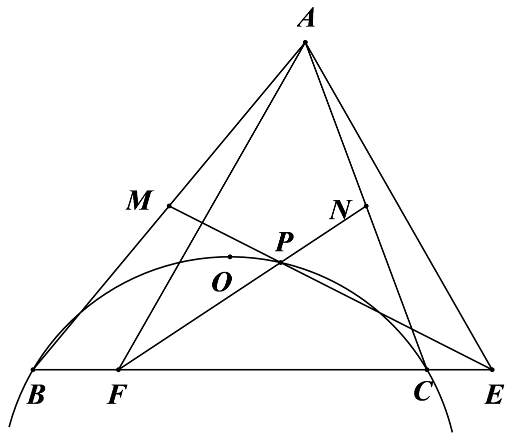
“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

2018年8月

一（本题满分40分）

设O是锐角$\triangle ABC$的外心，M、N分别为边AB、AC的中点，点E、F在直线BC上，且$\angle BAE=\angle ACB$, $\angle CAF=\angle CBA$. 求证：ME与NF的交点在$\triangle OBC$的外接圆上.

（解题时请将图画在答卷纸上）



二（本题满分40分）

2019×2019的方格表被分为了一系列小的正方形（全部分完），规格有$1\times 1, 2\times 2, 3\times 3$和$4\times 4$的，小正方形的边都在方格线上.证明：能够找到方格表中的一行，它的方格被分在奇数个正方形中.

三（本题满分50分）

对于实数x,y，记

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & ,x>y\\ x & ,x\le y\end{cases}$$

记X有所有$\{1,2,\cdots,100\}$到自身的一一映射构成的集合，对于任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_{100}$，求

$$\min_{\sigma\in X}(f(a_1,\sigma(1))+f(a_2,\sigma(2))+\cdots+f(a_{100},\sigma(100)))$$

的最大值.

四（本题满分50分）

设$x_1,\cdots,x_n$是不同的n个正整数，满足对任何正整数x

$$x_1x_2\cdots x_n|(x_1+x)(x_2+x)\cdots(x_n+x)$$

求证：$\{x_1,\cdots,x_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$.