“根源杯”数学奥林匹克邀请赛

参考答案

2018年7月

一（本题满分40分）

申花路幼儿园某班级的所有小孩希望上学时，每天都只和一个好朋友一起玩或者独自玩耍，一周内恰好和每一个好朋友一起玩一次（每周5天上学，可以独自玩耍很多天）.

某一周，12个小孩坐在正二十面体的12个顶点上，发现每个小孩恰好和相邻5个顶点上的小孩是好朋友. 证明：这周可以安排玩耍搭配方式，使得上述目标可以实现.

又一周，新来了一个小孩，朋友关系发生了变化，但是每个小孩的朋友还是不超过5个.举例说明，这周不一定能安排玩耍搭配方式，使上述目标实现.

注：正二十面体有20个面，12个顶点，30条棱，每个顶点处有5条棱，每个面有3条边.

（罗　炜　供题）

解答：正二十面体适当放置，使南极及北极各有一个顶点A、D，中间两组同纬度各有5个顶点$B_i, C_i, i = 1, 2, \cdots, 5$，其连接方式可以记为

$$AB_i,\ B_iB_{i+1},\ B_iC_i,\ B_{i+1}C_i,\ C_iC_{i+1},\ C_iD,\ i = 1, 2, \cdots, 5$$

其中指标按模5意义理解.

安排5天中，第i天的玩耍方式为

$$AB_i,\ B_{i+2}B_{i-2},\ B_{i+1}C_{i+1},\ B_{i-1}C_{i-2},\ C_iC_{i-1},\ C_{i+2}D,$$

则5天内，所有小孩恰好和每个朋友玩过一次.

若新来的小孩E和已有两个已经是朋友的X, Y成为了朋友，但X, Y不再是朋友，则有12个小孩各有5个朋友，新来的小孩有2个朋友，朋友对数为31，但是13个小孩，每天至多6对朋友玩耍，因此5天不能满足所有朋友一起玩过.

二（本题满分40分）

数列$\{x_n\}$满足$x_1 = 0, x_2 = 1$，且当$n \geq 2$时

$$x_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) x_n - x_{n-1}$$

求证：存在无穷多个正整数m，使得$x_m x_{m+1} \leq 0$.　（黄利兵　供题）

解答：用反证法. 假设只有有限个m使得$x_m x_{m+1} \leq 0$. 那么，存在正整数M，使得$m \geq M$时，总有$x_m x_{m+1}$ >0成立，换言之，数列$\{x_n\}$从第M项起全部同号. 令$a_i = \dfrac{x_{i+1}}{x_i}$，则当$i \geq M$时，$a_i > 0$.

由原递推式可得

$$a_i - a_{i+1} = \frac{1}{i+1} + \frac{(a_i - 1)^2}{a_i}$$

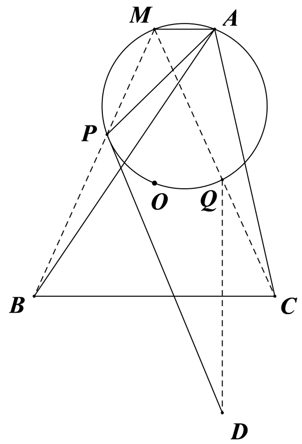
两端对i从M到n求和，得

$$a_M - a_{n+1} = \sum_{i=M}^{n} \frac{1}{i+1} + \sum_{i=M}^{n} \frac{(a_i-1)^2}{a_i} > \sum_{i=M}^{n} \frac{1}{i+1}$$

当$n \to \infty$时，右端$\to +\infty$，而左端$< a_M$，矛盾！

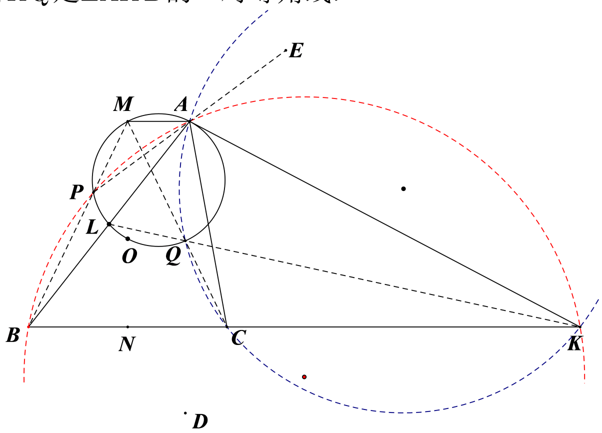
三（本题满分50分）

已知O是$\triangle ABC$的外心，M, P, Q是以OA为直径的圆上三点，$AM \parallel BC$，且MP, MQ分别经过B, C，再设Q关于BC的对称点为D.求证：$PD = 2PA$. （黄利兵　供题）



解答：取BC的中点N，并作$\odot O$在A点的切线，交BC于K．则$\angle AKB = \angle AOM = \angle AQM$，表明$A, Q, C, K$共圆，同理$A, P, B, K$共圆．

再取AB的中点L，则$\angle AQL = \angle AOL = \angle C = 180^\circ - \angle AQK$，表明$L, Q, K$共线．同理，$PK$经过$AC$的中点．因此，$KP, KQ$是$\angle AKB$的一对等角线．



又取Q关于AK的对称点E，则P、A、E共线，由PK, QK是等角线，可知$PD = PE$，即证．

四（本题满分50分）

设$\sigma(n)$表示正整数n的不同正因子之和.证明：存在无穷多个正整数n，使得$\sigma(n)$为完全平方数.

（纪春岗　供题）

分析：

（1）**引理**：设$a_1, a_2, \cdots, a_m$是m个正整数，可以相同，如果$a_1 a_2 \cdots a_m$的不同素因子的个数小于m，那么$a_1, a_2, \cdots, a_m$中一定有若干数之积为平方数.

证明：如果$a_1, a_2, \cdots, a_m$中有相同的数，则结论成立！以下不妨设$a_1, a_2, \cdots, a_m$互不相同.

令集合$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，不妨设

$$a_1a_2\cdots a_m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$$

其中$p_1<p_2<\cdots<p_t$为素数，$\alpha_i\geq 1,i=1,2,\cdots,t$，这里$t<m$.

令$W=\{A|A为S的非空子集\}$，$V=\{(x_1,\cdots,x_t)|x_i=0或1,i=1,2,\cdots,t\}$构造从$W$到$V$的映射$f$.

对每个$A\in W$，令$\prod\limits_{a\in A}a=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_t^{\beta_t}$，其中$0\leq\beta_i\leq\alpha_i,i=1,2,\cdots,t$；

令$f(A)=(\overline{\beta_1},\overline{\beta_2},\cdots,\overline{\beta_t})$，其中$\overline{\beta_i}=\beta_i \pmod 2),\overline{\beta_i}\in\{0,1\}$，则$f:W\to V,f(A)=(\overline{\beta_1},\overline{\beta_2},\cdots,\overline{\beta_t})$是一个映射，由于

$$|W|=2^m-1,\ |V|=2^t\leq 2^{m-1}<2^m-1$$

从而存在$A\neq B\in W$，使得$f(A)=f(B)$，因此$\prod\limits_{a\in A}a\cdot\prod\limits_{b\in B}b$为平方数；

令$A\cap B=C,D=(A-C)\cup(B-C)$，则$D\in W$，而且$\prod\limits_{d\in D}d$为平方数，证毕.

（2）回到原题的证明：显然$\sigma(1)=1,\sigma(3)=2^2$，如果

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t},p_1<\cdots<p_t为素数，\alpha_i\geq 1,i=1,\cdots,t$$

那么

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_t^{\alpha_t+1}-1}{p_t-1}$$

特别，$\sigma(p)=p+1$，其中p为素数，显然$\sigma(n)$为积性函数，即对任意的$(a,b)=1$，有$\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$.

想证：存在无穷多正整数n，使得$\sigma(n)$为平方数.

反证法：如果结论不对，那么只有有限个正整数n，使得$\sigma(n)$为平方数，不妨设这些数为$n_1,n_2,\cdots,n_s$.令

$$n_1n_2\cdots n_s=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$$

这里p_i表示第i个素数（比如：$p_1=2,p_2=3,p_3=5$）$\alpha_i\geq 0,i=1,\cdots,t$，特别$\alpha_t>0$，观察以下的$t$个数$\sigma(p_1^{\alpha_1+1}),\sigma(p_2^{\alpha_2+1}),\cdots,\sigma(p_t^{\alpha_t+1})$，取素数$p_l$表示不小于这$t$个数的最小素数，显然$p_l>p_t$，那么以下的$l$个正整数

$$\sigma(p_1^{\alpha_1+1}),\cdots,\sigma(p_t^{\alpha_t+1}),\sigma(p_{t+1}),\cdots,\sigma(p_l) \qquad (*)$$

中的不同素因子的个数小于l，利用引理，$(*)$中一定存在若干数之积为平方数，利用$\sigma(n)$为积性函数，从而得到一个正整数n_0，使得$\sigma(n_0)$为平方数，由于n_0或被$p_i^{\alpha_i+1}$整除，$i\leq t$，或被p_j整除，$t<j\leq l$，因此$n_0\notin\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$，矛盾.