“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

参考答案

2018年8月

一 填空题（本大题共8小题，每小题8分，共64分）

1. 在平面直角坐标系中，圆P以$(0,1)$为圆心，半径为1，已知抛物线$y=ax^2$与圆P有除$(0,0)$之外的交点，则实数a 的取值范围是__________.

答案：$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.　　（王坤　供题）

解析：由

$$\begin{cases} y=ax^2 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$$

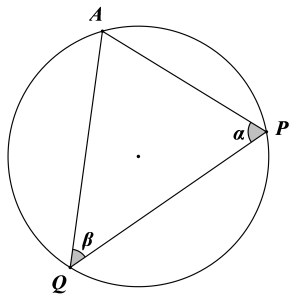
得$a>0$，$x^2+(ax^2-1)^2=1$，$x^2(a^2x^2-2a+1)=0$有非零解，即$0<x^2=\dfrac{2a-1}{a^2}, a>\dfrac{1}{2}$.

2. 设A是单位圆上一定点，P,Q为圆上的动点，且$AP+AQ=2\sqrt{3}$，则ΔAPQ面积的最大值为__________.

答案：$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.　　（黄军华　供题）

解析：设$\angle APQ=\alpha$，$\angle AQP=\beta$，$\therefore AQ=2\sin\alpha$，$AP=2\sin\beta\Rightarrow\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{3}$，

$$\begin{aligned}
S_{APQ}&=\frac{1}{2}AP\cdot AQ\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\\
&=[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\sin(\alpha+\beta)\le(1-\cos(\alpha+\beta))\sin(\alpha+\beta)\\
&=\sqrt{(1-\cos(\alpha+\beta))^3(1+\cos(\alpha+\beta))}\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(1-\cos(\alpha+\beta))(1-\cos(\alpha+\beta))(1-\cos(\alpha+\beta))(3+3\cos(\alpha+\beta))}\\
&\le\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{3-3\cos(\alpha+\beta)+3+3\cos(\alpha+\beta)}{4}\right)^4}\\
&=\frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$



题2 图

$(1-\cos(\alpha+\beta))=3+3\cos(\alpha+\beta)$，即$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}$且$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 时取到最大值.

3. 若实数x,y满足$x-3\sqrt{x}-1=3\sqrt{y}-y+2$，则$x+y$的最大值为__________.

答案：$12+3\sqrt{15}$.　　（王坤　供题）

解析：记$u=\sqrt{x}$，$v=\sqrt{y}$，则$3(u+v)=u^2+v^2-3$，记$a=x+y=u^2+v^2$，则$\begin{cases} u+v=\dfrac{a-3}{3} \\ u^2+v^2=a \end{cases}$ ①，故

$$uv=\frac{1}{2}[(u+v)^2-(u^2+v^2)]-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{9}-\frac{5a}{3}+1\right)$$

①有非负实数解$(u,v)=(\sqrt{x},\sqrt{y})\Leftrightarrow$关于$t$的一元二次方程

$$t^2-\frac{a-3}{3}t+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{9}-\frac{5a}{3}+1\right)=\frac{1}{18}[18t^2-6(a-3)t+a^2-15a+9]=0$$

有两个非负实根$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\dfrac{1}{18^2}[36(a-3)^2-72(a^2-15a+9)]\geq 0\\ \dfrac{1}{18}(a^2-15a+9)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a^2+24a-9\geq 0\\ a^2-15a+9\geq 0\end{cases}$，

又$a\geq 0$，解得$\begin{cases}12-3\sqrt{15}\leq a\leq 12+3\sqrt{15}\\ a\leq\dfrac{15-3\sqrt{21}}{2}或a\geq\dfrac{15+3\sqrt{21}}{2}\\ a\geq 0\end{cases}$，$a_{\max}=12+3\sqrt{15}$，由充分必要条件知这个最大值可取到.

4. 已知$f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin(x+\beta)$，且$|\beta|\leq\pi$，只要$|f(x_0)-g(x_0)|>\dfrac{1}{2}$，就有$f(x_0)=g(x_0)$，则$\beta$的取值范围是__________.

答案：$-\arccos\dfrac{7}{8}\leq\beta\leq\arccos\dfrac{7}{8}$. （刘凯峰　供题）

解析：由题意知，对任意实数x，均有$|f(x)-g(x)|\leq\dfrac{1}{2}$，于是

$$\begin{aligned}|\sin(x+\beta)-\sin x|\leq\frac{1}{2}&\Rightarrow|\sin\beta\cos x+\cos\beta\sin x-\sin x|\leq\frac{1}{2}\\&\Rightarrow|\sin\beta\cos x+(\cos\beta-1)\sin x|\leq\frac{1}{2}\\&\Rightarrow|\sqrt{\sin^2\beta+(\cos\beta-1)^2}\sin(x+\varphi)|\leq\frac{1}{2}\\&\Rightarrow|\sqrt{\sin^2\beta+(\cos\beta-1)^2}|\leq\frac{1}{2}\\&\Rightarrow\cos\beta\geq\frac{7}{8}\end{aligned}$$

所以，$-\arccos\dfrac{7}{8}\leq\beta\leq\arccos\dfrac{7}{8}$.

5. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1\neq 0$，$a_4a_{25}=2a_7^2$，且存在正整数m,n使得$a_m+2a_n=a_{25}$，则$\left(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$的最小值为__________.

答案：$\dfrac{21}{55}$. （刘凯峰　供题）

解析：设$\{a_n\}$公差为d，由$a_4a_{25}=2a_7^2$，得

$$(a_1+3d)(a_1+24d)=2(a_1+6d)^2$$

解得$a_1=3d$，由$a_m+2a_n=a_{25}$，可得$m+2n=21$.

$$21\cdot\left(\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+2n)=4+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}$$

设$f(x)=4x+\dfrac{1}{x}(x>0)$，由$f'(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$，知$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增.

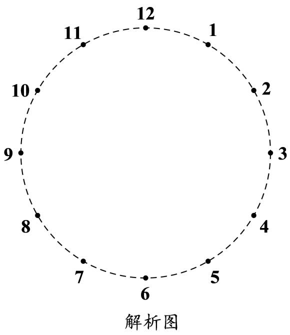
容易知道，当$\begin{cases}m=9\\ n=6\end{cases}$或$\begin{cases}m=11\\ n=5\end{cases}$时，$4+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{m}{n}$取得最小值；

通过计算比较，当$\begin{cases}m=11\\ n=5\end{cases}$时，$4+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{m}{n}$取得最小值，因此，$\left(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$的最小值为$\dfrac{21}{55}$.

6. 在正十二边形的顶点中任取三个，作一个三角形，该三角形为锐角三角形的概率为__________.

答案： $\dfrac{2}{11}$. （李红　供题）

解析： 如图，我们把点编号为$1, 2, 3, \cdots$，并规定若$i \equiv j \pmod{12}$，则i, j表示同一个点.



解析图

设$i < j < k < i + 12$，我们来判断三角形(i, j, k)的形状.

当且仅当$k = i+6$时，三角形为直角三角形，此时j有5种取值，故共有$12 \times 5 = 60$个直角三角形；

当$k = i+m(m = 2, 3, 4, 5)$时，三角形为钝角三角形，j的取值分别有$1, 2, 3, 4$种可能，所以三角形总个数为

$$12 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 120\text{（个）}$$

在12个点中任取三个点，构成的不同三角形共有

$$C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220\text{（个）}$$

所以锐角三角形的个数为

$$220 - 60 - 120 = 40\text{（个）}$$

于是所求概率为$\dfrac{40}{220} = \dfrac{2}{11}$.

7. 四面体的4个旁切球（在四面体的外部，仅与四面体的一个面相切，与其它三个面所在平面相切）的半径分别为$8, 9, 10, 12$，则该四面体的内切球半径为__________.

答案： $\dfrac{720}{151}$. （王坤　供题）

解析： 设四面体$A_1A_2A_3A_4$的内切球球心为O，半径为r，与不含顶点A_i的面相切的旁切球球心为O_i，半径为r_i，S_i表示四面体不含A_i 的面面积，$i = 1, 2, 3, 4$，$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，四面体体积$V = \sum\limits_{i=1}^{4} \dfrac{1}{3} S_i r$，即

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{3V} \sum_{i=1}^{4} S_i = \frac{1}{3V} S$$

又

$$\begin{aligned} V &= V_{O_1-A_1A_2A_3} + V_{O_1-A_1A_2A_4} + V_{O_1-A_1A_3A_4} - V_{O_1-A_2A_3A_4} \\ &= \frac{1}{3} S_4 r_1 + \frac{1}{3} S_3 r_1 + \frac{1}{3} S_2 r_1 - \frac{1}{3} S_1 r_1 = \frac{1}{3}(S - 2S_1) r_1 \end{aligned}$$

则$\dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{3V}(S - 2S_1)$，同理$\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{3V}(S - 2S_i)$，$i = 2, 3, 4$.

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{3V}(4S - 2S_1 - 2S_2 - 2S_3 - 2S_4) = \frac{1}{3V} \cdot 2S = \frac{2}{r}$$

$$r = \frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{r_i}} = \frac{2}{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = \frac{720}{151}$$

8. 设$x, y \in \mathbf{R}$，对任意$n \in \mathbf{N}_+$，$nx + \dfrac{1}{n} y \geq 1$，则$(2a^2 + a)x + 2y$的最小值为__________（其中$a$是取值为正整数的常数，结果请用$a$表示）.

答案： $\dfrac{4a^2 + 3a}{2a + 1}$. （李伟　供题）

解析： 将直线$nx + \dfrac{1}{n} y = 1$与直线$(n+1)x + \dfrac{1}{n+1} y = 1$称为两条相邻直线，易知两直线交点为$A_n\left(\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{n^2+n}{2n+1}\right)$，

若将直线$x+y=1$与直线$y=0$的交点记为$A_0(1,0)$，则点集$\{A_n\},n\in N$依次连接而成的折线所围成的区域恰好是问题的可行域.只需证明任意直线$mx+\frac{1}{m}y=1(m>n,m\in N)$，点$A_n\left(\frac{1}{2n+1},\frac{n^2+n}{2n+1}\right)$均在其上方，将点$A_n\left(\frac{1}{2n+1},\frac{n^2+n}{2n+1}\right)$代入直线$mx+\frac{1}{m}y=1$ 有

$$m\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{m}\cdot\frac{n^2+n}{2n+1}=\frac{m^2+n^2+n}{m(2n+1)}$$

因为

$$m^2+n^2+n-m(2n+1)=(m-n)(m-n-1)\geq 0$$

所以$m\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{m}\cdot\frac{n^2+n}{2n+1}\geq 1$，得证.本题令$(2a^2+a)x+2y=z$，则

$$y=-\frac{2a^2+a}{2}x+\frac{1}{2}z$$

又$-\frac{2a^2+a}{2}\in[-(a+1)^2,-a^2]$，故直线$y=-\frac{2a^2+a}{2}x+\frac{1}{2}z$过点$A_0\left(\frac{1}{2a+1},\frac{a(a+1)}{2a+1}\right)$时，

$$z=(2a^2+a)x+2y=\frac{4a^2+3a}{2a+1}$$

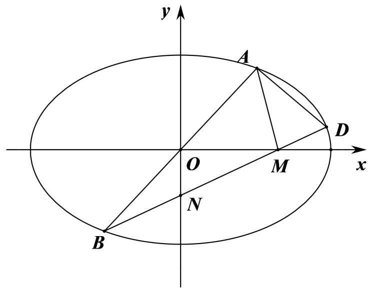
二 解答题（本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

9. （本题满分16分）对于椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$c$为椭圆半焦距，$e$为椭圆离心率，过原点的直线与椭圆$C$交于$A,B$ 两点（A,B不是椭圆C的顶点），点D在椭圆C上，且$AD\perp AB$，直线BD与x轴、y轴分别交于M,N 两点，求$\triangle OMN$面积的最大值. （蔡玉书　供题）

解析：设$A(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则$B(-x_1,-y_1)$，因为

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \qquad ②$$



② − ①得

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$$

即

$$\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{b^2}{a^2}$$

即

$$k_{AD}\cdot k_{BD}=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}$$

又$AB\perp AD$，所以$k_{AD}\cdot k_{AB}=-1$，从而$k_{BD}=\frac{b^2}{a^2}k_{AB}$.设$M(x_0,0)$，则

$$k_{BD}=k_{BM}=\frac{y_1}{x_0+x_1},\ k_{AB}=k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}$$

所以$\frac{y_1}{x_0+x_1}=\frac{b^2y_1}{a^2x_1}$，显然$y_1\neq 0$，于是$x_0=\frac{c^2}{b^2}x_1$.
因为$M\left(\frac{c^2}{b^2}x_1,0\right)$，$k_{BD}=k_{BM}=\frac{b^2}{a^2}k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}$，所以直线$BM$ 的方程为

$$y=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}\left(x-\frac{c^2}{b^2}x_1\right)$$

令$x=0$，得$y_N=-\dfrac{c^2}{a^2}y_1$.
因为$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，所以$1\geq 2\dfrac{|x_1y_1|}{ab}$，当且仅当$|x_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$|y_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$时取等号，所以$\triangle OMN$的面积$S=\dfrac{1}{2}|x_0|\cdot|y_N|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c^4}{a^2b^2}|x_1y_1|\leq\dfrac{c^4}{4ab}$，即$\triangle OMN$ 面积的最大值是$\dfrac{c^4}{4ab}$.

10. （本题满分20分）函数$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$不是增函数，且对任意正实数$x,y,z$均有

$$f\left(\frac{3xyz}{xy+yz+zx}\right)=\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$

证明：f的值域中一定包含无穷多个不同的正数. （王坤　供题）

证明：对任意正实数a,t, 令$x=\dfrac{1}{t}$，$y=\dfrac{1}{t+a}$，$z=\dfrac{1}{t+2a}$,$t,a\in\mathbf{R}^+$，则

$$\frac{3xyz}{xy+yz+zx}=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{t+a}$$

故$f\left(\dfrac{1}{t+a}\right)=\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(\frac{1}{t+a}\right)+f\left(\frac{1}{t+2a}\right)}{3}$，即

$$f\left(\frac{1}{t+a}\right)-f\left(\frac{1}{t}\right)=f\left(\frac{1}{t+2a}\right)-f\left(\frac{1}{t+a}\right),t,a>0\qquad(\star)$$

由f非增函数知,存在$0<x_1<x_2$，使得$f(x_1)>f(x_2)$.
令$d=f(x_1)-f(x_2)>0,r=\dfrac{1}{x_2}>0$, $a=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}>0$.
由$(\star)$知, 对任意正整数n

$$d=f\left(\frac{1}{r+a}\right)-f\left(\frac{1}{r}\right)=f\left(\frac{1}{r+2a}\right)-f\left(\frac{1}{r+a}\right)=\cdots=f\left(\frac{1}{r+na}\right)-f\left(\frac{1}{r+(n-1)a}\right)$$

故对任意正整数n

$$f\left(\frac{1}{r+na}\right)=f\left(\frac{1}{r}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{1}{r+ka}\right)-f\left(\frac{1}{r+(k-1)a}\right)\right]=f\left(\frac{1}{r}\right)+nd$$

当n充分大$\left(n>-\dfrac{f\left(\frac{1}{r}\right)}{d}\right)$时，上式为正，这就给出了$f$的值域中有无穷多个不同正数.

11.（本题满分20分）求最大的λ，使得对任意$a,b,c,x,y,z>0$都有$\dfrac{by+cz}{a(y+z)}+\dfrac{cz+ax}{b(z+x)}+\dfrac{ax+by}{c(x+y)}\geq\lambda$.

（赵斌　供题）

解析：λ的最大值为2，一方面取$b=c=1$，得到

$$\frac{1}{a}+\frac{z+ax}{z+x}+\frac{ax+y}{x+y}\geq\lambda$$

在上式取$x\to 0$，得到

$$\frac{1}{a}+2\geq\lambda$$

再令$a\to\infty$，得到$\lambda\leq 2$；
另一方面，不妨设$a=\max\{a,b,c\}$，则

$$\frac{cz+ax}{b(z+x)}\geq\frac{c}{b},\quad\frac{ax+by}{c(x+y)}\geq\frac{b}{c}$$

因此我们有

$$\frac{by+cz}{a(y+z)}+\frac{cz+ax}{b(z+x)}+\frac{ax+by}{c(x+y)}\geq\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2$$