



植树问题



教学目标

1. 封闭与非封闭植树路线的讲解及生活运用。
2. 掌握空心方阵和实心方阵的变化规律.
3. 几何图形的设计与构造



知识点拨

知识点说明：

一、植树问题分两种情况，不封闭与封闭路线。

不封闭的植树路线.

① 若题目中要求在植树的线路两端都植树，则棵数比段数多 1.

全长、棵数、株距三者之间的关系是：

$$\text{棵数} = \text{段数} + 1 = \frac{\text{全长}}{\text{株距}} + 1$$

$$\text{全长} = \text{株距} \times (\text{棵数} - 1)$$

$$\text{株距} = \frac{\text{全长}}{\text{棵数} - 1}$$

② 如果题目中要求在路线的一端植树，则棵数就比在两端植树时的棵数少 1，即棵数与段数相等. 全长、棵数、株距之间的关系就为：

$$\text{全长} = \text{株距} \times \text{棵数};$$

$$\text{棵数} = \frac{\text{全长}}{\text{株距}};$$

$$\text{株距} = \frac{\text{全长}}{\text{棵数}}.$$

③ 如果植树路线的两端都不植树，则棵数就比②中还少 1 棵.

$$\text{棵数} = \text{段数} - 1 = \frac{\text{全长}}{\text{株距}} - 1.$$

$$\text{株距} = \frac{\text{全长}}{\text{棵数} + 1}.$$

$$\text{全长} = \text{株距} \times (\text{棵数} + 1)$$

封闭的植树路线.

在圆、正方形、长方形、闭合曲线等上面植树，因为头尾两端重合在一起，所以种树的棵数等于分成的段数.

棵数 = 段数 = 周长 ÷ 株距.

二、解植树问题的三要素

解决植树问题，首先要牢记三要素：总路线长、间距（棵距）长、棵数。只要知道这三个要素中任意两个要素，就可以求出第三个。

三、方阵问题

明确空心方阵和实心方阵的概念及区别。

每边的个数 = 总数 ÷ 4 + 1”；

每向里一层每边棋子数减少 2；

掌握计算层数、每层个数、总个数的方法，及每层个数的变化规律。



例题精讲

板块一、非封闭的植树问题

【例 1】 大头儿子的学校旁边的一条路长 400 米，在路的一边从头到尾每隔 4 米种一棵树，一共能种几棵树？



【解析】 从图上可以看出，每隔 4 米种一棵树，如果 20 米长的路的一边共种了 6 棵树，这是因为我们首先要在这条路的一端种上一棵，就是说种树的棵树要比间距的个数多 1，所以列式为： $400 \div 4 + 1 = 101$ （棵）。

【巩固】 一条公路的一旁连两端在内共植树 91 棵，每两棵之间的距离是 5 米，求公路长是多少米？

【解析】 根据植树问题得到： $(91 - 1) \times 5 = 450$ （米）

【巩固】 在一条长 240 米的水渠边上植树，每隔 3 米植 1 棵。两端都植，共植树多少棵？

【解析】 $240 \div 3 + 1 = 81$ （棵）

【例 2】 从小熊家到小猪家有一条小路，每隔 45 米种一棵树，加上两端共 53 棵；现在改成每隔 60 米种一棵树。求可余下多少棵树？

【解析】 该题含植树问题、相差关系两组数量关系。从小熊家到小猪家的距离是： $45 \times (53-1) = 2340$ （米），间隔距离变化后，两地之间种树： $2340 \div 60 + 1 = 40$ （棵），所以可余下树： $53 - 40 = 13$ （棵），综合算式为： $53 - [45 \times (53-1) \div 60 + 1] = 13$ （棵）。

【巩固】 从甲地到乙地每隔 40 米安装一根电线杆，加上两端共 51 根；现在改成每隔 60 米安装一根电线杆。求还需要多少根电线杆？

【解析】 该题含植树问题、相差关系两组数量关系。

解：①从甲地到乙地距离多少米？

$$40 \times (51-1) = 2000 \text{ (米)}$$

②间隔距离变化后，甲乙两地之间安装多少根电线杆？

$$2000 \div 60 = 100 \text{ (根)}, 100 + 1 = 101 \text{ (根)}$$

③还需要下多少根电线杆？

$$101 - 51 = 50 \text{ (根)}$$

$$\text{综合算式: } [40 \times (51-1) \div 60 + 1] - 51 = 50 \text{ (根)}$$

【例 3】 马路的一边，相隔 8 米有一棵杨树，小强乘汽车从学校回家，从看到第一棵树到第 153 棵树共花了 4 分钟，小强从家到学校共坐了半小时的汽车，问：小强的家距离学校多远？

【解析】 第一棵树到第 153 棵树中间共有 $153-1=152$ （个）间隔，每个间隔长 8 米，所以第一棵树到第 153 棵树的距离是： $152 \times 8 = 1216$ （米），汽车经过 1216 米用了 4 分钟，1 分钟汽车经过： $1216 \div 4 = 304$ （米），半小时汽车经过： $304 \times 30 = 9120$ （米），即小明的家距离学校 9120 米。

【巩固】 马路的一边每相隔 9 米栽有一棵柳树。张军乘汽车 5 分钟共看到 501 棵树。问汽车每小时走多少千米？

【解析】 张军 5 分钟看到 501 棵树意味着在马路的两端都植树了；只要求出这段路的长度就容易求出汽车速度。

解：5 分钟汽车共走了：

$$9 \times (501 - 1) = 4500 \text{ (米)},$$

汽车每分钟走: $4500 \div 5 = 900 \text{ (米)},$

汽车每小时走:

$$900 \times 60 = 54000 \text{ (米)} = 54 \text{ (千米)}$$

列综合式:

$$9 \times (501 - 1) \div 5 \times 60 \div 1000 = 54 \text{ (千米)}$$

【例 4】一位老爷爷以匀速散步，从家门口走到第 11 棵树用了 11 分钟，这位老爷爷如果走 24 分钟，应走到第几棵树？（家门口没有树）

【解析】从家门口走到第 11 棵树是走了 11 个间隔，走一个间隔所用时间是: $11 \div 11 = 1$ (分钟)，那么走 24 分钟应该走了: $24 \div 1 = 24$ (个) 间隔，所以老爷爷应该走到了第 24 棵树。

【例 5】晶晶上楼，从第一层走到第三层需要走 36 级台阶。如果从第一层走到第六层需要走多少级台阶？(各层楼之间的台阶数相同)

【解析】题意的实质反映的是一线段上的点数与间隔数之间的关系。线段示意图如下：

解: ①每相邻两层楼之间有多少级台阶?

$$36 \div (3 - 1) = 18 \text{ (级)}$$

②从第一层走到第六层共多少级台阶?

$$18 \times (6 - 1) = 90 \text{ (级)}$$

Parallel Education

【巩固】丁丁和爸爸两个人比赛跑楼梯，从一层开始比赛，丁丁到四层时，爸爸到三层，如此算来，丁丁到 16 层时，爸爸跑到了几层？

【解析】丁丁实际跑了三层的距离，爸爸跑了两层的距离，到 16 层需要跑 15 层的距离，所以丁丁跑了 $15 \div 3 = 5$ (个) 三层的距离，爸爸同时跑了 5 个两层的距离。所以爸爸跑到了 $5 \times 2 + 1 = 11$ (层)。

【例 6】元宵节到了，实验中学学校大门上挂了红绿两种颜色的彩灯，从头到尾一共挂了 21 只，每隔 30 分米挂一只红灯，相邻的 2 只红灯之间挂了一只绿灯，问实验中学学校的大门有多宽？

【解析】一共挂了 21 只彩灯说明彩灯中间的间距有: $21-1=20$ (个), 每隔 30 分米挂一只红灯, 相邻的 2 只红灯之间挂了一只绿灯, 说明每个间距的长是: $30 \div 2=15$ (分米), 所以学校的大门宽度为: $15 \times 20=300$ (分米)

【例 7】有一个报时钟, 每敲响一下, 声音可持续 3 秒. 如果敲响 6 下, 那么从敲响第一下到最后一下持续声音结束, 一共需要 43 秒. 现在敲响 12 下, 从敲响第一下到最后一下持续声音结束, 一共需要多长时间?

【解析】每次敲完以后, 声音持续 3 秒, 那么从敲完第一下到敲完第 6 下, 一共经历的时间是 $43-3=40$ (秒), 而这之间只有 $6-1=5$ (个) 间隔, 所以每个间隔时间是 $40 \div 5=8$ (秒), 现在要敲响 12 下, 所以一共经历的时间是 11 个间隔和 3 秒的持续时间, 一共需要时间是: $11 \times 8+3=91$ (秒).

【巩固】有一个挂钟, 每小时敲一次钟, 几点钟就敲几下, 六点时, 5 秒钟敲完, 那么十二点时, 几秒钟才能敲完?

【解析】六点时敲 6 下, 中间共有 5 个间隔, 所以每个时间间隔是 $5 \div 5=1$ (秒), 十二点要敲 12 下, 中间有 11 个时间间隔, 所以十二点要用: $11 \times 1=11$ (秒) 才能敲完.

【例 8】小明家的小狗喝水时间很规律, 每隔 5 分钟喝一次水, 第一次喝水的时间是 8 点整, 当小狗第 20 次喝水时, 时间是多少?

【解析】第 20 次喝水与第 1 次喝水之间有 $20-1=19$ (个) 间隔, 因为小狗每隔 5 分钟喝一次, 所以到第 20 次喝水中间间隔的时间是: $19 \times 5=95$ (分钟), 也就是 1 个小时 35 分钟, 所以小狗第 20 次喝水时时间是: 9 时 35 分.

【巩固】科学家进行一项试验, 每隔 5 小时做一次记录, 做第 12 次记录时, 挂钟时针恰好指向 9, 问做第一次记录时, 时针指向几?

【解析】我们先要弄清楚从第一次记录到第十二次记录中间经过的时间是多少. 第 1 次到第 12 次有 11 个间隔: $5 \times 11=55$ (小时). 然后我们要知道 55 小时, 时针发生了怎样的变化. 时针每过 12 小时就会转一圈回到原来的状态, 所以时针转了 4 圈以后, 又经过了 7 个小时. $55 \div 12=4 \dots\dots 7$ (小时) 而这时时针指向 9 点, 所以原来时针指向 2 点.

【例 9】裁缝有一段 16 米长的呢子, 每天剪去 2 米, 第几天剪去最后一段?

【解析】如果呢子有 2 米, 不需要剪; 如果呢子有 4 米, 第一天就可以剪去最后一段, 4 米里有 2 个 2 米, 只用 1 天; 如果呢子有 6 米, 第一天剪去 2 米, 还剩 4 米, 第二天就可以剪去最后一

段，6米里有3个2米，只用2天；如果呢子有8米，第一天剪去2米，还剩6米，第二天再剪2米，还剩4米，这样第三天即可剪去最后一段，8米里有4个2米，用3天，……我们可以从中发现规律：所用的天数比2米的个数少1。因此，只要看16米里有几个2米，问题就可以解决了。16米中包含2米的个数： $16 \div 2 = 8$ （个）剪去最后一段所用的天数： $8 - 1 = 7$ （天），所以裁缝第7天剪去最后一段。

【巩固】一根木料在24秒内被锯成了4段，用同样的速度锯成5段，需要多少秒？

【解析】锯的次数总比锯的段数少1。因此，在24秒内锯了4段，实际只锯了3次，这样我们就可以求出锯一次所用的时间了，又由于用同样的速度锯成5段；实际上锯了4次，这样锯成5段所用的时间就可以求出来了。所以锯一次所用的时间： $24 \div (4 - 1) = 8$ （秒），锯5段所用的时间：

$$8 \times (5 - 1) = 32 \text{ (秒)}.$$

【巩固】有三根木料，打算把每根锯成3段，每锯开一处需用3分钟，全部锯完需要多少分钟？

【解析】求锯的次数属植树问题思路。一根木料锯成了3段，只要锯 $3 - 1 = 2$ 次，锯3根木料要 $2 \times 3 = 6$ 次，问题随之可求。

解：①一根木料要锯成3段，共要锯多少次？

$$3 - 1 = 2 \text{ (次)}$$

②锯开三根木料要多少次？

$$2 \times 3 = 6 \text{ (次)}$$

③锯三根木料要多少时间？

$$3 \times 6 = 18 \text{ (分钟)}$$

$$\text{综合算式: } 3 \times [(3 - 1) \times 3] = 18 \text{ (分钟)}$$

$$\text{或 } 3 \times (3 - 1) \times 3 = 18 \text{ (分钟)}$$

【例 10】有一根180厘米长的绳子，从一端开始每3厘米作一记号，每4厘米也作一记号，然后将标有记号的地方剪断，绳子共被剪成了多少段？

【解析】(1) 每3厘米作一记号，共有记号： $180 \div 3 - 1 = 59$ （个）

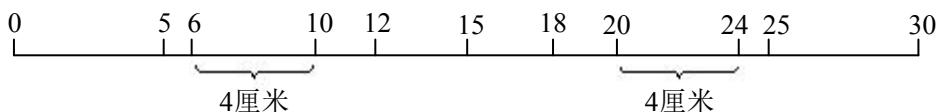
(2) 每4厘米作一记号，共有记号： $180 \div 4 - 1 = 44$ （个）

(3) 其中重复的共有： $180 \div 12 - 1 = 14$ （个）

(4) 所以记号共有： $59 + 44 - 14 = 89$ （个）

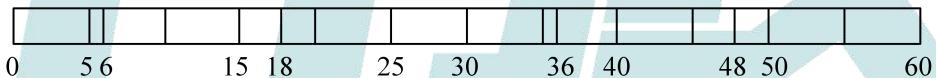
(5) 绳子共被剪成了: $89 + 1 = 90$ (段).

【例 11】 在一根长 100 厘米的木棍上, 自左至右每隔 6 厘米染一个红色点, 同时自右向左每隔 5 厘米也染一个红点, 然后沿红点将木棍逐级锯开, 那么长度是 4 厘米的短木棍有多少根?



【解析】 由于 100 是 5 的倍数, 所以自右向左每隔 5 厘米染一个红点相当于自左向右每隔 5 厘米染一个红点. 而每隔 30 厘米可得到 2 个 4 厘米的短木棍. 最后 $100 - 30 \times 3 = 10$ (厘米) 也可以得一个短木棍, 故共有 $2 \times 3 + 1 = 7$ (个) 4 厘米的短棍.

【巩固】 (1990 年小学数学奥林匹克决赛试题) 甲、乙俩人对一根 3 米长的木棍涂色, 首先甲从木棍端点开始涂黑 5 厘米, 间隔 5 厘米不涂色, 接着再涂黑 5 厘米, 这样交替做到底. 然后, 乙从木棍同一端点开始留出 6 厘米不涂色, 接着涂黑 6 厘米, 再间隔 6 厘米不涂色, 交替做到底. 最后, 木棍上没有被涂黑部分的长度总和为 _____ 厘米.



【解析】 考虑 60cm 长的一段木棍中, 没有被涂黑的部分长度总和为 $1+3+5+4+2=15(cm)$ (如上图), 所以 3 米长的木棍中共有 $15 \times (300 \div 60) = 75(cm)$ 长未被涂黑.

【巩固】 大头儿子和小头爸爸一起攀登一个有 300 级台阶的山坡, 爸爸每步上 3 级台阶, 儿子每步上 2 级台阶, 从起点处开始, 父子俩走完这段路共踏了多少级不同的台阶?

【解析】 大头儿子踏过的台阶数是: $300 \div 2 = 150$ (级), 小头爸爸踏过的台阶数是 $300 \div 3 = 100$ (级), 父子俩每 $2 \times 3 = 6$ (级) 台阶要共同踏 1 级台阶, 共重复踏了 $300 \div 6 = 50$ (级), 所以父子俩共踏了: $150 + 100 - 50 = 200$ (级).

【例 12】 同学们做操，小林站在左起第 5 列，右起第 3 列；从前数前面有 4 个同学，从后数后面有 6 个同学。每行每列的人数同样多，做操的同学一共有多少人？

【解析】 带领学生画图求解。

一共有几行？列式： $4+6+1=11$ （行）

一共有几列？列式： $5+3-1=7$ （列）

一共有多少人？列式： $11\times 7=77$ （人）

【巩固】 一群小猴排成整齐的队伍做操，长颈鹿站在队伍旁边，一下子看到了他的好朋友金丝猴。长颈鹿数了数，金丝猴的左边有 4 只猴，右边也有 4 只猴，前面有 5 只猴，后面也有 5 只猴。小朋友，你能算出有多少只猴子在做操吗？

【解析】 一共有多少行？列式： $5+5+1=11$ （行）

一共有多少列？列式： $4+4+1=9$ （列）

一共有多少只猴子？ $11\times 9=99$ （只）。

【巩固】 校门口放着一排花，共 10 盆。从左往右数茉莉花摆在第 6，从右往左数，月季花摆在第 8，一串红花全都摆在了茉莉花和月季花之间。算一算，一串红花一共有多少盆？

【解析】 从左往右数茉莉花摆在第 6，那么从右往左数茉莉花就是第： $10-(6-1)=5$ （盆）花，从右往左数，月季花摆在第 8，从左往右数月季花就是第： $10-(8-1)=3$ （盆）花，一串红花全都摆在了茉莉花和月季花之间，一串红花一共有： $10-5-3=2$ （盆）。

【巩固】 (2008 年“陈省身杯”国际青少年数学邀请赛) 小朋友们做广播体操，小明恰好站在队列的正中心，此时无论是从前往后或者从后往前数他都排在第 5 个，无论是从左往右或者是从右往左数他都排在第 6 个，则这个队列中一共有_____位小朋友。

【解析】 根据题意知：每列有 $5+5-1=9$ （人），每行有 $6+6-1=11$ （人），则这个队列共有：

$9\times 11=99$ （人）。

【例 13】 北京市国庆节参加游行的总人数有 60000 人，这些人平均分为 25 队，每队又以 12 人为一排列队前进。排与排之间的距离为 1 米，队与队之间的距离是 4 米，游行队伍全长多少米？

【解析】 这道题仍是植树问题的逆解题，它与植树问题中已知树的棵数，树间的距离，求树列的全长相当。逆解时要注意段数比树的棵数少 1。所以，

$$(1) \text{每队的人数是: } 60000 \div 25 = 2400 \text{ (人)}$$

$$(2) \text{每队可以分成的排数是: } 2400 \div 12 = 200 \text{ (排)}$$

$$(3) 200 \text{ 排的全长米数是: } 1 \times (200 - 1) = 199 \text{ (米)}$$

$$(4) 25 \text{ 个队的全长米数是: } 199 \times 25 = 4975 \text{ (米)}$$

$$(5) 25 \text{ 个队之间的距离总米数是: } 4 \times (25 - 1) = 96 \text{ (米)}$$

$$(6) \text{游行队伍的全长是: } 4975 + 96 = 5071 \text{ (米)}$$

【巩固】一次检阅，接受检阅的一列彩车车队共30辆，每辆车长4米，前后每辆车相隔5米。这列车队共排列了多长？如果车队每秒行驶2米，那么这列车队要通过535米长的检阅场地，需要多少时间？

【解析】车队间隔共有 $30 - 1 = 29$ (个)，每个间隔5米，所以，间隔的总长为 $(30 - 1) \times 5 = 145$ (米)，而车身的总长为 $30 \times 4 = 120$ (米)，故这列车队的总长为 $(30 - 1) \times 5 + 30 \times 4 = 265$ (米)。由于车队要行 $265 + 535 = 800$ (米)，且每秒行2米，所以车队通过检阅场地需要， $(265 + 535) \div 2 = 400$ (秒) = 6分40秒。

【例 14】学校三年级运动员参加校运动会入场式，组成 6×6 的方块队(即每行每列都是6人)，前后每行间隔为2米。他们以每分钟40米的速度，通过长30米的主席台，需要多少分钟？

【解析】通过下表理清解题思路。

方块队通过主席台需要多少分钟？

通过的路程总长 ÷ 方块队行进的速度(40米 / 分钟)

方块队长+主席台长(30米)

?

运用植树问题的逆解思路，即前后每行间隔长 × 间隔数=方块队长。方块队长：

$2 \times (6 - 1) = 10$ (米)，方块队通过主席台行进路程总长： $10 + 30 = 40$ (米)，方块队通过主席台需要： $40 \div 40 = 1$ (分钟)，综合算式： $[2 \times (6 - 1) + 30] \div 40 = 1$ (分钟)。

【巩固】有一路电车的起点站和终点站分别是甲站和乙站，每隔5分钟有一辆电车从甲站出发开往乙站，全程要15分钟。有一个人从乙站出发沿电车路线骑车前往甲站，他出发的时

候，恰好有一辆电车到达乙站，在路上，他又遇到了 10 辆迎面开来的电车才到达甲站，这时候，恰好又有一辆车从甲站开出，问：他从乙站到甲站用了多少分钟？

【解析】这个人前后一共看见了 12 辆电车，每两辆车的间隔是 5 分钟，开出 12 辆电车共有 $12-1=11$ （个）间隔，这样可以计算出从第 1 辆电车开出到第 12 辆电车开出所用的时间，共经了 $5 \times 11 = 55$ （分钟），由于他出发的时候，第 1 辆电车已到达乙站，所以这个人从乙站到甲站用了 $55-15=40$ （分钟）。

板块二、封闭的植树问题（方阵）

【例 15】 小强家附近的公园里有一个圆形池塘，它的周长 1500 是米，每隔 3 米栽种一棵树。问：共需树苗多少株？

【解析】因为圆形池塘是一个封闭的模型，所以我们直接运用公式棵数=段数=周长÷株距，从而有树苗： $1500 \div 3 = 500$ （株）。

【巩固】周叔叔家有一个长 40 米，宽 30 米的长方形鱼塘，他想沿塘每隔 5 米栽一棵柳树，需要栽多少棵柳树？

【解析】 $(40+30) \times 2 = 140$ （米）， $140 \div 5 = 28$ （棵）。

【例 16】 公园内有一个圆形花坛，绕着它走一圈是 120 米。如果沿着这一圈每隔 6 米栽一棵丁香花，再在每相邻的两株丁香花之间等距离地栽 2 株月季花，可栽丁香花多少株？可栽月季花多少株？两株相邻的丁香花之间的 2 株月季花相距多少米？

【解析】在圆周上栽树时，由于开始栽的一棵与依次栽的最后一棵将会重合在一起，所以可栽的株数正好等于分成的段数。由于每相邻的两株丁香花之间等距离地栽 2 株月季花，所以栽月季花的株数等于 2 乘以段数的积。要求两株相邻的丁香花之间的 2 株月季花相距多少米？需要懂得两株相邻的丁香花之间等距离地栽 2 株月季花，就是说这 4 株花之间有 3 段相等的距离。以 6 米为一段，圆形花坛一圈可分的段数，即是栽丁香花的株数： $120 \div 6 = 20$ （株），栽月季花的株数是： $2 \times 20 = 40$ （株），每段上丁香花和月季花的总株数是： $2 + 2 = 4$ （株），4 株花栽在 6 米的距离中，有 3 段相等的距离，每两株之间的距离是： $6 \div (4-1) = 2$ （米）。

【巩固】一个圆形花坛，周长是 180 米。每隔 6 米种一棵芍药花，每相邻的两棵芍药花之间均匀地栽两棵月季花。问可栽多少棵芍药？多少棵月季？两棵月季之间的株距是多少米？

【解析】①在圆形花坛上栽花，是封闭路线问题，其株数=段数。②由于相邻的两棵芍药花之间等距的栽有两棵月季，则每6米之中共有3棵花，且月季花棵数是芍药的2倍。

解：共可栽芍药花： $180 \div 6 = 30$ （棵）

共种月季花： $2 \times 30 = 60$ （棵）

两种花共： $30 + 60 = 90$ （棵）

两棵花之间距离： $180 \div 90 = 2$ （米）

相邻的花或者都是月季花或者一棵是月季花另一棵是芍药花，所以月季花的株距是2米或4米。

【巩固】在某校周长400米的环形跑道上，每隔8米插一面红旗，然后在相邻两面红旗之间每隔2米插一面黄旗，应准备红旗_____面，黄旗_____面。

【解析】 $400 \div 8 = 50$ （红旗）

$$8 \div 2 - 1 = 3 \quad 3 \times 50 = 150 \quad (\text{黄旗})$$

【例 17】大雪后的一天，小明和爸爸共同步测一个圆形花圃的周长。他俩的起点和走的方向完全相同，小明的平均步长是54厘米，爸爸的平均步长是72厘米，由于两人的脚印有重合，并且他们走了一圈后都回到起点，这时雪地上只留下60个脚印，这个花圃的周长是多少厘米？

【解析】通过画图使学生明白从第一个重合点（起点）到下一个重合点之间的距离是216厘米， $216 \div 54 = 4$ ， $216 \div 72 = 3$ ，从而知在两个重合点之间，爸爸留下脚印3个，小明留下脚印4个，去掉一个重合的脚印，共留下脚印 $3+4-1=6$ （个），因为从起点到最后雪地上共留下脚印60个，所以花圃的周长是 $216 \times (60 \div 6) = 2160$ （厘米）。

【巩固】园林工人要在周长300米的圆形花坛边等距离地栽上树。他们先沿着花坛的边每隔3米挖一个坑，当挖完30个坑时，突然接到通知：改为每隔5米栽一颗树。这样，他们还要挖多少个坑才能完成任务？

【解析】这道题的关键就在之间每3米一个，已经挖的坑，和后来改成5米挖一个坑，有多少个是重复不需要挖的，那么一步一步分析如下：

(1) 从第1个坑到第30个坑，共有多长？

$$(30-1) \times 3 = 87 \text{ (米)}$$

(2) 改为“每 5 米栽一棵树”，有多少坑仍然有用？

$$87 \div 15 = 5 \cdots 12$$

$$5+1=6 \text{ (个)}$$

(3) 改为“每 5 米栽一棵树”，一共应挖多少个坑？

$$300 \div 5 = 60 \text{ (个)}$$

(4) 还要挖多少个？

$$60-6=54 \text{ (个)}$$

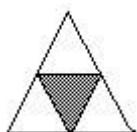
【例 18】 20 名运动员，骑摩托车围绕体育场的环形跑道头尾相接作表演，每辆车长 2 米，前后两辆车相距 18 米，这列车队长多少米？如果每辆车的车速为每秒 12 米，这个车队经过长为 38 米的主席台需要多长时间？

【解析】 方法一：头尾相接所以封闭型，有 20 个间隔，车队长即为环形，跑道长：

$$18 \times 20 + 2 \times 20 = 400 \text{ (米)} \text{, 通过时: } (400+38) \div 12 = 36 \text{ (秒)}.$$

方法二：20 名运动员共有 20 辆摩托车，那么他们之间一共有 19 个间隔，这个车队的长由 20 辆车长加上 19 个间隔组成。20 辆车的长度是： $20 \times 2 = 40 \text{ (米)}$ 。19 个间隔的总长度为： $19 \times 18 = 342 \text{ (米)}$ 。所以这个车队的长度为： $40+342=382 \text{ (米)}$ （当然这一问也可以这样考虑：把一辆车跟一个间隔看成一个整体，那么这个车队长： $19 \times 20 + 2 = 382 \text{ (米)}$ ）。第二问是一个行程问题，穿过主席台实际上走的路程是主席台长加上车队的长度，所以车队走的总路程为 $382+38=420 \text{ (米)}$ ，又因为车队的速度为每秒 12 米，所以用的时间为 $420 \div 12 = 35 \text{ (秒)}$ 。

【例 19】 一个街心花园如右图所示。它由四个大小相等的等边三角形组成。已知从每个小三角形的顶点开始，到下一个顶点均匀栽有 9 棵花。问大三角形边上栽有多少棵花？整个花园中共栽多少棵花？



【解析】 大三角形三条边上共栽花： $(9 \times 2 - 1 - 1) \times 3 = 48 \text{ (棵)}$ ，中间画斜线小三角形三条边上栽花： $(9 - 2) \times 3 = 21 \text{ (棵)}$ ，整个花坛共栽花： $48 + 21 = 69 \text{ (棵)}$ 。

【例 20】 正方形操场四周栽了一圈树，四个角上都栽了树，每两棵树相隔 5 米。甲、乙从一个角上同时出发，向不同的方向走去，甲的速度是乙的 2 倍，乙在拐了一个弯之后的第 5 棵树与甲相遇（把角上的树看作第一棵树）。操场四周栽了多少棵树？

【解析】 因为甲的速度是乙的两倍，乙走了操场的一条边，甲走了两条边，乙拐了一个弯之后走到第 5 棵树，实际走了 4 个间隔，那么甲应该走了 8 个间隔，相遇的树就是甲拐弯以后走的第 9 棵树，所以这一边有 $9+4=13$ （棵）树。操场周围的树一共有 $(13-1) \times 4=48$ （棵）。

板块三、方阵问题

【例 21】 某校五年级学生排成一个方阵，最外一层的人数为 60 人。问方阵外层每边有多少人？这个方阵共有五年级学生多少人？

【解析】 根据四周人数和每边人数的关系可以知：每边人数 = 四周人数 $\div 4 + 1$ ，可以求出方阵最外层每边人数，那么整个方阵队列的总人数就可以求了。所以方阵最外层每边人数：
 $60 \div 4 + 1 = 16$ （人），整个方阵共有学生人数： $16 \times 16 = 256$ （人）。

【巩固】 某小区要对一块空地进行绿化，把这些树种成方阵的样子。最外面一周有 60 棵树。问这个方阵外层每边有多少棵树？这块空地一共种了多少棵树？

【解析】 根据四周棵数和每边棵数的关系：每边棵数 = 四周棵数 $\div 4 + 1$ ，可以求出方阵最外层每边棵数。那么整个方阵队列的总人数就可以解出。

$$\text{方阵最外层每边棵数: } 60 \div 4 + 1 = 16 \text{ (棵)}$$

$$\text{整个方阵共有树: } 16 \times 16 = 256 \text{ (棵)}.$$

【巩固】 新学期开始，手持鲜花的少先队员在一辆彩车四周围成了每边两层的方阵，最外面一层每边 13 人，彩车周围的少先队员有多少人？

【解析】 先让学生自己思考，待大家都有结果后，让学生思考一个问题：相邻两层差几个人。外层 $13 \times 4 - 4 = 48$ 人，内外相差 8 人（教师可举例说明），内层 $48 - 8 = 40$ 人，共 88 人。

【巩固】 明在一个正方形的棋盘里摆棋子，他先把最外层摆满，用了 40 个棋子，求最外层每边有多少棋子？如果他要把整个棋盘摆满，还需要多少棋子？

【解析】有前一题基础，可让学生自己思考解决。

首先根据“每边的个数=总数 $\div 4+1$ ”求出每边的棋子数： $40 \div 4 + 1 = 11$ （个），根据“每向里一层每边棋子数减少2”，求出最外面数第二层中每边各有： $11 - 2 = 9$ （个）棋子，利用求实心方阵总个数的方法就可以求出还需： $9 \times 9 = 81$ （个）棋子。

【例 22】 节日来临，同学们用盆花在操场上摆了一个空心花坛，最外层的一层每边摆了12盆花，一共3层，一共用去多少盆花？

【解析】让学生利用上题思考结果加以解决。

(法1) 不论是空心方阵还是实心方阵，每向里一层，每边的花盆就少2个，每层的花盆就少8个，因此可以依次求出每层花盆的个数。最外层有花盆： $(12-1) \times 4 = 44$ （盆），第二层有： $44 - 8 = 36$ （盆），第三层有： $36 - 8 = 28$ （盆），共有： $44 + 36 + 28 = 108$ （盆）。

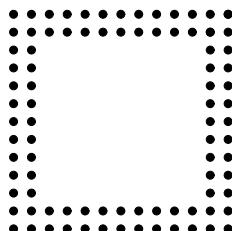
(法2) 将三层花盆分成四块，形成四个相等的长方形。它们的长是 $(12-3)$ 个，宽是3个， $(12-3) \times 3 = 27$ 个，即每个长方形中包括27个花盆，再将结果乘以4就得到总数是108个，于是我们可以总结为：空心方阵中点的总个数=(最外层每边的个数-层数)×层数×4。

(法3) 也可以将这种情况看作从一个大的实心方阵中取出一个小的实心方阵。

【例 23】 在一次团体操表演中，有一个空心方阵最外层有64人，最内层有32人，参加团体操表演的共多少人？

【解析】根据最外层和最内层人数，可以分别求出内外层每边的人数，一个空心方阵，可以看做从一个最外层有64人的实心方阵中，减去了一个小方阵。外层每边人数： $64 \div 4 + 1 = 17$ （人）。内层每边人数： $32 \div 4 + 1 = 9$ （人），空心方阵人数： $17 \times 17 - (9-2) \times (9-2) = 240$ （人）。

【例 24】 晓晓爱好围棋，他用棋子在棋盘上摆了一个二层空心方阵，外层每边有14个棋子，你知道他一共用了多少个棋子吗？



【解析】如图所示，方阵每向里面一层，每边的个数就减少 2 个。知道最外面一层每边放 14 个棋子，就可以求出第二层每边的个数。知道各层每边的个数，就可以求出总数。

$$(14-1) \times 4 = 52 \text{ (个)}, \quad (14-2-1) \times 4 = 44 \text{ (个)}$$

$$52 + 44 = 96 \text{ (个)}, \quad \text{一共用了 } 96 \text{ 个棋子。}$$

【巩固】晶晶用围棋子摆成一个三层空心方阵，最外一层每边有围棋子 14 个。晶晶摆这个方阵共用围棋子多少个？

【解析】方阵每向里面一层，每边的个数就减少 2 个。知道最外面一层每边放 14 个，就可以求第二层及第三层每边个数。知道各层每边的个数，就可以求出各层总数。最外边一层棋子个数： $(14-1) \times 4 = 52$ (个)，第二层棋子个数： $(14-2-1) \times 4 = 44$ (个)，第三层棋子个数： $(14-2 \times 2-1) \times 4 = 36$ (个)。摆这个方阵共用棋子： $52 + 44 + 36 = 132$ (个)。还可以这样想：中空方阵总个数 = (外层每边个数 - 层数) × 层数 × 4 进行计算，得
 $(14-3) \times 3 \times 4 = 132$ (个)。

【例 25】二年级舞蹈队为全校做健美操表演，组成一个正方形队列，后来由于表演的需要，又增加一行一列，增加的人数正好是 17 人，那么原来准备参加健美操表演的有多少人？

【解析】可先让学生自己画图实践，从 3 乘 3 的方阵变成 4 乘 4 的如何进行，掌握画法后再来思考这题。

因增加的是一行一列，而行、列人数仍应相等，但为什么增加的却是 17 人，因有 1 人是既在他所在的行，又在他所在的列。若把它减掉，剩下人数恰是原两行或两列的人数，则原来一行或一列的人数可求。参加健美操表演的人数可求。

$$\text{列式: } (17-1) \div 2 = 16 \div 2 = 8 \text{ (人)}, \quad 8 \times 8 = 64 \text{ (人)}.$$

【巩固】四年级一班同学参加了广播操比赛，排成每行 8 人，每列 8 人的方阵，问方阵中共有多少学生？如果去掉一行一列，还剩多少同学？

【解析】可以根据“实心方阵总人数 = 每边人数 × 每边人数”得到 8 行 8 列的实心方阵人数为： $8 \times 8 = 64$ (人)，去掉一行一列后，还剩 7 行 7 列，也可通过同样的方法得出总人数为： $7 \times 7 = 49$ (人)。

【巩固】某部队战士排成方阵行军，另一支队伍共 17 人加入他们的方阵，正好使横竖各增加一排，现共有多少战士？

【解析】后来的战士加入方阵时，是在原方阵外侧横竖方向各增加一排，那么有一个战士要站在这两排的交界处，计算横排竖排的人数时，对他进行了重复计算，也就是说现在每一排实际人数是 $(17+1)\div 2=9$ （人），因此可以求出总人数： $9\times 9=81$ （人）。

【巩固】学生进行队列表演，排成了一个正方形队列，如果去掉一行一列，要去掉11人，问这个方阵共有多少人？

【解析】由上题思路，带领学生进行逆向思维。学生排成一正方形队列表演，去掉一行一列，去掉了11人，那我们就要思考每行去掉了几个同学，因为是正方形队列，所以每行每列人数一样多，但在数的时候，站在角落的同学被数了两个，那么现在求每行的人数时就要在11里面多加一个。现在每行的人数是： $(11+1)\div 2=6$ （人），共 $6\times 6=36$ （人）。

【巩固】学生进行队列表演，排成了一个正方形队列，如果去掉一行一列，要去掉13人，问这个方阵共有多少人？

【解析】每行： $(13+1)\div 2=7$ （人），总人数： $7\times 7=49$ （人）。

【巩固】100名同学排成一个方阵，后来又减去一行一列，问减少了多少人？

【解析】和前两题比仅仅是数量上的增加，此时可带领学生总结规律：去掉一行一列后要加上重复的那个。

100名同学排成一个方阵，后来又减去一行一列，剩下的是9行9列的方阵，即剩下81人，减少了19人。

【巩固】军训的学生进行队列表演，排成了一个5行5列的正方形队列，如果去掉一行一列，要去掉多少人？

【解析】一行一列各5人，顶点处重复。 $5\times 2-1=9$ 人，因为角上的一个同学被重复数了两次，所以要把多算的一次减掉。

【例 26】校三年级学生排成一个方阵，最外一层的人数为36人，问方阵外层每边有多少人？这个方阵共有三年级学生多少人？

【解析】引导学生找出与前四题区别，因为条件是方阵外层，所以有四个重复计算的人。

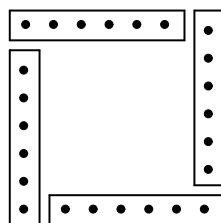
（法1）方阵外层每边有： $(36+4)\div 4=10$ （人），共 $10\times 10=100$ （人）。

（法2）方阵外层每边有： $36\div 4+1=10$ （人），共 $10\times 10=100$ （人）。

【巩固】三年级学生排成一个方阵进行体操表演，最外一层的人数为32人，问方阵外层每边有多少人？这个方阵共有三年级学生多少人？

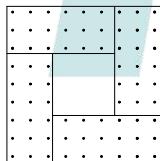
【解析】每边： $(32+4)\div 4=9$ （人），总人数： $9\times 9=81$ （人）。

【例 27】育新小学召开秋季运动会，准备在正方形的操场周围插上彩旗。如果4个角上都要插上一面彩旗，要使每边有7面彩旗，那么一共要准备多少面彩旗才行？



【解析】心急的学生会很配合的说28，此时可提示他们想想，彩旗不够，能不能少点？根据题目的要求画出示意图：我们把这些彩旗按照图中所示的方式分成相等的4部分，可以看出每一部分都有 $7-1=6$ 面旗。 $(7-1)\times 4=24$ （面），一共准备24面彩旗。

【巩固】通通用围棋子摆成一个三层空心方阵，最外一层每边有围棋子14个。通通摆这个方阵共用围棋子多少个？



Parallel Education

【解析】方阵每向里面一层，每边的个数就减少2个。知道最外面一层每边放14个，就可以求第二层及第三层每边个数。知道各层每边的个数，就可以求出各层总数。最外边一层棋子个数： $(14-1)\times 4=52$ （个），第二层棋子个数： $(14-2-1)\times 4=44$ （个），第三层棋子个数： $(14-2\times 2-1)\times 4=36$ （个）。摆这个方阵共用棋子： $52+44+36=132$ （个）。由右图还可以得出公式：中空方阵总个数=（每边个数-层数）×层数×4。得共用围棋子 $(14-3)\times 3\times 4=132$ （个）。

【例 28】120个棋子摆成一个三层空心方阵，最内层每边有多少棋子？

【解析】棋子一共三层，容易知道外层比中层多8个，内层比中层少8个，因此中层的棋子数就是三层的平均数为 $120 \div 3=40$ （个），可以求出中层每边的棋子数，向里一层，每边棋子数又减少2。中层总数： $120 \div 3=40$ （个）。中层每边个数： $40 \div 4+1=11$ （个），内层每边个数： $11-2=9$ （个）。

【巩固】将一个每边16枚棋子的实心方阵变成一个四层的空心方阵，此空心方阵的最外层每边有多少棋子？

【解析】棋子总数为： $16 \times 16=256$ （枚），由于空心方阵总个数 =（每边个数 - 层数）× 层数 × 4，所以，每边个数 = 空心方阵总个数 ÷ 层数 ÷ 4 + 层数，得出最外层每边有20枚棋子。

【例 29】有一群学生排成三层空心方阵，多9人，如空心部分增加两层，又少15人，问有学生多少人？

【解析】增加的两层人数为： $9+15=24$ （人），这两层人数之差是8人，因此最里层有 $(24-8) \div 2=8$ （人），现在的方阵共5层，那么最外层有 $8+8 \times 4=40$ （人），知道最外层人数及层数就不难求出总人数是105人。

【巩固】为了准备学校的集体舞比赛，四年级的学生在排队形。如果排成3层空心的方阵则多10人，如果在中间空心的部分接着增加一层又少6人。问一共有多少个学生参加排练呢？

【解析】在内部增加一层，人数由多出10人变为反而少6人，所以这一层人数为 $10+6=16$ 人。

(1) 中间空心部分加一层，每边有 $(10+6) \div 4+1=5$ （人）

(2) 四层方阵有 $(4+6+8+10) \times 4=112$ （人）

(3) 一共有学生 $112-6=106$ （人）

【巩固】一队战士排成三层空心方阵多出16人，如果空心部分再加一层又少28人，这队战士共有多少人？如果他们改成实心方阵，每边应有多少人？

【解析】把多余的16人放在方阵内部还少28人，可见方阵内部增加一层，需要 $16+28=44$ 人，因此向外三层的每层人数都可以求出。从内向外每层人数依次是：第一层： $16+28+8=52$ （人），第二层： $16+28+2 \times 8=60$ （人），第三层： $16+28+3 \times 8=68$ （人），总人数： $52+60+68+16=196$ （人），因为 $196=14 \times 14$ ，所以排成实心方阵每边有14人。

【例 30】 同学们用 64 盆花排出一个两层空心方阵，后来又决定在外面再增加一层成为三层方阵，还需多少盆花？

【解析】 对于两层方阵，外层比内层多 8 盆，两层共 64 盆，利用和差问题的解法，可以求出外层盆数是 $(64+8)\div 2=36$ （盆），从而得出需增加的盆数， $36+8=44$ （盆）。

【例 31】 在一次运动会开幕式上，有一大一小两个方阵合并变换为一个 10 行 10 列的方阵，求原来两个方阵各有多少人？

【解析】 根据时间多少和学生具体情况可考虑教给学生平方数的概念，并记住一些简单的平方数。10 行 10 列的方阵由 100 人组成，原来的小方阵每行或每列人数都不会超过 10 人，大方阵人数应该在 50~100 之间，可取 64 或 81，运用枚举法，可求出满足条件的是：大方阵有 64 人，小方阵有 36 人。

【例 32】 小华观看团体操表演，他看到表演队伍中的一个方阵变成一个正三角形实心队列，他估计队伍中人数大概在 30 至 50 人之间，你能告诉他到底有多少人吗？

【解析】 方阵总人数的特点：它是两个相同自然数的积，而三角形队列总人数的特点是：总数是从 1 开始若干个连续自然数的和，我们只要在 30~50 的范围内找出同时满足这两个条件的数就可以得出总人数。由于队伍可以排成方阵，在 30 至 50 人的范围内人数可能是 $6\times 6=36$ 人或 $7\times 7=49$ 人，又因为 $36=1+2+3+4+\dots+8$ ， $49=1+2+3+4+\dots+9+4$ ，所以总人数是 36 人。

【巩固】 将一个每边 16 枚棋子的实心方阵变成一个四层的空心方阵，此空心方阵的最外层每边有多少棋子？

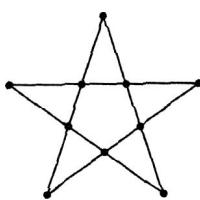
【解析】 由前面规律带领学生逐步推导。

棋子总数为： $16\times 16=256$ （枚），由于空心方阵总个数 =（每边个数 - 层数）× 层数 × 4，所以，每边个数 = 空心方阵总个数 ÷ 层数 ÷ 4 + 层数，得出最外层每边有 20 枚棋子。

板块四、几何植树问题

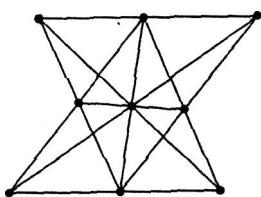
【例 33】 今有 10 盆花要在平地上摆成 5 行，每行都通过 4 盆花。请你给出一种设计方案，画图时用点表示花，用直线表示行。

【解析】 如下图所示：



【例 34】 今有 9 盆花要在平地上摆成 10 行，每行都通过 3 盆花。请你给出一种设计方案，画图时用点表示花，用直线表示行。

【解析】 如下图所示：



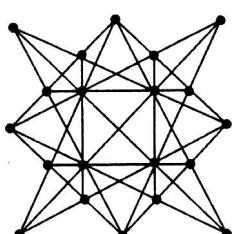
【例 35】 今有 10 盆花要在平地上摆成 10 行，每行都通过 3 盆花。请你给出一种设计方案，画图时用点表示花，用直线表示行。

【解析】 如下图所示：



【例 36】 今有 20 盆花要在平地上摆成 18 行，每行都通过 4 盆花。请你给出一种设计方案，画图时用点表示花，用直线表示行。

【解析】 如下图所示：



【例 37】 今有 20 盆花要在平地上摆成 20 行，每行都通过 4 盆花。请你给出一种设计方案，画图时用点表示花，用直线表示行。

【解析】 如下图所示：

