

一方面，取 $B_i=\{1,2,\cdots,i\}$，

$C_i=\{i+1,i+2,\cdots,n\}(i=1,2,\cdots,n-1)$，

$A_1,A_2,\cdots,A_k=B_1,B_2,\cdots,B_{n-1}$，

$C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$.

于是，若干个 A_i 为紧密的.

若 B_i 被选，则 $C_j(j\leqslant i)$ 不能被选. 否则，$B_i\cup C_j=X$. 取 i 最大. 于是，i 不能在 $B_k(k<i)$ 中，故 i 只出现 1 次.

若 B_i 均未被选，则 C_j 被选. 设 j 最小，则 $j+1\notin C_l(l>j)$. 故 $j+1$ 只出现 1 次.

另一方面，往证 $k\leqslant2n-2$.

对 n 归纳.

$n=2$ 时，$A_i=\{1\}$ 或 $\{2\}$. 于是，$k\leqslant2$.

设 $n-1$ 元集 X' 成立. 考虑 n 元集 X.

不妨设 1 在 A_i 中出现次数最少.

设 $1\in A_i(1\leqslant i\leqslant t)$，$1\notin A_i(t+1\leqslant i\leqslant n)$.

则 $\bigcup_{t+1\leqslant i\leqslant k}A_i\neq X$.

由于 $A_i(t+1\leqslant i\leqslant k)$ 非紧密的，存在一个元素 i 恰在一个 $A_j(t+1\leqslant i\leqslant k)$ 中.

不妨设 $i=2$，$j=k$.

由于1出现次数最少为 t 次,2在 $A_i(t+1\leqslant i\leqslant k)$ 中恰出现1次,则2在 $A_i(t+1\leqslant i\leqslant t)$ 中至少出现 $t-1$ 次.

设 $2\in A_i(2\leqslant i\leqslant t)$. 则在 $A_i(2\leqslant i\leqslant k-1)$ 中,

$1\in A_l \Leftrightarrow 2\in A_l(2\leqslant l\leqslant k-1)$.

故将1与2合并为一个元素 $1'$,

$X'=\{1',3,\cdots,n\}$.

从而,$A_i'(2\leqslant i\leqslant k-1)$ 与 X' 符合归纳假设.

故 $k-2\leqslant 2n-4 \Rightarrow k\leqslant 2n-2$.

4. 先证明一个引理.

引理　二次函数 $y=px^2+qx+r$ 的图像 G 及其上两点 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,过点 A、B 作抛物线 G 的切线交于点 C. 则

$$CA-CB=\frac{2|x_A-x_B|(x_A-x_B)p(p(x_A+x_B)+q)}{\sqrt{1+(2px_A+q)^2}+\sqrt{1+(2px_B+q)^2}}. \quad ①$$

证明　过点 A、B 的切线方程分别为

$y=(2px_A+q)x+r-px_A^2$,

$y=(2px_B+q)x+r-px_B^2$.

$$\text{联立得}\begin{cases}x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2},\\ y_C=px_Ax_B+\dfrac{q}{2}(x_A+x_B)+r.\end{cases}$$

$$\text{则 } CA^2=\left(\frac{x_A-x_B}{2}\right)^2+\left(px_A^2-px_Ax_B+\frac{q}{2}(x_A-x_B)\right)^2$$

$$=\left(\frac{x_A-x_B}{2}\right)^2(1+(2px_A+q)^2)$$

$$\Rightarrow CA=\frac{|x_A-x_B|}{2}\sqrt{1+(2px_A+q)^2}.$$

类似地,$CB=\dfrac{|x_A-x_B|}{2}\sqrt{1+(2px_B+q)^2}$.

故 $CA-CB$

$$=\frac{|x_A-x_B|}{2}\left(\sqrt{1+(2px_A+q)^2}-\sqrt{1+(2px_B+q)^2}\right)$$

$$=\frac{|x_A-x_B|}{2}\cdot\frac{(2px_A+q)^2-(2px_B+q)^2}{\sqrt{1+(2px_A+q)^2}+\sqrt{1+(2px_B+q)^2}}$$

$$=\frac{|x_A-x_B|2p(x_A-x_B)2(p(x_A+x_B)+q)}{2\left(\sqrt{1+(2px_A+q)^2}+\sqrt{1+(2px_B+q)^2}\right)}.$$

于是,式①成立.

引理得证.

设抛物线 G_1 在点 A、B 处切线交于点 C,抛物线 G_2 在点 A、B 处切线交于点 D.

则由引理知

$CA-CB$

$$=\frac{2|x_A-x_B|p_1(p_1(x_A+x_B)+q_1)(x_A-x_B)}{\sqrt{1+(2p_1x_A+q_1)^2}+\sqrt{1+(2p_2x_B+q_2)^2}},$$

$DA-DB$

$$=\frac{2|x_A-x_B|p_2(p_2(x_A+x_B)+q_2)(x_A-x_B)}{\sqrt{1+(2p_2x_A+q_2)^2}+\sqrt{1+(2p_2x_B+q_2)^2}}.$$

又四边形 $ACBD$ 有内切圆,于是,

$AC-BC=AD-BD$,$x_A\neq x_B$.

由 x_A、x_B 符合 $f_1(x)=f_2(x)$,得

$(p_1-p_2)x^2+(q_1-q_2)x+(r_1-r_2)=0$.

于是,$x_A+x_B=-\dfrac{q_1-q_2}{p_1-p_2}$.

故 $p_1(x_A+x_B)+q_1=\dfrac{p_1q_2-p_2q_1}{p_1-p_2}$,

$p_2(x_A+x_B)+q_2=\dfrac{p_1q_2-p_2q_1}{p_1-p_2}$.

由 $p_1>0>p_2$,若 $p_1q_2\neq p_2q_1$,则

$$\frac{p_1}{\sqrt{1+(2p_1x_A+q_1)^2}+\sqrt{1+(2p_1x_B+q_1)^2}}=\frac{p_2}{\sqrt{1+(2p_2x_A+q_2)^2}+\sqrt{1+(2p_2x_B+q_2)^2}}.$$

由于 $p_1>0>p_2$ 且上式分母均为正数,于是,上式左边 >0,上式右边 <0,矛盾.

故 $p_1q_2=p_2q_1\Rightarrow\dfrac{q_1}{p_1}=\dfrac{q_2}{p_2}$.

因此,抛物线 G_1 与 G_2 的对称轴重合.

5. $m(A)=2n-2$.

先证明:$m(A)\leqslant 2n-2$.

考虑所有可能的极长的 $1\times k$ 棒,则对于一行,若挖去的不是第一列或最后一列,则该行需两个棒子. 否则,需一个棒子. 故共 $2n-2$ 个棒子. 于是,$m(A)\leqslant 2n-2$.

再证明：$m(A)\geqslant 2n-2$.

对 n 归纳.

$n=2$ 时，显然至少要两个棒子.

设任意 $(n-1)\times(n-1)$ 的筛子 A'，有

$m(A')\geqslant 2(n-1)-2$.

考虑 $n\times n(n\geqslant 3)$ 的筛子 A. 则定义一个"十字"为一行和一列的格的集合，且这行与这列相交处为一个被挖去的格.

则每根棒在至少一个十字中.

由于每个棒至多含 $n-1$ 个格，共 $n(n-1)$ 个格，于是，至少 n 个棒.

若恰有 n 个棒，则每个棒恰长 $n-1$. 由每行每列均有一个挖去的格子，这 n 个棒必全横或全竖，这是不可能的. 故至少有 $n+1$ 个棒.

由抽屉原理，知有一个十字里有至少两个棒. 去掉这个十字，并将被分开的两边的棒合并仍为一个棒. 则现在至多 $m(A)-2$ 个棒. 此时，剩下一个 $(n-1)\times(n-1)$ 的筛子.

由归纳假设知

$m(A)-2\geqslant 2(n-1)-2\Rightarrow m(A)\geqslant 2n-2$.

综上，$M(A)=2n-2$.

6. 先证明一个引理.

引理　若 P、Q、R、S 四点共圆，PR 与 QS 交于点 O，过点 O 作 $l_A\perp PS$，$l_B\perp PQ$，$l_C\perp QR$，$l_D\perp RS$. 设点 A 在 l_A 上，AP 与 l_B 交于点 B，BQ 与 l_C 交于点 C，CR 与 l_D 交于点 D，DS 与 l_A 交于点 A'. 则点 A 与 A' 重合.

证明　如图 1，只需证：$OA=OA'$.

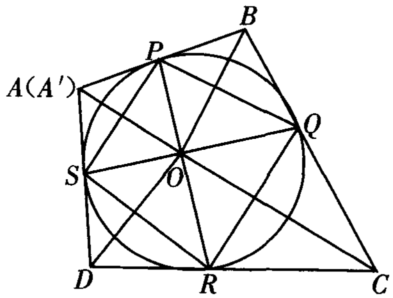


图 1

由张角定理知

$$\frac{\sin\angle AOP}{OB}+\frac{\sin\angle BOP}{OA}=\frac{\sin\angle AOB}{OP},①$$

$$\frac{\sin\angle BOQ}{OC}+\frac{\sin\angle COQ}{OB}=\frac{\sin\angle BOC}{OQ},②$$

$$\frac{\sin\angle COR}{OD}+\frac{\sin\angle ROD}{OC}=\frac{\sin\angle COD}{OR},③$$

$$\frac{\sin\angle DOS}{OA'}+\frac{\sin\angle SOA'}{OD}=\frac{\sin\angle DOA'}{OS}.④$$

注意到，

$\angle AOP=90^\circ-\angle OPS$

$=90^\circ-\angle RQO=\angle COQ$.

类似地，$\angle BOP=\angle DOS$，

$\angle BOQ=\angle DOR$，$\angle COR=\angle AOS$.

故①+③-②-④得

$OA=OA'$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\angle AOB}{OP}+\frac{\sin\angle COD}{OR}=\frac{\sin\angle BOC}{OQ}+\frac{\sin\angle DOA}{OS}.$$

又 $\angle AOB=180^\circ-\angle SPQ$，

$\angle COD=180^\circ-\angle SRQ$，

记四边形 $PQRS$ 的外接圆直径为 d，则

$$\sin\angle AOB=\sin\angle COD=\frac{QS}{d},$$

$$\sin\angle BOC=\sin\angle DOA=\frac{PR}{d}.$$

故 $OA=OA'\Leftrightarrow\dfrac{QS\cdot PR}{OP\cdot OR}=\dfrac{QS\cdot PR}{OS\cdot OQ}$.

由相交弦定理知上式成立.

引理得证.

若 P、Q、R、S 四点不共圆，设

$OS\cdot OQ<OP\cdot OR$，

在 OS 射线上取 S'，使得

$OS'\cdot OQ=OP\cdot OR$.

作 $OA_1\perp PS'$，与直线 AB 交于点 A_1；作 $OD_1\perp RS'$，与直线 CD 交于点 D_1.

则由 $OS'>OS$，知点 A_1 与 B 在点 A 同侧.

类似地，点 D_1 与 C 在点 D 同侧.

故 A_1D_1 与 OS 的交点与 O 在点 S 同侧，而由引理，A_1、D_1、S' 三点共线，矛盾.

（丁力煌　提供）

第十届罗马尼亚大师杯数学邀请赛

1. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，P 为边 AB 上一点，对角线 AC 与线段 DP 交于点 Q. 过点 P 作 CD 的平行线，与边 CB 的延长线交于点 K；过点 Q 作 BD 的平行线，与边 CB 的延长线交于点 L. 证明：$\triangle BKP$ 的外接圆与 $\triangle CLQ$ 的外接圆相切.

2. 是否存在不等于常数的实系数多项式 $P(x)$、$Q(x)$，满足

$$P^{10}(x)+P^{9}(x)=Q^{21}(x)+Q^{20}(x)? \quad ①$$

3. 安娜和鲍勃对一个无限正方形网格的各边进行"定向"游戏，定义每一步定向操作如下：任选一条尚未定向的单位边，沿该边的走向确定一个方向（有两种选择）作为该边的方向. 游戏由安娜开始，轮流定向. 若在任何时刻，能够按照边的方向形成一个环路，则鲍勃获胜，问：鲍勃是否有获胜策略？

4. 设 a、b、c、d 为正整数，且满足 $ad\neq bc,(a,b,c,d)=1$. 证明：当 n 遍历正整数时，$(an+b,cn+d)$ 的取值构成某个整数的所有正因数的集合.

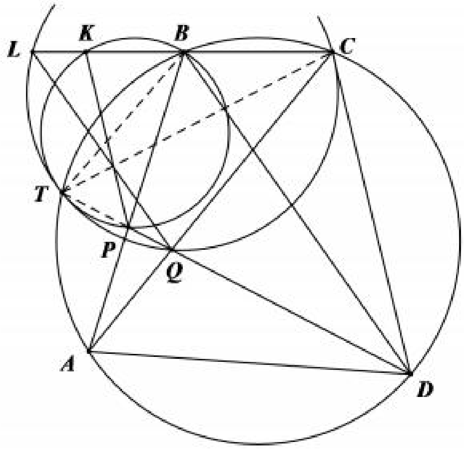
5. 设 n 为正整数，在圆周上给定 $2n$ 个不同的点. 将这些点划分成 n 对，并用带箭头的有向线段将每一对点相连. 若任两条有向线段均不相交，且不存在有向线段 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$，使得以 A、B、C、D 为顶点沿顺时针方向排列的凸四边形，则称所得的图形为"好的". 求好图形的个数.

6. 已知直线 l 与 $\odot O$ 相切，另一圆 Γ 与 l 相离，且 $\odot O$ 与圆 Γ 分别位于 l 的两侧，从圆 Γ 上一动点 X 作 $\odot O$ 的两条切线，分别与直线 l 交于点 Y、Z. 证明：当点 X 在圆 Γ 上变动时，$\triangle XYZ$ 的外接圆与两个固定圆相切.

第十届罗马尼亚大师杯数学邀请赛参考答案

1. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，P 为边 AB 上一点，对角线 AC 与线段 DP 交于点 Q. 过点 P 作 CD 的平行线，与边 CB 的延长线交于点 K；过点 Q 作 BD 的平行线，与边 CB 的延长线交于点 L. 证明：$\triangle BKP$ 的外接圆与 $\triangle CLQ$ 的外接圆相切.

证明 如图，延长 DP，与四边形 $ABCD$ 的外接圆交于点 T，联结 TB、TC、TP.



因为 B、C、D、T 四点共圆，所以，$\angle KBT=\angle CDT$.

由 $PK\parallel CD\Rightarrow\angle KPT=\angle CDT$，于是，$\angle KBT=\angle KPT$，这表明，点 T 在 $\triangle BKP$ 的外接圆上.

类似地，由 $LQ\parallel BD$ 及 B、C、D、T 四点共圆得 $\angle LQT=\angle BDT=\angle BCT$.

从而，点 T 也在 $\triangle LCQ$ 的外接圆上.

注意到，$\angle TBP=\angle TBA=\angle TCA=\angle TCQ$，这表明，从点 T 作 $\triangle BKP$ 的外接圆与 $\triangle CLQ$ 的外接圆的两条切线重合，即这两个圆在点 T 处相切.

2. 是否存在不等于常数的实系数多项式 $P(x)$、$Q(x)$，满足

$$P^{10}(x)+P^{9}(x)=Q^{21}(x)+Q^{20}(x)? \qquad ①$$

解 若存在非常数实系数多项式 $P(x)$、$Q(x)$，使得式①成立，则比较式①等号两边多项式的次数，知必存在正整数 n，使得

$$\deg P(x)=21n,\quad \deg Q(x)=10n$$

对式①两边关于 x 求导得

$$P'(x)(P(x))^{8}(10P(x)+9)=Q'(x)(Q(x))^{19}(21Q(x)+20) \qquad ②$$

由

$$(10P(x)+9,P(x))=(10P(x)+9,P(x)+1)\Rightarrow(10P(x)+9,(P(x))^{9}(P(x)+1))=1$$

由式①知 $(10P(x)+9,Q(x))=1$，再结合式②得 $(10P(x)+9)\mid Q'(x)(21Q(x)+20)$，而

$$0<\deg(Q'(x)(21Q(x)+20))=20n-1<21n=\deg(10P(x)+9)$$

矛盾. 因此，不存在符合题意的多项式 $P(x)$、$Q(x)$.

3. 安娜和鲍勃对一个无限正方形网格的各边进行“定向”游戏，定义每一步定向操作如下：任选一条尚未定向的单位边，沿该边的走向确定一个方向（有两种选择）作为该边的方向. 游戏由安娜开始，轮流定向. 若在任何时刻，能够按照边的方向形成一个环路，则鲍勃获胜，问：鲍勃是否有获胜策略？

解 鲍勃没有必胜策略，安娜有办法阻止鲍勃取胜.

定义 对于有公共顶点的两条单位边，若公共顶点恰位于其三个顶点（含一个公共顶点）的最下方和最左方，则称这两条边组成一个“LL 一角”；若公共顶点恰位于其三个顶点（含一个公共顶点）的最上方和最右方，则称这两条边组成一个“UR 一角”.

任取网格中一条竖直方向的边并定义其为“中线”. 称位于中线左侧的单位边为“左侧 -单位边”，称位于中线右侧的单位边为“右侧 -单位边”. 将左侧 -单位边按能构成 LL 一角分组，右侧 -单位边按能构成 UR 一角分组.

安娜只要按照下面的操作即可阻止鲍勃取胜.

安娜先从中线上任选一条单位边进行定向（方向随意），再观察鲍勃的操作，设鲍勃选择进行定向操作的单位边为 s.

若 s 在中线上，则安娜也继续在中线上选择单位边进行定向（方向随意）；

若 s 不在中线上，则安娜选择与 s 同一组的另一条单位边 t 进行定向操作. 在操作时，安娜对 t 所选择的方向应使得 s、t 无法构成顺时针（或逆时针）的同向，如下图.

由于每次安娜操作，均恰对一组中的两条单位边进行了操作，于是，她的这种操作可以一直进行下去.

按照这种操作方式，若最终依然形成了一个环路，则设此环路中最左边、最下边的顶点为 X，最右边、最上边的顶点为 Y. 若点 X 在中线的左侧，则 X 必为某个 LL 一角的顶点. 而据上面的定向操作，从点 X 引出的两条单位边被定向后一定无法形成环路，矛盾；若点 X 不在中线的左侧，则点 Y 必在中线的右侧，从而，Y 必为某个 UR 一角的顶点，同样也产生矛盾.

由此，鲍勃没有必胜策略.

4. 设 a、b、c、d 为正整数，且满足 $ad \neq bc, (a,b,c,d)=1$. 证明：当 n 遍历正整数时，$(an+b, cn+d)$ 的取值构成某个整数的所有正因数的集合.

证明 加强命题，将命题推广到 a、c 为非负整数，b、d 为任意整数时依然成立.

不失一般性，设 $0 \le a \le c$，令 $S(a,b,c,d) = \{(an+b, cn+d) \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$，对 a 用归纳法：

对于 $a > 0$，设 $c = aq + r$ $(q, r \in \mathbf{Z}, 0 < r < a)$，则 $(an+b, cn+d) = (an+b, rn+(d-qb))$.

令 $a' = r, b' = d-qb, c' = a, d' = b$，故 $S(a',b',c',d') = S(a,b,c,d)$，其中，

$$a'd' - b'c' = (c-qa)b - (d-qb)a = -(ad-bc) \neq 0，且(a',b',c',d') = (c-qa, b-qd, a, b) = (a,b,c,d) = 1$$

从而，只要命题对于满足 $0 \le a' \le a$ 的 a' 成立，则对于 $a > 0$，命题也成立.

下面只需证明命题对于 $a = 0$ 时成立，即证明 $S(0,b,c,d)$ 在 $bc \neq 0, (b,c,d) = 1$ 的条件下恰为一个整数因数构成的集合.

设 $b' = \dfrac{b}{(b,c)}$，故 $(b',c) = 1$. 由于 $(b,c,d) = 1$，于是，$S(0,b',c,d) = S(0,b,c,d)$.

对于 $S(0,b',c,d)$，其每个元素显然均为 b' 的因数. 反之，设 δ 为 b' 的因数，由 $(b',c) = 1$，知必存在某个整数 n，使得 $cn + d \equiv \delta \pmod{b'}$，故 $\delta = (b', cn+d)$.

因此，δ 为 $S(0,b',c,d)$ 中的元素，至此，$a=0$ 时命题成立.

综上，本题得证.

5. 设 n 为正整数，在圆周上给定 $2n$ 个不同的点. 将这些点划分成 n 对，并用带箭头的有向线段将每一对点相连. 若任两条有向线段均不相交，且不存在有向线段 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$，使得以 A、B、C、D 为顶点沿顺时针方向排列的凸四边形，则称所得的图形为“好的”. 求好图形的个数.

解 好图形的个数为 C_{2n}^{n}.

为证明这一点，将圆周上的点按逆时针方向编号为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$. 设 C 为好图形，用 $O(C)$ 表示该好图形中所有有向线段的始点组成的集合.

下面用数学归纳法证明：集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n}\}$ 的任何一个 n 元子集 S 均是唯一的好图形的原像.

对于 $n=1$ 时，情况易证.

假设圆上有 $2(n-1)$ 个点时，集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n-2}\}$ 的任何一个 $n-1$ 元子集 S 均是唯一的好图形的原像，则对于圆上有 $2n$ 个点时，考虑 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n}\}$ 的 n 元子集 S. 若存在好图形 C，使得 $S=O(C)$，则必存在 k $(k\in\{1,2,\cdots,2n\})$，使得 $a_k\in S$ 但 $a_{k+1}\notin S$（规定 $a_{2n+i}=a_i$）.

若以 a_k 为始点引出的有向线段 $\overrightarrow{a_ka_l}$ 满足 $k+1<l<2n+k$，则据好图形中有向线段不相交的要求，知以 a_{k+1} 为终点的有向线段 $\overrightarrow{a_ma_{k+1}}$ 中指标 m 应满足 $k+2<m<l-1$，而此时有向线段 $\overrightarrow{a_ka_l}$、$\overrightarrow{a_ma_{k+1}}$ 就构成了一个沿顺时针方向排列的凸四边形，矛盾，故 $l=k+1$.

反之，若图形 C 中含有有向线段 $\overrightarrow{a_ka_{k+1}}$，则这条有向线段必不会与其它有向线段相交，且不会与其它有向线段构成沿顺时针方向排列的凸四边形.

因此，从 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n}\}$ 中去掉 a_k、a_{k+1} 两点，并从子集 S 中去掉点 a_k 后，利用归纳假设，知从剩下的 $2n-2$ 个点中选出 $n-1$ 个点，这 $n-1$ 个点恰对应唯一的好图形. 这表明，在添加 a_k、a_{k+1} 两点后，$\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n}\}$ 的子集 S 恰唯一地对应一个好图形.

综上，好图形的个数为 C_{2n}^{n}.

6. 已知直线 l 与 $\odot O$ 相切，另一圆 Γ 与 l 相离，且 $\odot O$ 与圆 Γ 分别位于 l 的两侧，从圆 Γ 上一动点 X 作 $\odot O$ 的两条切线，分别与直线 l 交于点 Y、Z. 证明：当点 X 在圆 Γ 上变动时，$\triangle XYZ$ 的外接圆与两个固定圆相切.

证明 设 l 与 $\odot O$ 切于点 L，取圆 Γ 上任意一点 X 作 $\odot O$ 的两条切线，切点为 M、N.

以 O 为反演中心作反演变换 φ，并将 $\odot O$ 变换为 $\odot O$ 自身. 为便于表述，在不与原问题混淆的情况下，仍用原字母表示变换后对应的元素.

则在反演变换 φ 下：

(1) $\odot O$ 与点 L 保持不变；

(2) 直线 l 变换为经过点 O 且与 $\odot O$ 内切的圆 l；

(3) 圆 Γ 变换为完全位于 $\odot O$ 内且其内部不包含点 O 的圆 Γ；

(4) 点 X 变换为圆 Γ 上一点；

(5) 点 Y、Z 变换为在圆 l 上的点；

(6) 切线 XM、XN 变换为过点 O 且与 $\odot O$ 内切于点 M、N 的两个圆.

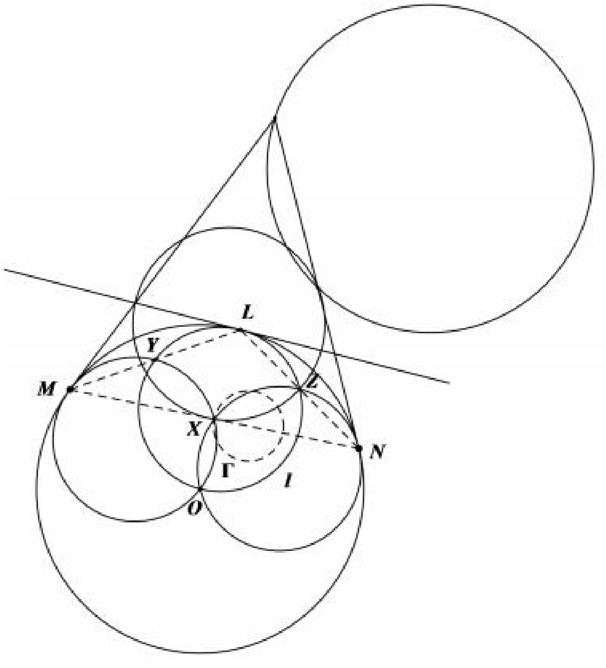
如下图所示.

易知，在进行变换 φ 后，X、Y、Z 分别为 MN、LM、LN 的中点，$\triangle XYZ$ 的外接圆恰为 $\triangle LMN$ 的九点圆（注：三角形九点圆的半径等于三角形的外接圆半径的一半）.

又 MN 的中点 X 在一个固定圆 Γ 上运动，而 L 为 $\odot O$ 上的定点，故 $\triangle LMN$ 的重心也在一个固定圆上运动（注：它们构成以 L 为位似中心、$2/3$ 为位似比的位似关系），而 $\triangle LMN$ 的外心是固定的（即为点 O），九点圆圆心 G 恰为垂心与外心连线的中点，即九点圆圆心与重心的距离等于外心与重心的距离的一半.

由此，若以 $\triangle LMN$ 的外心为位似中心，将重心按位似比 $\dfrac{3}{2}$ 进行位似变换即得 G，又前面已经证得重心在一个固定圆上变动，从而，G 也在一固定圆上变动.

同时，由九点圆的性质，知 $\triangle LMN$ 的九点圆半径也是固定的，为 $\odot O$ 半径的一半，从而，$\triangle LMN$ 的九点圆的半径固定，圆心在一固定圆上变动，其运动轨迹为一圆环形，它与一半径为 $\left|\frac{R}{2}-R'\right|$ 的圆相切，且与一半径为 $\left|\frac{R}{2}+R'\right|$ 的圆也相切，其中，R 为 $\odot O$ 的半径，R' 为 $\triangle LMN$ 九点圆圆心 G 所在固定圆的半径.



由上述一系列的变换，可看出 R' 与圆 Γ 的半径相等（先经过 2/3 的位似变换，再经过 3/2 的位似变换），均小于 $R/2$，故上面两个圆不经过 $\odot O$.

由反演变换的性质特点，知不经过点 O 的圆变换为不经过点 O 的圆，相切的圆仍变换为相切的圆，且反演变换是互反的. 因此，由在反演变换下成立的上述结论，知原题结论成立.

2019年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克试题

第1天 (2019年2月22日)

徐州赵力　翻译

1. Amy和Bob玩如下的游戏. 最初, Amy在黑板上写下一个正整数. 接下来, 两人轮流对黑板上现有的数进行变换操作, 由Bob先行. 每当轮到Bob操作时, 他将黑板上的数n替换为一个形如$n-a^2$的数, 其中a为一个正整数; 而每当轮到Amy操作时, 她将黑板上的数n替换为一个形如n^k的数, 其中k为一个正整数. 如果黑板上的数变为0, 则Bob获胜. 问Amy是否能够阻止Bob获胜?

2. 等腰梯形$ABCD$中, $AB // CD$. 点E为AC的中点. 令$\triangle ABE$, $\triangle CDE$的外接圆分别为w, Ω. 圆w在点A处的切线与圆Ω在点D处的切线相交于点P. 证明: PE与圆Ω相切.

3. 给定任意正实数ε. 证明: 除了有限多个正整数外, 对其余的所有正整数v, 在任意一个有v个顶点和至少$(1+\varepsilon)v$条边的图中, 均存在2个互异但等长的简单圈. (注: 简单圈指的是不允许在圈内有顶点重复出现的圈.)

4. 证明: 对任意一个正整数 n, 存在一个多边形(不一定为凸), 它无三个顶点共线, 且将其三角形剖分的方法恰有 n 种.

注: 多边形的三角形剖分指的是, 用位于多边形内部的对角线将该多边形分割为若干个三角形, 且这些对角线之间、及其与多边形的边之间均无公共内点(不包括端点).

5. 求所有的函数 $f: R \to R$, 使得对任意的 $x, y \in R$, 有下式成立:

$$f(x+yf(x))+f(xy)=f(x)+f(2019y).$$

6. 求所有值大于 1 的整数对(c, d), 满足以下条件:

对任意的首一整系数 d 次多项式 Q 及质数 $p>c(2c+1)$, 均存在一个至多由 $\left(\frac{2c-1}{2c+1}\right)p$ 个整数构成的集合 S, 使得

$$\bigcup_{s\in S}\{s,\ Q(s),\ Q(Q(s)),\ Q(Q(Q(s))),\ \ldots\}$$

包含模 p 的完全剩余系.

以下是英文版解析：

附：英文解答

The 11$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1 — Solutions

Problem 1. Amy and Bob play the game. At the beginning, Amy writes down a positive integer on the board. Then the players take moves in turn, Bob moves first. On any move of his, Bob replaces the number n on the blackboard with a number of the form $n-a^2$, where a is a positive integer. On any move of hers, Amy replaces the number n on the blackboard with a number of the form n^k, where k is a positive integer. Bob wins if the number on the board becomes zero. Can Amy prevent Bob's win?

RUSSIA, MAXIM DIDIN

Solution. The answer is in the negative. For a positive integer n, we define its *square-free part* $S(n)$ to be the smallest positive integer a such that n/a is a square of an integer. In other words, $S(n)$ is the product of all primes having odd exponents in the prime expansion of n. We also agree that $S(0)=0$.

Now we show that (i) on any move of hers, Amy does not increase the square-free part of the positive integer on the board; and (ii) on any move of his, Bob always can replace a positive integer n with a non-negative integer k with $S(k)<S(n)$. Thus, if the game starts by a positive integer N, Bob can win in at most $S(N)$ moves.

Part (i) is trivial, as the definition of the square-part yields $S(n^k)=S(n)$ whenever k is odd, and $S(n^k)=1\leq S(n)$ whenever k is even, for any positive integer n.

Part (ii) is also easy: if, before Bob's move, the board contains a number $n=S(n)\cdot b^2$, then Bob may replace it with $n'=n-b^2=(S(n)-1)b^2$, whence $S(n')\leq S(n)-1$.

Remarks. (1) To make the argument more transparent, Bob may restrict himself to subtract only those numbers which are divisible by the maximal square dividing the current number. This restriction having been put, one may replace any number n appearing on the board by $S(n)$, omitting the square factors.

After this change, Amy's moves do not increase the number, while Bob's moves decrease it. Thus, Bob wins.

(2) In fact, Bob may win even in at most 4 moves of his. For that purpose, use Lagrange's four squares theorem in order to expand $S(n)$ as the sum of at most four squares of positive integers: $S(n)=a_1^2+\cdots+a_s^2$. Then, on every move of his, Bob can replace the number $(a_1^2+\cdots+a_k^2)b^2$ on the board by $(a_1^2+\cdots+a_{k-1}^2)b^2$. The only chance for Amy to interrupt this process is to replace a current number by its even power; but in this case Bob wins immediately.

On the other hand, four is indeed the minimum number of moves in which Bob can guarantee himself to win. To show that, let Amy choose the number 7, and take just the first power on each of her subsequent moves.

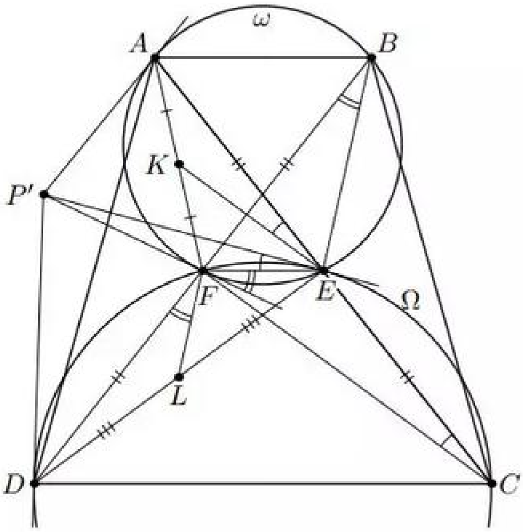
Problem 2. Let $ABCD$ be an isosceles trapezoid with $AB \parallel CD$. Let E be the midpoint of AC. Denote by ω and Ω the circumcircles of the triangles ABE and CDE, respectively. Let P be the crossing poitn of the tangent to ω at A with the tangent to Ω at D. Prove that PE is tangent to Ω.

Solution 1. If $ABCD$ is a rectangle, the statement is trivial due to symmetry. Hence, in what follows we assume $AD \nparallel BC$.

Let F be the midpoint of BD; by symmetry, both ω and Ω pass through F. Let P' be the meeting point of tangents to ω at F and to Ω at E. We aim to show that $P' = P$, which yields the required result. For that purpose, we show that $P'A$ and $P'D$ are tangent to ω and Ω, respectively.

Let K be the midpoint of AF. Then EK is a midline in the triangle ACF, so $\angle(AE, EK) = \angle(EC, CF)$. Since $P'E$ is tangent to Ω, we get $\angle(EC, CF) = \angle(P'E, EF)$. Thus, $\angle(AE, EK) = \angle(P'E, EF)$, so EP' is a symmedian in the triangle AEF. Therefore, EP' and the tangents to ω at A and F are concurrent, and the concurrency point is P' itself. Hence $P'A$ is tangent to ω.

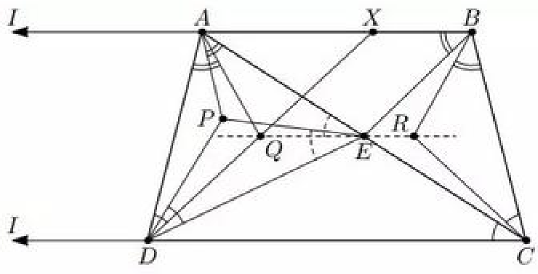
The second claim is similar. Taking L to be the midpoint of DE, we have $\angle(DF, FL) = \angle(FB, BE) = \angle(P'F, FE)$, so $P'F$ is a symmedian in the triangle DEF, and hence P' is the meeting point of the tangents to Ω at D and E.



Remark. The above arguments may come in different orders. E.g., one may define P' to be the point of intersection of the tangents to Ω at D and E — hence obtaining that $P'F$ is a symmedian in $\triangle DEF$, then deduce that $P'F$ is tangent to ω, and then apply a similar argument to show that $P'E$ is a symmedian in $\triangle AEF$, whence $P'A$ is tangent to ω.

Solution 2. Let Q be the isogonal conjugate of P with respect to $\triangle AED$, so $\angle(QA, AD) = \angle(EA, AP) = \angle(EB, BA)$ and $\angle(QD, DA) = \angle(ED, DP) = \angle(EC, CD)$. Now our aim is to prove that $QE \parallel CD$; this will yield that $\angle(EC, CD) = \angle(AE, EQ) = \angle(PE, ED)$, whence PE is tangent to Ω.

Let DQ meet AB at X. Then we have $\angle(XD, DA) = \angle(EC, CD) = \angle(EA, AB)$ and $\angle(DA, AX) = \angle(AB, BC)$, hence the triangles DAX and ABC are similar. Since $\angle(AB, BE) = \angle(DA, AQ)$, the points Q and E correspond to each other in these triangles, hence Q is the midpoint of DX. This yields that the points Q and E lie on the midline of the trapezoid parallel to CD, as desired.



Remark. The last step could be replaced with another application of isogonal conjugacy in the following manner. Reflect Q in the common perpendicular bisector of AB and CD to obtain a point R such that $\angle(CB, BR) = \angle(QA, AD) = \angle(EB, BA)$ and $\angle(BC, CR) = \angle(QD, DA) = \angle(EC, CD)$. These relations yield that the points E and R are isogonally conjugate in a triangle BCI, where I is the (ideal) point of intersection of BA with CD. Since E is equidistant from AB and CD, R is also equidistant from them, which yields what we need. (The last step deserves some explanation, since one vertex of the triangle is ideal. Such explanation may be obtained in many different ways — e.g., by a short computation in sines, or by noticing that, as in the usual case, R is the circumcenter of the triangle formed by the reflections of E in the sidelines AB, BC, and CD.)

Solution 3. *(Dan Carmon)* Let O be the intersection of the diagonals AC and BD. Let F be the midpoint of BD. Let S be the second intersection point of the circumcircles of triangles AOF and DOE. We will prove that SD and SE are tangent to Ω; the symmetric argument would then imply also that SA and SF are tangent to Γ. Thus $S = P$ and the claimed tangency holds.

We first prove that OS is parallel to AB and DC. Compute the powers of the points A, B with respect to the circumcircles of AOF and DOE:

$$d(A, AOF) = 0, \quad d(A, DOE) = AO \cdot AE$$

$$d(B, AOF) = BO \cdot BF, \quad d(B, DOE) = BO \cdot BD = 2BO \cdot BF$$

And therefore

$$d(B, DOE) - d(B, AOF) = BO \cdot BF = AO \cdot AE = d(A, DOE) - d(A, AOF)$$

Thus both A and B belong to a locus of the form

$$d(X, DOE) - d(X, AOF) = \text{const},$$

which is always a lines parallel to the radical axis of the respective circles. Since this radical axis is OS by definition, it follows that AB is parallel to OS, as claimed.

Now by angle chasing in the cyclic quadrilateral $DSOE$, we find

$$\angle(SD, DE) = \angle(SO, OE) = \angle(DC, CE),$$
$$\angle(SE, ED) = \angle(SO, OD) = \angle(DC, DB) = \angle(AC, CD) = \angle(EC, CD),$$

and these angle equalities are exactly the conditions of SD, SE being tanget to Ω, as claimed.

Remarks. **(1)** The solution was motivated by the following observation: Suppose P is the intersection of the tangents to Ω at D and E as claimed. Then by single angle chasing we observe that the isogonal conjugate of P in the triangle DOE is the common ideal point at infinity of DC and EF. This implies that P is on the circumcircle of DOE and that OP is parallel to DC (to be precise, it implies that the reflection of OP in the angle bisector of DOE is parallel to DC and EF – but the angle bisector is also parallel to these lines, so in fact OP is the angle bisector). By symmetry it follows that P is also on the circumcircle of AOF, thus the construction.

(2) The key parts of the proof can be described as (1) Constructing S, (2) Proving that OS is parallel to AB and CD, and (3) Concluding that $S = P$ and finishing the problem. Parts (2) and (3) can be performed in various other ways. For example, part (2) can be proved by showing that the circumcentres of AOF and DOE lie on a line perpendicular to the trapezium's bases; part (3) can be proved considering the spiral map taking the circumcircle of DOC to the circumcircle of DSE. Since O is the second intersction point of these circles, and since OCE are collinear and SO is tangent to the circumcircle of DOC at O (by symmetry), it follows that the spiral map sends C to E and O to S, i.e. the triangle DSE is similar to the isoceles triangle DOC, from which the remainder of the angle chase is trivial.

Problem 3. Given any positive real number ε, prove that, for all but finitely many positive integers v, any graph on v vertices with at least $(1+\varepsilon)v$ edges has two distinct simple cycles of equal lengths.

(Recall that the notion of a *simple cycle* does not allow repetition of vertices in a cycle.)

RUSSIA, FEDOR PETROV

Solution. Fix a positive real number ε, and let G be a graph on v vertices with at least $(1+\varepsilon)v$ edges, all of whose simple cycles have pairwise distinct lengths.

Assuming $\varepsilon^2 v \geq 1$, we exhibit an upper bound linear in v and a lower bound quadratic in v for the total number of simple cycles in G, showing thereby that v cannot be arbitrarily large, whence the conclusion.

Since a simple cycle in G has at most v vertices, and each length class contains at most one such, G has at most v pairwise distinct simple cycles. This establishes the desired upper bound.

For the lower bound, consider a spanning tree for each component of G, and collect them all together to form a spanning forest F. Let A be the set of edges of F, and let B be the set of all other edges of G. Clearly, $|A| \leq v-1$, so $|B| \geq (1+\varepsilon)v - |A| \geq (1+\varepsilon)v - (v-1) = \varepsilon v + 1 > \varepsilon v$.

For each edge b in B, adjoining b to F produces a unique simple cycle C_b through b. Let S_b be the set of edges in A along C_b. Since the C_b have pairwise distinct lengths, $\sum_{b\in B} |S_b| \geq 2 + \cdots + (|B|+1) = |B|(|B|+3)/2 > |B|^2/2 > \varepsilon^2 v^2/2$.

Consequently, some edge in A lies in more than $\varepsilon^2 v^2/(2v) = \varepsilon^2 v/2$ of the S_b. Fix such an edge a in A, and let B' be the set of all edges b in B whose corresponding S_b contain a, so $|B'| > \varepsilon^2 v/2$.

For each 2-edge subset $\{b_1, b_2\}$ of B', the union $C_{b_1} \cup C_{b_2}$ of the cycles C_{b_1} and C_{b_2} forms a θ-graph, since their common part is a path in F through a; and since neither of the b_i lies along this path, $C_{b_1} \cup C_{b_2}$ contains a third simple cycle C_{b_1,b_2} through both b_1 and b_2. Finally, since $B' \cap C_{b_1,b_2} = \{b_1, b_2\}$, the assignment $\{b_1, b_2\} \mapsto C_{b_1,b_2}$ is injective, so the total number of simple cycles in G is at least $\binom{|B'|}{2} > \binom{\varepsilon^2 v/2}{2}$. This establishes the desired lower bound and concludes the proof.

Remarks. (1) The problem of finding two cycles of equal lengths in a graph on v vertices with $2v$ edges is known and much easier — simply consider all cycles of the form C_b.

The solution above shows that a graph on v vertices with at least $v + \Theta(v^{3/4})$ edges has two cycles of equal lengths. The constant $3/4$ is not sharp; a harder proof seems to show that $v + \Theta(\sqrt{v \log v})$ edges would suffice. On the other hand, there exist graphs on v vertices with $v + \Theta(\sqrt{v})$ edges having no such cycles.

(2) To avoid graph terminology, the statement of the problem may be rephrased as follows:

> Given any positive real number ε, prove that, for all but finitely many positive integers v, any v-member company, within which there are at least $(1+\varepsilon)v$ friendship relations, satisfies the following condition: For some integer $u \geq 3$, there exist two distinct u-member cyclic arrangements in each of which any two neighbours are friends. (Two arrangements are distinct if they are not obtained from one another through rotation and/or symmetry; a member of the company may be included in neither arrangement, in one of them or in both.)

Sketch of solution 2. *(Po-Shen Loh)* Recall that the *girth* of a graph G is the minimal length of a (simple) cycle in this graph.

Lemma. For any fixed positive δ, a graph on v vertices whose girth is at least δv has at most $v + o(v)$ edges.

Proof. Define $f(v)$ to be the maximal number f such that a graph on v vertices whose girth is at least δv may have $v + f$ edges. We are interested in the recursive estimates for f.

Let G be a graph on v vertices whose gifth is at least δv containing $v + f(v)$ edges. If G contains a leaf (i.e., a vertex of degree 1), then one may remove this vertex along with its edge, obtaining a graph with at most $v - 1 + f(v-1)$ edges. Thus, in this case $f(v) \leq f(v-1)$.

Define an *isolated path* of length k to be a sequence of vertices $v_0, v_1, \dots, v_k$, such that v_i is connected to v_{i+1}, and each of the vertices $v_1, \dots, v_{k-1}$ has degree 2 (so, these vertices are connected only to their neighbors in the path). If G contains an isolated path $v_0, \dots, v_k$ of length, say, $k > \sqrt{v}$, then one may remove all its middle vertices $v_1, \dots, v_{k-1}$, along with all their k edges. We obtain a graph on $v - k + 1$ vertices with at most $(v - k + 1) + f(v - k + 1)$ edges. Thus, in this case $f(v) \leq f(v - k + 1) + 1$.

Assume now that the lengths of all isolated paths do not exceed $\sqrt{v}$; we show that in this case v is bounded from above. For that purpose, we replace each maximal isolated path by an edge between its endpoints, removing all middle vertices. We obtain a graph H whose girth is at least $\delta v / \sqrt{v} = \delta\sqrt{v}$. Each vertex of H has degree at least 3. By the girth condition, the neighborhood of any vertex x of radius $r = \lfloor (\delta\sqrt{v} - 1)/2 \rfloor$ is a tree rooted at x. Any vertex at level $i < r$ has at least two sons; so the tree contains at least $2^{\lfloor (\delta\sqrt{v}-1)/2 \rfloor}$ vertices (even at the last level). So, $v \geq 2^{\lfloor (\delta\sqrt{v}-1)/2 \rfloor}$ which may happen only for a finite number of values of v.

Thus, for all large enough values of v, we have either $f(v) \leq f(v-1)$ or $f(v) \leq f(v - k + 1)$ for some $k > \sqrt{v}$. This easily yields $f(v) = o(v)$, as desired. $\square$

Now we proceed to the problem. Consider a graph on v vertices containing no two simple cycles of the same length. Take its $\lfloor \varepsilon v/2 \rfloor$ shortest cycles (or all its cycles, if their total number is smaller) and remove an edge from each. We get a graph of girth at least $\varepsilon v/2$. By the lemma, the number of edges in the obtained graph is at most $v + o(v)$, so the number of edges in the initial graph is at most $v + \varepsilon v/2 + o(v)$, which is smaller than $(1 + \varepsilon)v$ if v is large enough.