# “根源杯”数学奥林匹克邀请赛

2018年8月

## 一 填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

**1.** 在平面直角坐标系中，圆$P$以$(0,1)$为圆心，半径为1，已知抛物线$y=ax^2$与圆$P$有除$(0,0)$之外的交点，则实数$a$的取值范围是__________.

**2.** 设$A$是单位圆上一定点，$P,Q$为圆上的动点，且$AP+AQ=2\sqrt{3}$，则$\Delta APQ$面积的最大值为______.

**3.** 若实数$x,y$满足$x-3\sqrt{x}-1=3\sqrt{y}-y+2$，则$x+y$的最大值为__________.

**4.** 已知$f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin(x+\beta)$，且$|\beta|\le\pi$，只要$|f(x_0)-g(x_0)|>\dfrac{1}{2}$，就有$f(x_0)=g(x_0)$，则$\beta$的取值范围是__________.

**5.** 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1\ne 0$，$a_4a_{25}=2a_7^2$，且存在正整数$m,n$使得$a_m+2a_n=a_{25}$，则$\left(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$的最小值为__________.

**6.** 在正十二边形的顶点中任取三个，作一个三角形，该三角形为锐角三角形的概率为__________.

**7.** 四面体的4个旁切球（在四面体的外部，仅与四面体的一个面相切，与其它三个面所在平面相切）的半径分别为$8,9,10,12$，则该四面体的内切球半径为__________.

**8.** 设$x,y\in\mathbf{R}$，对任意$n\in\mathbf{N}_+$，$nx+\dfrac{1}{n}y\ge 1$，则$(2a^2+a)x+2y$的最小值为__________（其中$a$是取值为正整数的常数，结果请用$a$表示）.

## 二 解答题（本大题共3小题，满分56分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

**9.** （本题满分16分）对于椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$c$为椭圆半焦距，$e$为椭圆离心率，过原点的直线与椭圆$C$交于$A,B$两点（$A,B$不是椭圆$C$的顶点），点$D$在椭圆$C$上，且$AD\perp AB$，直线$BD$与$x$轴、$y$轴分别交于$M,N$两点，求$\triangle OMN$面积的最大值.

**10.** （本题满分20分）函数$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$不是增函数，且对任意正实数$x,y,z$均有

$$f\left(\frac{3xyz}{xy+yz+zx}\right)=\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$

证明：$f$的值域中一定包含无穷多个不同的正数.

**11.** （本题满分20分）求最大的$\lambda$，使得对任意$a,b,c,x,y,z>0$都有

$$\frac{by+cz}{a(y+z)}+\frac{cz+ax}{b(z+x)}+\frac{ax+by}{c(x+y)}\ge\lambda.$$