“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

2018年7月

一（本题满分40分）

申花路幼儿园某班级的所有小孩希望上学时，每天都只和一个好朋友一起玩或者独自玩耍，一周内恰好和每一个好朋友一起玩一次（每周5天上学，可以独自玩耍很多天）.

某一周，12个小孩坐在正二十面体的12个顶点上，发现每个小孩恰好和相邻5个顶点上的小孩是好朋友. 证明：这周可以安排玩耍搭配方式，使得上述目标可以实现.

又一周，新来了一个小孩，朋友关系发生了变化，但是每个小孩的朋友还是不超过5个.举例说明，这周不一定能安排玩耍搭配方式，使上述目标实现.

注：正二十面体有20个面，12个顶点，30条棱，每个顶点处有5条棱，每个面有3条边.

二（本题满分40分）

数列$\{x_n\}$满足$x_1=0, x_2=1$，且当$n\geq 2$时

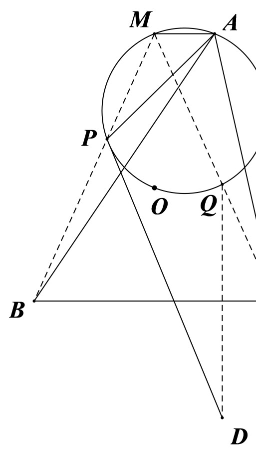
$$x_{n+1}=\left(2-\frac{1}{n}\right)x_n-x_{n-1}$$

求证：存在无穷多个正整数m，使得$x_m x_{m+1}\leq 0$.

三（本题满分50分）

已知O是$\triangle ABC$的外心，M, P, Q是以OA为直径的圆上三点，$AM\parallel BC$，且MP, MQ分别经过B, C，再设Q关于BC的对称点为D.求证：$PD=2PA$.

（解题时请将图画在答卷纸上）



四（本题满分50分）

设$\sigma(n)$表示正整数n的不同正因子之和.证明：存在无穷多个正整数n，使得$\sigma(n)$为完全平方数.