“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

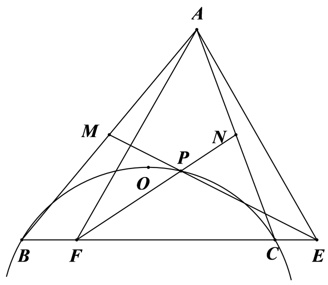
参考答案

2018年8月

一（本题满分40分）

设O是锐角$\triangle ABC$的外心，M、N分别为边AB、AC的中点，点E、F在直线BC上，且$\angle BAE = \angle ACB$, $\angle CAF = \angle CBA$. 求证：ME与NF的交点在$\triangle OBC$的外接圆上.

（解题时请将图画在答卷纸上） （萧振纲 供题）



证明：如图所示，设ME与NF交于P，因

$$\angle BAE = \angle ACB,\ \angle FAC = \angle CBA$$

所以$\triangle EBA \sim \triangle ABC \sim \triangle FAC$，即$\triangle EBA \sim \triangle FAC$，而$M$、$N$分别为$AB$、$AC$的中点，所以

$$\frac{BM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AF}$$

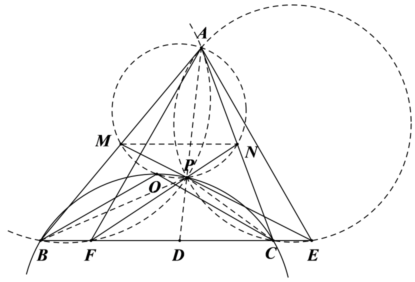
又$\angle FAN = \angle EBA$，因此，$\triangle BEM \sim \triangle AFN$，从而$\angle BME = \angle ANF$，这说明$A$、$M$、$P$、$N$四点共圆.

注意$MN \parallel BC$，所以$\angle APM = \angle ANM = \angle ACB$，因而$A$、$P$、$C$、$E$四点共圆；同理$A$、$B$、$F$、$P$四点共圆.

再注意$\angle CFA = \angle BAC = \angle AEB$，于是，设直线$AP$与$BC$交于$D$，则

$$\angle BPC = \angle BPD + \angle DPC = \angle CFA + \angle AEB = 2\angle BAC = \angle BOC$$

故O、B、C、P四点共圆，换句话说，ME与NF的交点在$\triangle OBC$的外接圆上.



解析图

二（本题满分40分）

2019×2019的方格表被分为了一系列小的正方形（全部分完），规格有$1\times1,2\times2,3\times3$和$4\times4$的，小正方形的边都在方格线上.证明：能够找到方格表中的一行，它的方格被分在奇数个正方形中.

（苏淳　供题）

证明：假设每一行中的方格都被分在偶数个正方形中，由于行的长度是奇数，所以每一行都与奇数个边长为奇数的正方形相交，如此一来，每一行也都与奇数个边长为偶数的正方形相交. 每一个$2k\times2k$正方形可以分为$2k$个$1\times2k$的横条，于是，每一行中都有奇数条长度为偶数的横条，由于总行数2019是奇数，所以方格表中一共有奇数个长度为偶数的横条，而这是不可能的，因为每个$2k\times2k$正方形都包含$2k$个长度为偶数的横条，所以此类横条的总数为偶数，此为矛盾.

三（本题满分50分）

对于实数x,y，记

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & ,x>y\\ x & ,x\le y\end{cases}$$

记X由所有$\{1,2,\cdots,100\}$到自身的一一映射构成的集合，对于任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$，求

$$\min_{\sigma\in X}(f(a_1,\sigma(1))+f(a_2,\sigma(2))+\cdots+f(a_{100},\sigma(100)))$$

的最大值.

（赵斌　供题）

解析：所求的最大值为$50\times51=2550$，一方面当$a_1=a_2=\cdots=a_{100}=50$时，

$$f(a_1,\sigma(1))+f(a_2,\sigma(2))+\cdots+f(a_{100},\sigma(100))=50\times51=2550$$

另一方面，我们只需证明，对于任意$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$，都存在一个$\sigma\in X$，使得

$$f(a_1,\sigma(1))+f(a_2,\sigma(2))+\cdots+f(a_{100},\sigma(100))\le 2550$$

由对称性，不妨设，$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_{100}$，且取$\sigma$就为恒等映射，则

$$f(a_1,\sigma(1))+f(a_2,\sigma(2))+\cdots+f(a_{100},\sigma(100))=f(a_1,1)+f(a_2,2)+\cdots+f(a_{100},100)$$

我们可设$a_{100}\le100$，否则上述表达式显然为0，并记得k为最小的正整数使得$a_k-k\le0$，从而

$$\begin{aligned}f(a_1,1)+f(a_2,2)+\cdots+f(a_{100},100)&=f(a_k,k)+f(a_{k+1},k+1)+\cdots+f(a_{100},100)\\&=a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{100}\\&\le(101-k)a_k\le(101-k)\cdot k\\&\le50\times51=2550\end{aligned}$$

最后一步用到了k是整数，故我们完成了证明.

四（本题满分50分）

设$x_1,\cdots,x_n$是不同的n个正整数，满足对任何正整数x

$$x_1x_2\cdots x_n|(x_1+x)(x_2+x)\cdots(x_n+x)$$

求证：$\{x_1,\cdots,x_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$.

（罗炜　供题）

证明：记差分算子为$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$，二项式系数函数$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$，则有$\Delta\binom{x}{k}=\binom{x}{k-1}$，任何整系数多项式可以写成$\binom{x}{k},k=0,\cdots$的线性组合，于是对某些整数$c_i,i=0,\cdots,n-1$

$$f(x)=(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)=n!\binom{x}{n}+\sum_{i=0}^{n-1}c_i\binom{x}{k}$$

因为$f(x)$对任何x被$\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$整除，$n$次差分$\Delta^n f(x)$也被这个数整除，而

$$\Delta^n f(x)=n!\binom{x}{0}=n!$$

因为$x_1,\cdots,x_n$为互不相同的正整数，$\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\geq n!$，因此等号成立，$\{x_1,\cdots,x_n\}=\{1,\cdots,n\}$，证毕.