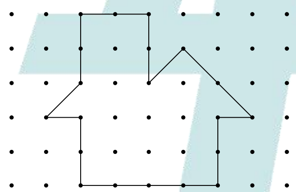
格点型面积

例题精讲

板块一　正方形格点问题

在一张纸上，先画出一些水平直线和一些竖直直线，并使任意两条相邻的平行线的距离都相等(通常规定是 1 个单位)，这样在纸上就形成了一个方格网，其中的每个交点就叫做一个格点．在方格网中，以格点为顶点画出的多边形叫做格点多边形，例如，右图中的乡村小屋图形就是一个格点多边形．

那么，格点多边形的面积如何计算？它与格点数目有没有关系？如果有，这两者之间的关系能否用计算公式来表达？下面就让我们一起来探讨这些问题吧！

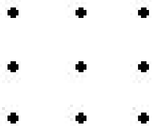


用 N 表示多边形内部格点，L 表示多边形周界上的格点，S 表示多边形面积，请同学们分析前几个例题的格点数．

我们能发现如下规律：$S=N+\frac{L}{2}-1$．这个规律就是毕克定理．

> **毕克定理**
>
> 若一个格点多边形内部有 N 个格点，它的边界上有 L 个格点，
>
> 则它的面积为 $S=N+\frac{L}{2}-1$．

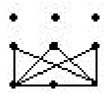
【例 1】用 9 个钉子钉成相互间隔为 1 厘米的正方阵(如右图)．如果用一根皮筋将适当的三个钉子连结起来就得到一个三角形，这样得到的三角形中，面积等于 1 平方厘米的三角形的个数有多少？　面积等于 2 平方厘米的三角形有多少个？



【解析】面积等于 1 平方厘米的三角形有 32 个. 面积等于 2 平方厘米的三角形有 8 个.

(1) 面积等于 1 平方厘米的分类统计如下:

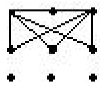
①



底为 2，高为 1

$3\times2=6$(个)

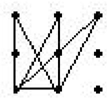
②



底为 2，高为 1

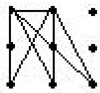
$3\times2=6$(个)

③



底为 1，高为 2

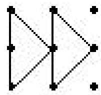
$3\times2=6$(个)



④

底为 1，高为 2

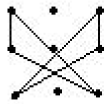
$3\times2=6$(个)



⑤

底为 2，高为 1

$2\times2=4$(个)



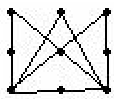
⑥

底为 1，高为 2

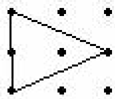
$2\times2=4$(个)

所以，面积等于 1 平方厘米的三角形的个数有：6+6+6+6+4+4=32(个).

(2) 面积等于 2 平方厘米的分类统计如下:



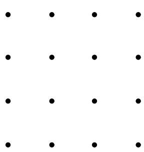
$3\times2=6$(个)

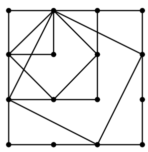


$1\times2=2$(个)

所以，面积等于 2 平方厘米的三角形的个数有：6+2=8(个).

【例 2】如图，4×4 的方格纸上放了 16 枚棋子，以棋子为顶点的正方形有________个.





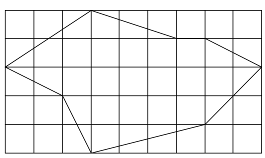
【解析】根据正方形的大小，分类数正方形. 共能组成五种大小不同的正方形(如右图).

1×1 的正方形：9 个；2×2 的正方形：4 个；3×3 的正方形：1 个；

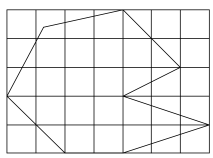
以 1×1 正方形对角线为边长的正方形：4 个；以 1×2 长方形对角线为边长的正方形：2 个.

故可以组成 $9+4+1+4+2=20$ (个)正方形.

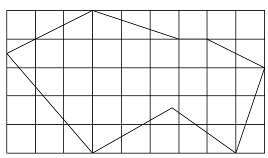
【例 3】判断下列图形哪些是格点多边形?



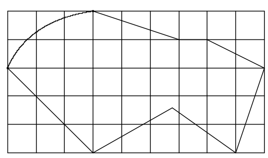
(1)



(2)



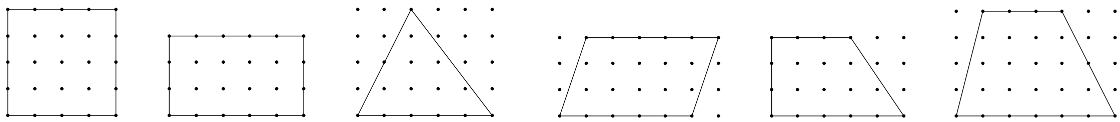
(3)



(4)

【解析】根据格点多边形的定义可知，图形的边必须是直线段，顶点要在格点上！所以只有(1)是格点多边形.

【例 4】如图，计算各个格点多边形的面积．



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)　(6)

【解析】本题所给的图形都是规则图形，它们的面积运用公式直接可求，只要判断出相应的有关数据就行了．

方法一：图(1)是正方形，边长是 4，所以面积是 $4\times4=16$（面积单位）；

图(2)是矩形，长是 5，宽是 3，所以面积是 $5\times3=15$（面积单位）；

图(3)是三角形，底是 5，高是 4，所以面积是 $5\times4\div2=10$（面积单位）；

图(4)是平行四边形，底是 5，高是 3，所以面积是 $5\times3=15$（面积单位）；

图(5)是直角梯形，上底是 3，下底是 5，高是 3，所以面积是 $(3+5)\times3\div2=12$（面积单位）；

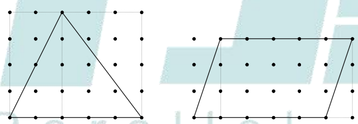
图(6)是梯形，上底是 3，下底是 6，高是 4，所以面积是 $(3+6)\times4\div2=18$（面积单位）．

【巩固】如果两格点之间的距离是 2，能利用刚计算的结果说出相应面积么？（教师总结：面积数值均扩大 4 倍．）

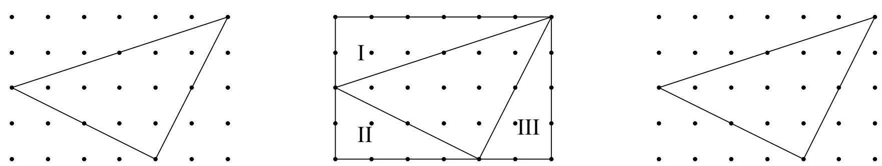
方法二：以上部分图形除了利用各自的面积公式直接求出外，我们还可以从推导它们的面积公式过程中得到启发，即用“割补法”或“扩展法”分别转化成长方形来求．这一种方法很重要，在下面的题目中我们还将使用这种方法！

如图(3)，我们利用“扩展法”将其转化，如图所示，从图中易知三角形面积是长方形面积的一半．

如图(4)，我们利用“割补法”将其阴影部分面积平移到右边，转化成一个长方形，从中易得平行四边形面积．同理，图(5)、(6)也可利用同样的思想．



【例 5】如图(a)，计算这个格点多边形的面积．

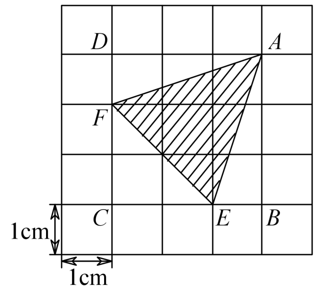


(a)　(b)　(c)

【解析】方法一(扩展法)．这是个三角形，虽然有三角形面积公式可用，但判断它的底和高却十分困难，只能另想别的办法：这个三角形是处在长是 6、宽是 4 的矩形内，除此之外还有其他三个直角三角形，如下右图(b)，这三个直角三角形面积很容易求出，再用矩形面积减去这三个直角三角形面积，就是所要求的三角形面积．矩形面积是 $6\times4=24$；直角三角形Ⅰ的面积是：$6\times2\div2=6$；直角三角形Ⅱ的面积是：$4\times2\div2=4$；直角三角形Ⅲ面积是 $4\times2\div2=4$；所求三角形的面积是 $24-(6+4+4)=10$（面积单位）．

方法二(割补法)．将原三角形分割成两个我们方便计算面积的三角形，如(c)图．因此三角形的面积是：$5\times2\div2+5\times2\div2=10$（面积单位）．

【例 6】(“新加坡小学数学奥林匹克”竞赛试题)右图是一个方格网，计算阴影部分的面积．



【解析】扩展法．把所求三角形扩展成正方形 $ABCD$ 中．这个正方形中有四个三角形：一个是要求的 $\triangle AEF$；另外三个分别是：$\triangle ABE$、$\triangle FEC$、$\triangle DAF$，它们都有一条边是水平放置的，易求它们的面积分别为 1.5cm^2，2cm^2，1.5cm^2．所以，图中阴影部分的面积为：$3\times3-(1.5\times2+2)=4$（$\text{cm}^2$）．

【例 7】分别计算图中两个格点多边形的面积．

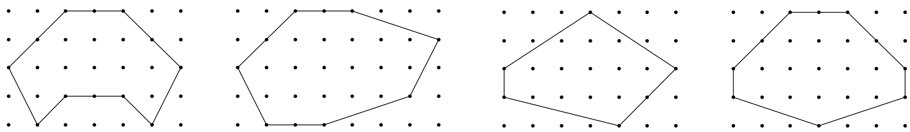
(1)　　　　(2)

【解析】利用“扩展法”和“割补法”我们都可以简单的得到(1)的面积均为 9 面积单位．(2)的面积均为 10 面积单位．

【点评】“一个格点多边形面积的大小很可能是由哪些因素决定呢？”“格点多边形内部的格点数和周界上的格点数与格点多边形的面积有没有什么内在联系呢？”下面我们就来探讨一下！

在巩固中，我们发现两个图形面积相等．进一步还可以发现第一个图形边界上的格点数是 8 个；第二个图形边界上的格点数是 10 个，包含在图形内的格点数也相等，都是 6 个．

【巩固】求下列各个格点多边形的面积．



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

【解析】(1) $\because L=12$；$N=10$，$\therefore S=N+\dfrac{L}{2}-1=10+\dfrac{12}{2}-1=15$（面积单位）；

(2) $\because L=10$；$N=16$，$\therefore S=N+\dfrac{L}{2}-1=16+\dfrac{10}{2}-1=20$（面积单位）；

(3) $\because L=6$；$N=12$，$\therefore S=N+\dfrac{L}{2}-1=12+\dfrac{6}{2}-1=14$（面积单位）；

(4) $\because L=10$；$N=13$，$\therefore S=N+\dfrac{L}{2}-1=13+\dfrac{10}{2}-1=17$（面积单位）．

用 N 表示多边形内部格点，L 表示多边形周界上的格点，S 表示多边形面积，请同学们分析前几个例题的格点数．

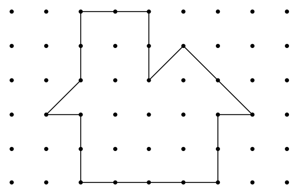
我们能发现如下规律：$S=N+\frac{L}{2}-1$．这个规律就是毕克定理．

毕克定理

若一个格点多边形内部有 N 个格点，它的边界上有 L 个格点，

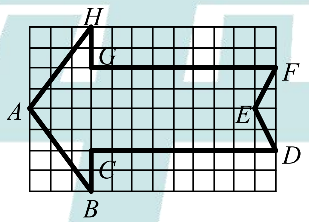
则它的面积为 $S=N+\frac{L}{2}-1$．

【例 8】我们开始提到的“乡村小屋”的面积是多少？



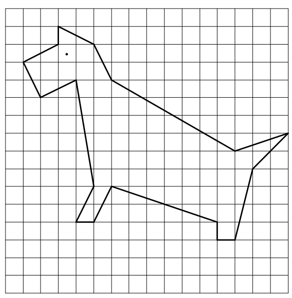
【解析】图形内部格点数 $N=9$；图形边界上的格点数 $L=20$ ；根据毕克定理， 则 $S=N+\frac{L}{2}-1=18$（单位面积）．

【例 9】右图是一个 8×12 面积单位的图形．求矩形内的箭形 $ABCDEFGH$ 的面积．



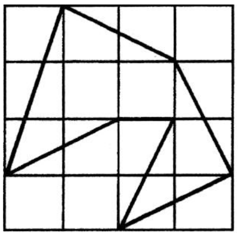
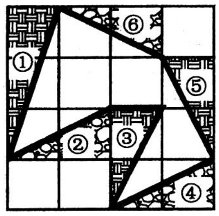
【解析】箭形 $ABCDEFGH$ 的面积 $=(8+10\div 2-1)+4\times 8+(4\div 2-1)\times 2=12+32+2=46$（面积单位）．

【例 10】 右图中每个小正方形的面积都是 1，那么图中这只“狗”所占的面积是多少？



【解析】图形内部格点数为 54，图形周界上格点数为 19．
所以图形的面积为：$54+19\div 2-1=62.5$（面积单位）．

【巩固】如图，每一个小方格的面积都是 1 平方厘米，那么用粗线围成的图形的面积是多少平方厘米？

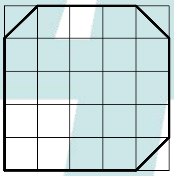
【解析】方法一：正方形格点阵中多边形面积公式：$(N+\frac{L}{2}-1)$×单位正方形面积，其中 N 为图形内格点数，L 为图形周界上格点数．

有 N=4，L=7，则用粗线围成图形的面积为：$(4+\frac{7}{2}-1)\times1=6.5$（平方厘米）

方法二：如右上图，先求出粗实线外格点内的图形的面积，

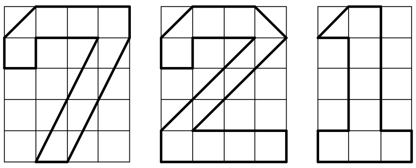
有①=3÷2=1．5，②=2÷2=1，③=2÷2=1，④=2÷2=1，⑤=2÷2=l，⑥=2÷2=1，还有三个小正方形，所以粗实线外格点内的图形面积为 1．5+l+1+1+1+1+3=9．5，而整个格点阵所围成的图形的面积为 16，所以粗线围成的图形的面积为：16−9．5=6．5 平方厘米．

【例 11】 **（“小学数学奥林匹克”竞赛试题）5×5 的方格纸，小方格的面积是 1 平方厘米，小方格的顶点称为格点．请你在图上选 7 个格点，要求其中任意 3 个格点都不在一条直线上，并且使这 7 个点用直线连接后所围成的面积尽可能大．那么，所围图形的面积是__平方厘米．**



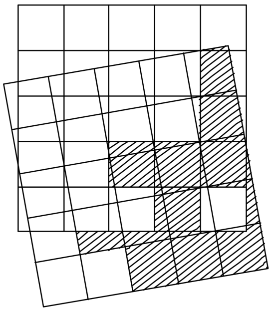
【解析】为了使这 7 个点围成最大的面积，这 7 个点应尽量在正方形的边或顶点上，如图选取 7 个点，围成面积最大．最大面积为 $5\times5-0.5\times3=23.5$（平方厘米）．

【例 12】 **（“保良局亚洲区城市小学数学”竞赛试题）第一届保良局亚洲区城市小学数学邀请赛在 7 月 21 日开幕，下面的图形中，每一个小方格的面积是 1，那么 7、2、1 三个数字所占的面积之和是多少？**



【解析】要计算三个数字所占的面积之和，可以先分别求出每个数字所占的面积．显然，图中的三个数字都可以看作格点多边形，根据毕克定理，可以很方便地求出每个数字所占的面积．值得注意的是：数字“7”内部有两个格点，而数字“2”和“1”内部都没有格点．7 所占的面积为：$2+15\div2-1=8.5$；2 所占的面积为：$24\div2-1=11$；1 所占的面积为：$17\div2-1=7.5$．所以，这三个数字所占的面积之和为：$8.5+11+7.5=27$．

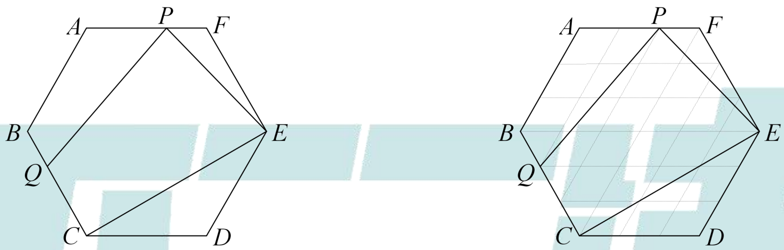
【例 13】 **（第六届“从小爱数学”邀请赛试题）两个边长相等的正方形各被分成 25 个大小相同的小方格．现将这两个正方形的一部分重叠起来，若左上角的阴影部分（块状）面积为 5.12cm^2，右下角的阴影部分（线状）面积为 7.4cm^2，求大正方形的面积．**



【解析】块状部分与线状部分之间的部分称为 D，则 D 与前者共 14 个方格，与后者共 17 个方格，因此每个方格的面积是 $(7.4-5.12)\div(17-14)=\frac{19}{25}(\mathrm{cm}^2)$

大正方形的面积为 $19\mathrm{cm}^2$．

【例 14】 （第六届“华杯赛”试题）图中正六边形 $ABCDEF$ 的面积是 54，$AP=2PF$，$CQ=2BQ$，求阴影四边形 $CEPQ$ 的面积．



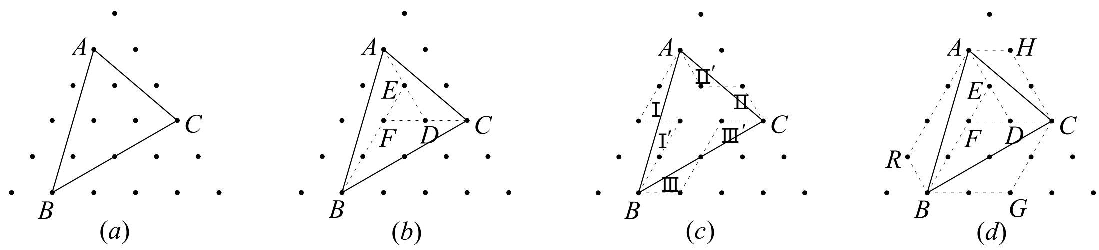
【解析】如图，将正六边形 $ABCDEF$ 等分为 54 个小正三角形．根据平行四边形对角线平分平行四边形面积，$\triangle PEF$ 面积 $=3$，$\triangle CDE$ 面积 $=9$，四边形 $ABQP$ 面积 $=11$．上述三块面积之和为 $3+9+11=23$．因此，阴影四边形 $CEPQ$ 面积为 $54-23=31$．

板块二 三角形格点问题

所谓三角形格点多边形是指：每相邻三点成“∵”或“∴”，所形成的三角形都是等边三角形．规定它的面积为 1，以这样的点为顶点画出的多边形为三角形格点多边形．

关于三角形格点多边形的面积同样有它的计算公式：如果用 S 表示面积，N 表示图形内包含的格点数，L 表示图形周界上的格点数，那么有 $S=2\times N+L-2$，就是格点多边形面积等于图形内部所包含格点数的 2 倍与周界上格点数的和减去 2．

【例 15】 如图(a)，有 21 个点，每相邻三个点成“∵”或“∴”，所形成的三角形都是等边三角形．计算三角形 ABC 的面积．



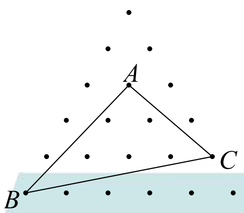
【解析】方法一：如图(b)所示，在$\triangle ABC$内连接相邻的三个点成$\triangle DEF$，再连接DC、EA、FB后是$\triangle ABC$

可看成是由$\triangle DEF$分别延长FD、DE、EF边一倍、一倍、二倍而成的，由等积变换不难得到$S_{\triangle ACD}=2$，$S_{\triangle AEB}=3$，$S_{\triangle FBC}=4$，所以$S_{\triangle}=1+2+3+4=10$（面积单位）．

方法二：如图(c)所示，作辅助线把图Ⅰ′、Ⅱ′、Ⅲ′分别移拼到Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的位置，这样可以通过数小正三角形的方法，求出$\triangle ABC$的面积为10．

方法三：如图(d)所示：作辅助线可知：平行四边形$ARBE$中有6个小正三角形，而$\triangle ABE$的面积是平行四边形$ARBE$面积的一半，即$S_{\triangle AEB}=3$，平行四边形$ADCH$中有4个小正三角形，而$\triangle ADC$的面积是平行四边形$ADCH$面积的一半，即$S_{\triangle ACD}=2$．平行四边形$FBGC$中有8个小正三角形，而$\triangle FBC$的面积是平行四边形$FBGC$的一半，即：$S_{\triangle FBC}=4$．所以$S_{\triangle}=1+2+3+4=10$（面积单位）．

【巩固】如图，每相邻三个点所形成的三角形都是面积为1的等边三角形，计算$\triangle ABC$的面积．



【解析】因为$N=5$；$L=3$：所以$S=2\times N+L-2=2\times5+3-2=11$（面积单位）．

【例 16】 求下列格点多边形的面积(每相邻三个点“∵”或“∴”成面积为1的等边三角形)．

(1) (2) (3) (4)

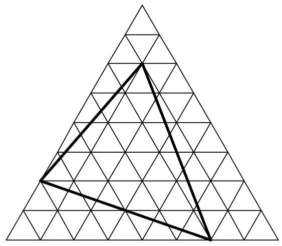
【解析】(1) ∵ $L=7$；$N=7$，∴ $S=2\times N+L-2=2\times7+7-2=19$（面积单位）；

(2) ∵ $L=5$；$N=8$，∴ $S=2\times N+L-2=2\times8+5-2=19$（面积单位）；

(3) ∵ $L=6$；$N=7$，∴ $S=2\times N+L-2=2\times7+6-2=18$（面积单位）；

(4) ∵ $L=7$；$N=8$，∴ $S=2\times N+L-2=2\times8+7-2=21$（面积单位）．

【例 17】 把大正三角形每边八等分，组成如右图所示的三角形网．如果大三角形的面积是128，求图中粗线所围成的三角形的面积．

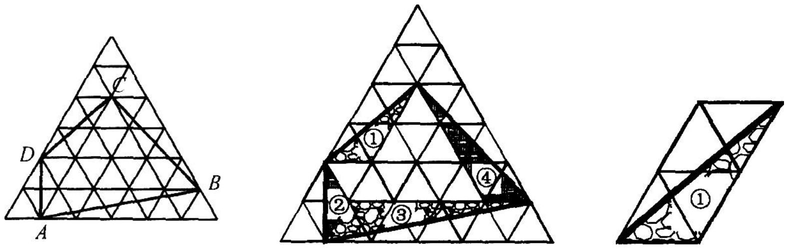


【解析】图中有$1+3+5+7+9+11+13+15=64$（个）小三角形，那么一个小三角形的面积是$128\div64=2$，

图形内部格点数为12，图形周界上格点数为4；

图形的面积为：$2\times12+4-2=26$（面积单位），进而得图形的面积为：$26\times2=52$．

【例 18】 如图，如果每一个小三角形的面积是 1 平方厘米，那么四边形 $ABCD$ 的面积是多少平方厘米？



【解析】法一：正三角形方形格点阵中多边形面积公式：$(2N+L-2)x$ 单位正三角形面积，其中 N 为图形内格点数，L 为图形周界上格点数．

有 $N=9$，$L=4$，所以用粗线围成的图形的面积为：$(9\times2+4-2)\times1=20$(平方厘米)．

法二：如下图，我们先数出粗实线内完整的小正三角形有 10 个，而将不完整的小正三角形分成 4 部分计算，其中①部分对应的平行四边形面积为 4，所以①部分的面积为 2，②、③、④部分对应的平行四边形面积分别为 2，8，6，所以②、③、④部分的面积分别为 1，4，3．所以粗实线内图形的面积为 10+2+1+4+3=20(平方厘米)．

【例 19】 把同一个三角形的三条边分别 5 等分、7 等分(如图 1，图 2)，然后适当连接这些等分点，便得到了若干个面积相等的小三角形．已知图 1 中阴影部分面积是 294 平方分米，那么图 2 中阴影部分的面积是______平方分米．

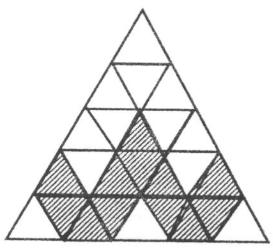


图 1

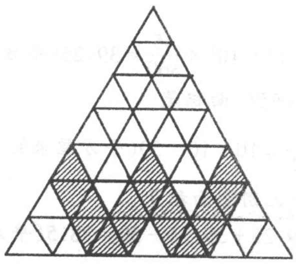
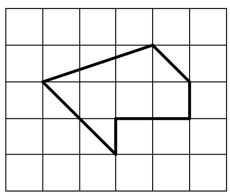
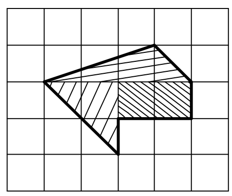


图 2

【解析】图 1 中阴影部分占整个三角形面积的 $\frac{12}{25}$，图 2 中阴影部分占整个三角形面积的 $\frac{16}{49}$，故图 2 中阴影部分的面积为 $294\div\frac{12}{25}\times\frac{16}{49}=200$(平方分米)．

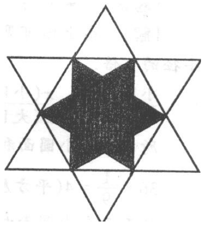
【例 20】 将图中的图形分割成面积相等的三块．

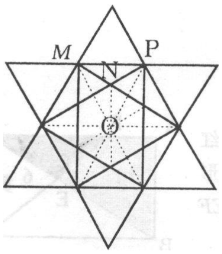




【解析】如右图所示．

【例 21】 如图涂阴影部分的小正六角星形面积是 16 平方厘米，问：大正六角星形面积是多少平方厘米？

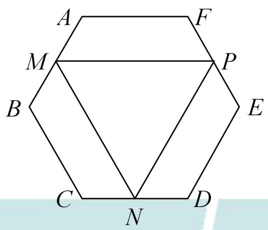


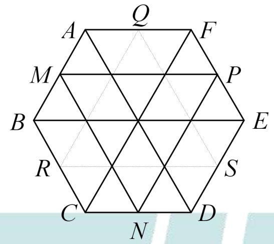


【解析】如图，涂阴影部分的小正六角星形可分成 12 个与三角形 PMN 全等(能完全重叠地放在一起)的小三角形．

而图中的大正六角星形除去小正六角星形后．有 $6\times4=24$ 个与三角形 PMN 全等的小三角形，所以大正六角星形的面是小正六角星形的 3 倍，即 48 平方厘米．

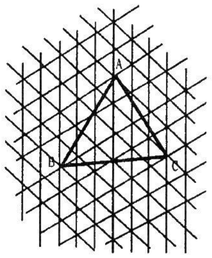
【例 22】 **(第五届“华杯赛”试题)正六边形 $ABCDEF$ 的面积是 6 平方厘米．M 是 AB 中点，N 是 CD 中点，P 是 EF 中点．问：三角形 MNP 的面积是多少平方厘米？**

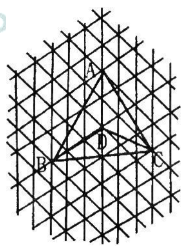




【解析】将正六边形分成六个面积为 1 平方厘米的正三角形，再取它们各边的中点将每个正三角形分为 4 个小正三角形．于是正六边形 $ABCDEF$ 被分成了 24 个小正三角形，每一个小正三角形的面积是 $6\div24=0.25$（平方厘米），三角形 MNP 由 9 个小正三角形所组成，所以三角形 MNP 的面积 $=0.25\times9=2.25$（平方厘米）．

【例 23】 **如果下图中任意相邻的三个点构成的三角形面积都是 2 平方厘米．那么，三角形 ABC 的面积是_____平方厘米．**





【解析】$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}+S_{\Delta ACD}=2\times12+2\times12+2\times9=66$(平方厘米)